கணக்கியல் புள்ளியியல்

துணைப்பாடம்

(முதல் பகுதி)

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகின்றது)

ஆசிரியர்

திருமதி கிருட்டிணவேணி அருணாசலம்,

கணிதப் பேராசிரியை,

இராணி மேரிக் கல்லூரி,

சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண் — 570

கணக்கியல் புள்ளியியல்

துணைப்பாடம்

(முதல் பகுதி)

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகின்றது)

ஆசிரியர்

திருமதி கிருட்டிணவேணி அருணாசலம்,

கணிதப் பேராசிரியை,

இராணி மேரிக் கல்லூரி,

சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition— March, 1974

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 570

MATHEMATICAL STATISTICS

(Ancillary)— Part I

Tmt. KRISHNAVENI ARUNACHALAM

Price Rs. 16-65

Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

Printed by
Muthukumaran Press,
Madras-1.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதின்மூன்றுண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில் கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இருவகையிலும் தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'கணக்கியல் புள்ளியியல்—துணைப்பாடம் (முதல் பாகம்)' என்ற இந்நூல் தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 570ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 605 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின் உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

கணக்கியல் புள்ளியியல்

துணைப்பாடம்

(முதல் பகுதி)

1. தோற்றுவாய்

கல் தோன்றி மண் தோன்றாக் காலந்தொட்டே மக்கள் பண்பாடு மிக்கவர்களாய், எல்லாக் கலைகளிலும் சிறப்புற்றிருந்தனர் சிறப்பாக அறிவியற் கலைகளில் அவர் கண்ட உயர் வினை பழம் பொருள் ஆராய்ச்சிகள், செப்பேடுகள், கல்வெட்டுகள், இலக்கியங்கள் முதலியவற்றால் அறியலாம். "எண்ணும் எழுத்தும் கண்ணெனத்தகும்", என்ற முதுமொழிக்கிணங்க கணிதமும் இலக்கியமும் மக்கள் வாழ்க்கையில் பெரும் பங்கு வகித்தன. அக்காலத்தே கணிதத்தின் அடிப்படையில் சோதிடக் கலையும் வானநூற் கலையும் சிறந்து விளங்கின. அன்றியும் அரசியலமைப்பில் இடம் பெறும் சொத் வரி, சுங்க வரி முதலியவை அக்கால கணிதத்தின் மேன்மையைக் காட்டுகின்றன. இக் கணிதத்தைப் போற்றும் முறையில் அவர்கள் புள்ளியியல் கலையையும் வளர்த்தனர். தொன்மைக் காலத்திலிருந்தே ஒவ்வொரு கிராமமும், எத்துணை மக்களைக் கொண்டது, அவர்தம் கல்வித் தரம் யாது, அவர்களுக்கு வேண்டிய அளவு உணவு, உடை யாது ஆகியவற்றைக் குறித்துப் பல விவரங்களையும் சேகரித்து வைத்திருந்தனர்.

சோழர் காலத்தில் திரட்டப்பெற்ற வரிகள் பதிவு செய்யப் பட்ட கணக்குப் புத்தகங்களை அரசனின் ஆணை பெற்ற அதிகாரிகள் ஆண்டிற்கொரு முறை கணக்குகள் சரியா என்று பார்த்துத் தணிக்கை செய்த முறையில் அவர்கள் புள்ளியியலைக் கண்டுள்ளனர். அன்றியும், சோழர் காலத்தில் அரசியல் உறுப்பினரைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்குக் குடவோலை முறை கையாளப் பட்டது. இம் முறையைக் கைக்கொள்ள வேண்டுமெனில் புள்ளியியல் அறிவு கட்டாயம் தேவைப்படுகிறது. காரணம், ஒரு கிராமத்திற்கு வேண்டிய தலைவர்களின் எண்ணிக்கை அக்கிராம மக்கள் தொகையை அடிப்படையாகக் கொண்டு கணக்கிடப்பட்டு ஒருதலைச் சார்பற்ற வகையில் மக்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டதே யாகும். எனவே, சோழர் காலத்தில் கணிதவியலோடு புள்ளியியல்

அறிவும் சிறப்புற்றிருந்தது என்று அறியப்படுகிறது. மௌரியர் ஆட்சியில் மக்கட் தொகைக் கணக்கெடுப்பு முறையும் பிறப்பு, இறப்பு விவரங்களைப் பதிவு செய்யும் முறையும் வழக்கில் இருந்துள்ளன. அக்பரது ஆட்சியில் புள்ளி விவர அளவெடுப்பு நடந்துள்ளதாகவும் அறிகிறோம். எனவே புள்ளியியல் முறை இக் காலத்திற்குப் புதுமையானதொன்றன்று. பழங்காலந்தொட்டே அது இருந்து வந்ததேயாம். இக்காலத்தைப்போல் அக்கால மக்கள் அதனை ஒரு கலையாக வளர்க்கவில்லை. இப்புள்ளியியலறிவு இன்று இத்துணையளவு போற்றப்படுதற்குக் காரணம் மக்கட் தொகைப் பெருக்கமும், ஒவ்வொரு மனிதனுக்கும் உரிய தேவைகள் சராசரியாக நிறைவேற்றப்படுவதற்கான வாய்ப்பைக் காணும் ஆர்வமுமேயாகும்.

மக்கள் பிறப்பு இறப்பு கணக்கெடுத்தலில் புள்ளியியல் பெரிதும் துணை புரிகிறது. ஒரு நாட்டின் ஜனத்தொகையைச் சரியாக அறிந்துகொள்வது மட்டுமின்றி, உணவு, உடை, உறையுள் ஆகிய அடிப்படைத் தேவைகளை எந்த அளவுக்கு எல்லோருக்கும் அளிக்கமுடியும் என்றறியவும் உதவுகிறது. நாட்டில் உணவுப் பற்றுக் குறை முதலிய தொல்லைகளால் மக்கள் வருந்தாத முறையில் சீருணவு (Ration) முதலியவற்றை வேண்டுங் காலத்துப் புகுத்துவதற்கும், விவசாயப் புள்ளியியலில் திட்டமிடப் பட்ட சோதனைகள்மூலம் புதிய முறைகளைப் பின்பற்றிப் பசுமைப் புரட்சி ஏற்படுத்தவும் புள்ளியியல் உதவுகின்றது.

கிராமம், மாவட்டம், நாடு என்று படிப்படியாக நலன்களைப் பெருக்கும் பொருளாதாரத் துறையில் புள்ளியியலின் துணையின்றி எதனையும் இயற்றமுடியாது என்ற நிலை இன்று நிலவி வருவதைக் காண்கிறோம். நாட்டின் செலவுப் பட்டியலைத் தயாரிக்கும் அதிகாரிகள் உணவு, கல்வி, உறையுள், கைத்தொழில், முதலிய பல்வேறு துறைகளின் தரத்தையும் உயர்த்தும் முறையில் செலவினை ஒதுக்கும்போது புள்ளியியல் முறையைக் கையாள்வது நாமனைவரும் அறிந்த ஒன்றேயாகும்.

மேலும் நடந்த திட்டங்களின் இலாப நட்டங்களை யறிந்து, நடக்கப்போகும் திட்டங்களில் புதுமைகளைப் புகுத்தவும், புள்ளியியல் உதவுகிறது.

நாட்டு மக்களின் உடல் நலத்தைப் பேணிப் பாதுகாக்கப் புள்ளியியலறிவு பெரிதும் தேவைப்படுகிறது. சராசரி ஆயுட் காலம், பிறப்பு- இறப்பு விகிதங்கள், எதிர்பாரா வகையில் ஏற்படும் பெருவாரி நோய்களால் தாக்கப்படுவோரின் எண்ணிக்கை,

அவர்கட்கு அளிக்கப்படும் தடுப்பு ஊசி பாதுகாப்பு முறைகளின் தன்மை, மருத்துவ நிலையங்களின் எண்ணிக்கை, குடும்பக் கட்டுப் பாட்டுப் புள்ளி விவரங்கள் போன்ற பலவகை விவரங்களின் அடிப்படையில்தான் மக்கள் நலனுக்கான சுகாதாரத்துறைத் திட்டங்கள் செயற்படமுடியும்.

மேலும், கல்வி, உளவியல், விவசாயம், வணிகம், தொழில் போன்ற பல் வகைத் துறைகளிலும் சிறப்பான விளைவுகளைப் பெற புள்ளியியல் இன்றியமையாத ஒன்றாகும்.

புள்ளியியலும் கணக்கியலும்

கூறிலிருந்து முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகளைப் பற்றிய முடிவுகளுக்கு வருவதற்குரிய புள்ளியியல் முறைகள் யாவும் நிகழ்தகவின் கணக்கியற் பண்புகளின் அடிப்படையிலேயே அமைந்துள்ளன. 17, 18ஆம் நூற்றாண்டுகளில் புள்ளியியல், அரசியல் கணிதம் (Political Arithmetic) எனவே அழைக்கப் பட்டுவந்தது. ஜேம்ஸ் பெர்னேலி, (1654—1705) என்ற பேராசிரியர் பேரினங்களின் விதியைக் கணக்கியல் வாயிலாக எடுத்துரைத்தார். பிரான்சு, இங்கிலாந்து நாடுகளிடை பிரபலமாக விளங்கிய சூதாட்டங்களின் வெற்றி தோல்விகளில், வாய்ப்பின் விளைவுகளை அறிய ஆர்வம் கொண்டு ஜேம்ஸ் பெர்னேலி, டானியல் பெர்னேலி, லாப்லாஸ், காஸ் போன்ற கணித வல்லுநர் நிகழ்தகவுக் கொள்கைகளைப் படிப்படியாகக் கண்டறிந்து, விரிவாக விளக்கம் கண்டனர். கடந்த காலத்திய ஆட்டக்காரர், ஆட்டத்தில் வெற்றியின் வாய்ப்பினை மதிப்பிட ஆவல் கொண்டது போல், இன்றைய புள்ளியியலறிஞர் ஒரு குறிப்பிட்ட கொள்கையினை ஏற்பதிலோ, ஒரு புதிய செயலை ஆற்ற முனைவதிலோ ஏற்படக் கூடிய அபாயங்களைக் குறித்து முன்னமேயே அறிய ஆர்வம் காட்டுகின்றனர். ஒரு குறிப்பிட்ட சோதனையின் வெற்றி- தோல்வி பற்றிய முடிவுக்கு வர இயலாவிடினும், பெருவாரியான சோதனை களில் என்ன நிகழும் என நிகழ்தகவின் வாயிலாக மதிப்பிட இயலும். புகழ்பெற்ற கணித வல்லுநர் டி மாவர் (De moivre, 1667—1754) கண்டறிந்த இயல்நிலை வரையே தற்காலப் புள்ளியியலில் பெரும் பங்கு வகிக்கிறது. லாப்லாஸ் (Laplace, 1749 - 1827), காஸ் (Gauss, 1777—1855) என்ற இரு அறிஞர் களும் தனித்தனியே, டி மாவரைப் போன்றே இயல்நிலை வரையின் பண்புகளுக்கு விளக்கம் கண்டனர். 1796—1874 ல் வாழ்ந்த, பெல்ஜிய நாட்டு வானியற்கலை வல்லுநரும், கணித அறிஞருமான க்யூட்லெட் (Quetlet) என்பவரது சாதனைகள் புள்ளியியலுக்குப் பெரும் அடித்தளமாக அமைந்தன. மனிதரின்

உடற் பண்புகள், உளப் பண்புகள்பற்றிய ஆராய்ச்சிகளின் முடிவில், ஒவ்வொரு நிலையிலும், மக்கட் சமூகத்தின் சராசரி பண்புகளைப் பிரதிபலிக்கக்கூடிய தன்மைகள் 'சராசரி மனிதன்'' வாழ்கிறான் என்றும், மற்ற மனிதர்களின் தன்மைகள் யாவும், இச்சராசரி மனிதனின் தன்மையிலிருந்து, கணக்கியல் ஒழுங்கு விதியோடு மாறுபடுகின்றன என்றும் கண்டறிந்தார். மனிதரின் செய்கைகள் யாவற்றிலுமே இந்த உண்மை விளங்கிடுவதை, விபத்துகள், தற்கொலைகள், கொடிய குற்றங்கள் போன்றவற்றில் கூட ஒரு வகை நிலையான தன்மை காணப்படுவதை சுட்டிக்காட்டி நிறுவினார், க்யூட்லெட். சராசரி மனிதனிலிருந்து ஏற்படும் விலக்கங்கள் ஈருறுப்புப் பரவலைத் தழுவுவதாகக் கூறிக் கணிப்புகளில் ஏற்படும் பிழைகளுக்கான நிகழ்தகவு முறைகள் புள்ளியியலுக்கும் பொருந்தும் என நிறுவினார். கிநாப் (Knapp), லெக்சிஸ் (Lexis), கால்டன் (Galton), கார்ல் பியர்ஸன் (Carl Pearson) போன்ற வேறுபல கணித வல்லுநரும் புள்ளியியலின் வளர்ச்சிக்குப் பயன் தரும் பல கணக்கியல் பண்புகளை உதவியுள்ளனர்.

சேகரிக்கப்படும் விவரங்களைப் பகுத்தாரய்ந்து, ஒப்பிட்டு, முடிவுகள் காணும் புள்ளியியல் முறைகள் அனைத்திலும் கணிதத்தின் பங்கு சிறந்ததொன்றாகும். மையப் போக்களவைகள், சிதறல் அளவைகள், ஒட்டுறவுக் கெழு, தொடர்புக்கெழுக்கள், பல்வேறு பரவல்களின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்புகள், கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல், கூறுகளின் கொள்கைகள், பரவற்படி பகுப்பாய்வு போன்ற பல பகுதிகளிலும் காணும் எண்ணற்ற அளவைகளில் கணிதத்தின் துணை கொண்டு நிறுவப்பட்ட வாய்பாடுகளும், பண்புகளுமே நிறைந்துள்ளன.

புள்ளியியலின் வரையறைகள்

பௌலி என்பவர் புள்ளியியலை 'எண்ணிக்கையின் அறிவியல்' (Science of counting) எனக் கூறுகிறார். புள்ளியியலில் பெரிதும் எண்ணிக்கை முறைகளைப் பயன்படுத்தினாலும், அவற்றோடு அதன் பணி முடிவதில்லை. பல்வேறு துறைகளிலும் சேகரிக்கப்பட்ட எண்ணிக்கை விவரங்களைக் கொண்டு மேலும் பல்வகை ஆய்வுகளும், சோதனைத்திட்டங்களும் மேற்கொண்ட பிறகே, புள்ளியியல் முறைகளின் விழுமிய முடிவுகள் பெறப்படுகின்றன. மேலும், எண்ணிக்கை முறையைப் பயன்படுத்தமுடியாத சில துறைகளில் மதிப்பீடுகளைக் கொண்டே செயற்படுகிறோம். எனவே, இவ்வரையறை சிறந்ததெனக் கொள்ளவியலாது. பௌலியே, புள்ளியியலைச் 'சராசரிகளின் அறிவியல்' (Science of averages)

என்றும் மற்றோரிடத்தில் கூறுகிறார். ஒரு இனத்தொகுதியின் தனித்த ராசிகளின் மதிப்புகளில் அதிக கவனஞ் செலுத்தாது, அதன் மையப் போக்களவையினைக் கொண்டே தொகுதி முழுமையினையும் ஆராய முயல்வது புள்ளியியலின் தன்மை யாதலால், இவ்வரையறை ஓரளவு பொருந்தும். இருப்பினும், குழுக்களின் சராசரிகளைக் காண்பதோடு நில்லாமல், ராசிகள் சராசரியிலிருந்து எவ்வளவு விலகிப் பரவியுள்ளன என அறியச் சிதறல் அளவுகளையும், பரவலின் சமச்சீரை அளக்கும் கோட்டளவைகளையும் இருமாறிகளிடை காணும் உறவை அளக்க உடன் தொடர்புக் கெழுக்களையும், இவைபோன்ற பல பண்பளவை களையும் புள்ளியியலில் கணக்கிடுவதால் "சராசரிகளின் அறிவி யல்" எனமட்டும் புள்ளியியலைக் கொள்ள இயலாது.

"புள்ளியியல் மதிப்பீடுகளையும், நிகழ்தகவுகளையும் கொண்ட தொரு அறிவியலாகும்" என போடிங்டன் (Boddington) என்பவர் கூறியுள்ளார். இவை இரண்டும் புள்ளியியலின் இருபெரும் பணிகளைமட்டுமே குறிப்பனவாதலால் இவ்வரையறை முழுமையானதன்று.

யூல் என்பவர் புள்ளியியலை, "எண்ணற்ற காரணங்களால் குறிப்பிடுமளவுக்குப் பாதிக்கப்பட்டுள்ள எண்ணிக்கை விவரங் களைக் கொண்டது," என வரையறுத்துள்ளார். இவ்வரையறை புள்ளியியலின் ஒரு தனிப்பண்பை வலியுறுத்துகிறது. சேகரிக்கப் படும் புள்ளிவிவரங்கள் பல்வேறு காரணங்களால் பெருமளவு பாதிக்கப்படுவதால், ஒரு குறிப்பிட்ட காரணியால்மட்டும் ஏற்படக் கூடிய மாற்றத்தை அளக்க, மற்றக் காரணிகளின் மூலம் ஏற்படும் மாற்றத்தைக் கட்டுப்படுத்தவேண்டியுள்ளது. எடுத்துக்காட்டாக, நெல் விளைச்சலில் ஒரு புதியரக விதை நெல் மற்றவற்றைவிடச் சிறந்ததா என ஆராய முற்படும்போது, விளைச்சலைப் பாதிக்கக் கூடிய நிலவளம், நீர்வளம், உரத்தின் அளவு, பூச்சி கொல்லி மருந்து, உழவரது கண்காணிப்பு, சாகுபடி முறை போன்ற மற்றெல்லாக் காரணிகளையும் கட்டுப்படுத்தினாலும், சிற்சில சமயம் பூச்சிகளின் தாக்குதல் ஒரு பகுதியில் மற்றப் பகுதியைவிட அதிகமாக இருக்கலாம். எனவே, மற்ற அறிவியல்களைப் போன்று சோதனைக் கூடங்களில், திறனை கட்டுப்பாட்டிற்குள் இயங்கிடும் ஆராய்ச்சிகளைப் புள்ளியலியில் மேற்கொள்ளுதல் இயலாது.

அறிந்துகொள்ள வேண்டிய ஒரு பொருள் பற்றிய விவரங்களைச் சேகரித்தல், பகுத்தாராய்தல், எடுத்துக் காட்டுதல், ஒப்பிட்டுப்பார்த்தல், விளக்கம் தருதல் ஆகிய அனைத்தும் சேர்ந்த

அறிவியலே புள்ளியியல் என வரையறுக்கிறார் செலிக்மான் என்பவர். இதில் புள்ளியியலின் பல்வேறு பணிகளும் வலியுறுத்தப் படுகின்றன.

இதுபோன்று புள்ளியியலின் விளக்கம் காணப் பல்வேறு அறிஞர்கள் வரையறைகளை வழங்கியுள்ளனர் எனினும், சீக்ரெஸ்ட் (Secrist) என்பவர் அளித்துள்ள வரையறை, இதன் தன்மைகள், பணிகள் அனைத்தையும் ஓரளவு சுருங்கச் சொல்லி விளங்க வைக்கும் திறன்படைத்ததெனப் பலராலும் ஒப்புக் கொள்ளப் படுகிறது.

சீக்ரெஸ்ட் (Secrist) என்பவரின் வரையறையின்படி, புள்ளி விவரங்கள், எண்ணற்ற காரணங்களால் பெருமளவு பாதிக்கப் படக்கூடிய, போதிய அளவு திருத்தத்துடன் சேகரிக்கப்பட்டு அல்லது மதிப்பிடப்பட்டு எண்வடிவில் எடுத்துக் கூறக்கூடிய, முன்கூட்டியே தீர்மானிக்கப்பட்ட ஒரு நோக்கத்தோடு முறையான வழியில் சேகரிக்கப்பட்டு, ஒன்றோடொன்று தொடர்பு உடையனவாக வைக்கக்கூடிய விவரங்களின் பெருந் தொகுதி யாகும்.

"Statistics, according to Secrist are aggregates of facts affected to a marked extent by multiplicity of causes, numerically expressed, enumerated or estimated according to reasonable standard of accuracy, collected in a systematic manner for a predetermined purpose and placed in relation to each other".
—*Secrist*.

புள்ளியியலின் தன்மைகள்

1. புள்ளி விவரங்கள், விவரங்களின் பெருந் தொகுதியாகும். ஒரு குறிப்பிட்ட மாணவனின் மதிப்பெண்ணோ, தொழிற்சாலையில் பணிபுரியும் தனிப்பட்ட ஒருவரின் வருமானமோ, புள்ளி விவர மாகாது.

2. புள்ளி விவரங்கள் எண்ணற்ற காரணங்களால் குறிப்பிடத் தக்க அளவு பாதிக்கப்படுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு மருந்தின் சக்தியானது, மருந்து நோயாளியின் உடலுக்குப் பொருந்தும் தன்மை, காலந்தவறாது உட்கொள்ளும் முறை, வெப்பதட்பநிலை, நோயாளியின் உணவின் தன்மை போன்ற பல காரணங்களால் பாதிக்கப்படுகிறது.

இதுபோலவே, ஒரு மாணவரது தேர்ச்சி, அவரது அறிவுக் கூர்மை, உழைப்பு, வகுப்புக்குச் செல்லும் முறை, பொருளாதார வசதி, பெற்றோர்களின் கவனிப்பு, வீட்டுச் சூழ்நிலை போன்ற காரணங்களைப் பொறுத்து அமைகிறது.

3. புள்ளியியலில் காணப்படும் விவரங்கள் அனைத்தும் எண்வடிவில்தான் கூறப்படவேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, இசைப் போட்டியில் மிகச்சிறந்தது, சிறந்தது, சாதாரணமானது, மோசமானது என்று நடுவர்கள் தீர்ப்புக் கூறுவதற்குப் பதிலாக பங்குபெற்றவர்களுக்கு உரிய மதிப்பெண்களை வழங்கி, அவற்றின் சராசரியைக் கொண்டு முடிவுக்கு வருதல் புள்ளி விவரங்களின் அடிப்படையில் அமைதலாகும்.

4. விவரங்களை மதிப்பிடும்போதோ, அல்லது சேகரிக்கும் போதோ சூழ்நிலைக்குத் தக்கவாறு ஒரு குறிப்பிட்ட அளவு திருத்தத்தை விவரங்கள் பெற்றுத்தரவேண்டும். இறக்குமதிப் புள்ளி விவரங்களில் தங்கத்தின் அளவுகளைத் தரும்போது கிராம் சுத்தமாகக் கூறுகிறோம். ஆனால், இரும்பு போன்றவற்றின் அளவுகளைத் தரும்போது இத்துணை துல்லிய அளவுகளில் கூறத் தேவை இல்லை. மேலும், எதிர்பார்க்கும் முடிவுகளின் தன்மைக்கு ஏற்றவாறும் அளவுகளின் துல்லியம் அமைகிறது.

5. புள்ளி விவரங்கள், ஒழுங்கான, திட்டமிடப்பட்ட முறையில் சேகரிக்கப்படவேண்டும்.

6. புள்ளியியல் ஆராய்ச்சிகள் நடத்தப்படும் முன்பே அவற்றின் நோக்கம் சரிவரத் தீர்மானிக்கப்படுதல் வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிட முற்படும்போது அது எந்தப் பொருளாதாரப் பிரிவிற்கு, எந்த நோக்கத்திற்காகக் கணக்கிடப்படுகிறது என்று முன்கூட்டியே அறிந்திருத்தல் வேண்டும்.

7. புள்ளி விவரங்கள் ஒன்றோடொன்று ஒப்பிடும் வகையில் பொருத்தமாக அமைதல் வேண்டும்.

புள்ளியியலின் சிறப்பு

1. கையாளுவதற்கு மிகவும் கடினமான எண்ணற்ற புள்ளி விவரங்களை, ஒரு எளிய, குறிப்பிட்ட, பாகுபடுத்தப்பட்ட வடிவில் எடுத்துக்கூறுவதற்குப் புள்ளியியல் உதவுகிறது. ஒரு கல்லூரியில் புகுமுக வகுப்பில் சேருவதற்காக வரும் 2000 விண்ணப்பங்களில் காணப்படும் மதிப்பெண்களை அப்படியே எடுத்து எழுதிக்

கிடைக்கும் 2000 எண்களைக் கொண்டு எத்தகைய முடிவுக்கும் வர இயலாது. இதனையே மதிப்பெண்களின் அடிப்படையில் 450-க்கு மேல், 400-450, 350-400 300-350, 300-க்குக் கீழ் எனப் பல பிரிவுகளாகப் பிரித்து, அட்டவணைப்படுத்துதல் மூலம் மாணவரின் தரத்தை நன்கு புரிந்துகொண்டு, அதற்கேற்ப, கல்லூரியில் வெவ்வேறு துறைகளில் இடம்தர இயலும்.

" By the use of statistics we obtain from millards of facts the grand average of the world" என்ற கூற்றிற்கேற்ப எண்ணற்ற விவரங்களிலிருந்து புள்ளியியல் முறையைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம், ஒரு தெளிவான மையமதிப்பைப் பெற இயலுகிறது.

2. மக்களின் பொது அறிவுத்திறனைப் பெருக்கப் புள்ளியியல் பெரிதும் உதவுகிறது. பொதுவாகப் பல்வேறு துறைகளில் உள்ள விவரங்களைப் பற்றி அறிந்துகொள்ள மக்கள் பெரிதும் ஈடுபாடு காட்டுவதில்லை. ஆனால், இவற்றையே நன்கு பாகுபடுத்தப்பட்ட பட்டியல்களிலோ, கவனத்தை ஈர்க்கும் வகையில் அமைக்கப்பட்ட படங்களிலோ எடுத்துக் கூறினால், அவற்றை அறிந்து கொள்ளுவதில் பெரிதும் ஆர்வம் காட்டுகின்றனர். எடுத்துக் காட்டாக, ஏற்றுமதி, இறக்குமதி விவரங்கள், நாட்டின் வரவு செலவுத்திட்டங்கள், மக்கட்தொகைப் பெருக்கம் போன்ற செய்திகள் புள்ளியியல் அடிப்படையில் தரப்படும்போது, அவற்றை எளிதில் புரிந்துகொள்வதோடு, நீண்ட நாள் கருத்திலும் கொள்ள இயலும்.

" Statistics enables one to enlarge his horizon "- என்பதற் கொப்ப, ஒருவரது அறிவின் தொடுவானத்தை மென்மேலும் விரிவாக்கப் புள்ளியியல் உதவுகிறது.

3. புள்ளியியல் விவரங்களை ஒப்பிடுவதற்கான வழிகளைத் தருகிறது. பல்வகைச் சராசரிகள், விகிதங்கள், வரைபடங்கள், கெழுக்கள், விளக்கப் படங்கள் இவற்றின் மூலமாக, விவரங்களை எளிதில் ஒப்பிட இயலுவதோடு அவற்றைச் சரியான கோணத்தில் எடையிட்டு முடிவு காணவும் முடிகிறது. பல்வேறு நாடுகளின் தனி நபர் வருமானம் (income per capita), சராசரி ஆயுட் காலம், வேலையில்லாத் திண்டாட்டத்தின் அளவு போன்றவற்றை ஒப்பிடுவதற்குப் புள்ளியியல் அளவுகள் பயன்படுவதோடு, பொருளாதார, சமூக,வர்த்தக, அரசியல் துறைகளில் முன்னேற்றம் காணுவதற்கும் உதவுகிறது.

4. புள்ளியியல், மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பைக் கண்டறிய உதவுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, உற்பத்தி, விலைவாசி, மக்கட் பெருக்கம், வேலையில்லாத் திண்டாட்டம் முதலானவை ஒன்ருேடொன்று தொடர்புடைய மாறிகளின் இடையே உள்ள உடன் தொடர்புக் கெழுக்களை கணக்கிடுவதோடு, ஒரு மாறியின் மதிப்பு தரப்பட்டு இருக்கும்போது, மற்ருென்றின் மதிப்பீட்டை அறியவும் வழிகோலுகிறது.

5. புள்ளி விவரங்களின் அடிப்படையில் சரியான முடிவுகளுக்கு வருவதற்குப் புள்ளியியல் உதவுவதால் இதனை 'எண்களின் தர்க்க சாஸ்திரம்' (logic of figures) என்றும் கூறலாம். கடந்த காலத்திய புள்ளி விவரங்களைப்பகுப்பாய்வுக்கு உட்படுத்தும்போது, வருங்காலத்தில் அவற்றின் மதிப்புகளை ஓரளவு துல்லியமாக மதிப்பிடமுடியும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு தொழிற்சாலையின் இலாபங்களின் காலத் தொடர் வரிசையின் போக்களவைகளை (trend valves) அறிவதன்மூலம், கடந்த காலத்தின் வரலாறு கொண்டு, எதிர்காலத்தைப் பற்றி முன்கூட்டியே அறிந்து திட்டமிட வழிகோலுகிறது.

6. எதிர்காலத்தில் மேற்கொள்ளவேண்டிய திட்டங்களைத் தீர்மானிக்கவும், கொள்கைகளை உருவாக்கவும், தொழில் வல்லுநர்களுக்கும் உயர் அதிகாரிகளுக்கும் புள்ளி விவரங்கள் பயன்படுகின்றன.

7. உயிரியல், மருத்துவவியல், விவசாயவியல், பொருளியல், வானியல், வேதியியல், வளியியல் போன்ற பல்வகை அறிவியல் துறைகளுக்கும் புள்ளியியல் ஆராய்ச்சிகள் இன்றியமையாதனவாக இருக்கின்றன.

" Sciences without statistics bear no fruit, statistics without sciences have no root "-என்ற கூற்றின்படி அறிவியல் ஆராய்ச்சிகளின் வெற்றிக்கு அடிப்படையாக அமைவது புள்ளியியல் முறையேயாகும்.

புள்ளியியலின் குறைகள்

1. எண்ணிக்கையில் வலியுறுத்தக்கூடிய விவரங்களை மட்டுமே புள்ளியியலில் கருத இயலும். அறிவுத்திறன், உடல் நலம், பண்பாடு, நட்பு, அழகு போன்ற பண்புகளை நேரடியாக ஆய்வு செய்யப் புள்ளியியல் பயன்படாது. இரு மாணவரது அறிவுத்திறனை ஒப்பிடவேண்டுமானுல், எண்வடிவில் அவர்களது

அறிவுக் கூர்மை எண்களையோ, அல்லது 10 தேர்வுகளில் அவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் சராசரிகளையோ ஒப்பிட்டுப் பார்த்துத்தான் கூற இயலும்.

2. தொகுதியின் சராசரி மதிப்பில் மட்டுமே புள்ளியியல் கவனஞ் செலுத்துகிறது. இந்நிலையில் தனிப்பட்ட மதிப்புகளின் சிறப்புத் தன்மைகள் வெளிப்பட இயலாது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு நகர்ப்பகுதியில் வாழ்வோரது சராசரி மாத வருமானம் அங்கு வாழும் ஒரு சில பெருஞ் செல்வர்களால் ரூ. 350 ஆக உயரலாம். ஆனால், அதே பகுதியில் மாதம் ரூ. 50க்குக் கீழும் வருமானமுடைய 4 குடும்பங்கள் இருக்கலாம். கணக்கில் மிகத் தேர்ச்சி பெற்ற ஒரு சில மாணவரால் வகுப்பின் சராசரி 52 ஆக உயர்ந்திருக்கலாம். ஆனால், அதைக் கொண்டு 3, 7 என ஓரிலக்க மதிப்பெண் வாங்கும் மாணவரைப்பற்றி, ஆசிரியர் கவலை கொள்ளாமல் இருக்க முடியாது.

3. புள்ளியியல் மற்றைய அறிவியல்களைப்போன்று, துல்லிய மானதன்று. பல்வேறு காரணங்களால் பாதிக்கப்படும் விவரங்களை ஆய்வு செய்வதன்மூலம் இதன் முடிவுகள் பெறப்படுவதால், சோதனைச் சாலையில், குறிப்பிட்ட கட்டுப்பட்ட நிலைகளில் நடத்தக் கூடிய பொருளியல், வேதியியல் ஆய்வுகளின் முடிவுகளைப்போல் துல்லியமான முடிவுகளைப் பெற இயலாது. புள்ளியியல் கூற்றுகளை முற்றிலும் சரியான கூற்றுகளாகக் கொள்ளாது, சிறந்த மதிப்பீடுகளாகத்தான் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

4. கூறுகளைத் தேர்ந்தெடுத்து அவற்றை ஆராய்வதின்மூலம் அவை எடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகளைப்பற்றி மதிப்பிடுகிறோம். நாம் தேர்ந்தெடுக்கும் கூறுகள் ஒருதலைச் சார்புடையனவாயின், முடிவுகள் சரியானவையாயிரா. எடுத்துக் காட்டாக, ஒரு மாநிலத்திலுள்ள கிராம மக்களின் வாழ்க்கைத் தரத்தில் பல திட்டங்களால் ஏற்பட்ட மாற்றத்தினை அறிய முற்படுகையில், திட்டங்களால் நல்ல பயன் பெற்ற 50 கிராமங்களை மட்டும் கொண்ட கூறையெடுத்தால் அது உண்மை நிலைக்கு மேம்பட்ட முன்னேற்றத்தையும், திட்டங்கள் அதிக கவனஞ் செலுத்தாத கிராமங்களைமட்டும் கொண்ட கூறிலிருந்து உண்மை நிலையைவிடக் குறைவான முன்னேற்றத்தையுமே சுட்டிக்காட்டக் கூடும். இவை இரண்டுமே ஒருதலைச் சார்புடைய கூறுகளாகும்.

5. புள்ளியியல் விவரங்களை அவற்றிற்குரிய சரியான சூழ்நிலைகளிலேயே ஆராய்ந்து முடிவுகாண வேண்டும்.

6. புள்ளியியல் ஒரு நுட்பமான கருவியாகும். அதனை வல்லுநர்களும், திறன்படைத்தவர்களுமே சிறந்த முறையில் கையாள இயலும்.

புள்ளி விவரங்களின்மீது நம்பிக்கை இன்மை

சேகரிக்கப்படும் புள்ளி விவரங்களைவிட அவற்றைச் சரியான முறையில் ஆராய்ந்து, அவற்றிலிருந்து பெறப்படும் முடிவுகளே முக்கியமானவை. பொது மக்களின் அறியாமையாலும் குறிப்பிட்ட நோக்கமுடைய ஆய்வாளர் தவருகக் கையாளுவதாலும் இப் பயனுள்ள அறிவியல் பெரிதும் குற்றஞ்சாட்டப்படுகிறது.

மார்க் ட்வெயின் (Mark Twain) என்பவர் பொய்களைத் தரம் பிரிக்கும்போது, 'பொய், முழுப்பொய், புள்ளியியல்' என்று கூறிப் புள்ளியியலைக் கைதேர்ந்த பொய்களின் நிலைக்கு உயர்த்தி விடுகிறுர். " There are three kinds of lies, lies, damned lies and statistics " மேலும் " புள்ளியியல் முறைகள் கொண்டு எதனையும் நிறுவலாம் " என்ற இழிவான கருத்துக் கொண்டு புள்ளியியலைக் குறை கூறுவோரும் உள்ளனர்.

அவற்றிற்குரிய அடிப்படைச் சூழ்நிலைகளிலிருந்து பிரித்துப் புள்ளி விவரங்களைத் தனியே கையாளும்போதும், ஒரு பகுதிக்கே பொருத்தமான முடிவுகளை முழுத்தொகுதிக்கும் விரித்துக் கூறும் போதும், ஒரு குறிப்பிட்ட கருத்து அல்லது முடிவுக்கு வருவதற்குப் பக்கபலமாக உதவிடும் புள்ளிவிவரங்களை மட்டும் தேர்ந்தெடுத்துக் கொண்டு, அவற்றின் மற்ற பக்கத்தை ஆராயாது புறக்கணித்து விடும்போதும், தவருன முறையில் விவரங்கள் சேகரிக்கப்பட்டு, அறிவியலின் அடிப்படையில் பாகுபடுத்தி ஆராயாத நிலையிலும் ஒரு தவருன கூற்றை நிறுவுவதற்குக்கூடப் புள்ளியியலைப் பயன் படுத்திப் பெரும்பாலோர் வெற்றியும் காணுகின்றனர் !

எடுத்துக்காட்டாக " ஒரு நகரில் அம்மை நோய் தடுப்பு ஊசி குத்திக்கொண்டவரில் 10,000 பேர் நோயினுல் இறந்துவிட்டனர். எனவே, " தடுப்பு ஊசி பயனற்றது" என்பது புள்ளியியல் அடிப்படையில் தவருன கூற்ருகும். ஏனெனில், தடுப்பு ஊசி போட்டுக்கொள்ளத் தவறிய மக்களில் எத்தனை சதவீதம் இறந்து போனுர்கள் என்ற விவரம் நமக்குத் தரப்படவேயில்லை.

செய்தித்தாள்களில் வரும் விளம்பரங்களில், மக்கள் கவனத்தை ஈர்ப்பதற்காகப் புள்ளி விவரங்கள் சிற்சிலபோது திரித்துக் கூறப்படுகின்றன. " எங்கள் நிறுவனத்தின் பற்பசையை

நூற்றுக்கு 95 பேர் பயன்படுத்துகின்றனர்" என்ற கூற்று, நிறுவனத்தில் பணிபுரிவோர் அல்லது அப் பற்பசையைக் குறைந்த விலைக்கு வாங்கக்கூடிய வசதி படைத்தோர் போன்றோரில் 95 %க்குப் பொருந்தலாம். ஆனால், இதனையே மக்கட்தொகுதி முழுமைக்கும் விரித்துக் கூற இயலாது.

"சென்ற ஆண்டைவிட இவ்வாண்டு எங்கள் தொழிற்சாலையில் 15% ஊதிய உயர்வு தரப்பட்டுள்ளதால் பொருளாதார நெருக்கடி எங்கள் தொழிலாளரை ஒரு சிறிதும் பாதிக்காது" எனப் பெருமையாகக் கூறிடும் அதிபர், விலைவாசி ஒரேயடியாக 24 சதவீதத்தில் ஏறியுள்ளதைக் குறிப்பிடத் தவறிவிடுகிறார்.

"25000 ரூ. க்கு, 1000 ச. அடி கட்டடப்பகுதியுள்ள வீட்டை நானே கட்டினேன். அதே 1000 ச. அடிக்கு மற்றொரு கட்டடம் கட்ட 40,000 ரூ. வேண்டுமென்று ஒரு பொறியர் கேட்கின்றார்" என்று எளிதில் கூறிவிடலாம். ஆனால் முதலில் கட்டப்பட்டுள்ள வீடு 1960-ல் என்றும், இன்று கட்டப்போகும் வீடு ரூபாய்க்கு 36 பைசாவே மதிப்புகொண்ட 1973-ல் என்றும் முழுமையான விவரங்கள் தரப்பட்டிருந்தால், பொறியர் குறைவாகவே கேட்டுள்ளார் எனக்கூடக் கூறலாம்!

"புள்ளியியல் ஒரு களிமண் போன்றது. அதனைக் கொண்டு தெய்வத்தையும் உருவாக்கலாம்; பூதத்தையும் உருவாக்கலாம்" என்ற கூற்றின்படி, பயனுள்ள கருவியாகிய புள்ளியியலை நன்முறையில் பயன்படுத்தினால் மிகச் சிறந்த முடிவுகளும் நன்மைகளும் ஏற்படும். அவ்வாறின்றி இவ்வறிவியலின அடிப்படைத் தத்துவங்களை அறியாதவர்களும், தன் சொந்த நோக்கத்திற்காகக் கையாள முற்படுவோரும், புள்ளி விவரங்களைத் தவறான முறையில் பயன்படுத்தினால் முடிவுகள் உண்மைக்குப் புறம்பானவையாக இருப்பதில் வியப்பில்லை. "எய்தவனிருக்க அம்பை நோவதா?" என்றபடி, இது எந்த வகையில், இச் சிறந்த அறிவியலின் குற்றமாகும்?

புள்ளியியலின் அடிப்படை விதிகள்

புள்ளியியல் ஒழுங்கு நியதி (Law of Statistical Regularity): ஒரு கட்டடத்தின் சிறிய புகைப் படத்தையும், அதன் பெரிதாக்கப் பட்ட (enlarged size) பிரதியையும் ஒப்பிடும்போது, பெரிய படத்தில் காணப்படும் எல்லா அம்சங்களும் சிறிய படத்திலும் ஒன்றுகூட விடாமல் இருக்கும். அவை அளவில் மட்டுமே மாறுபடும்; இதுபோன்றே சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்

பட்ட ஒரு கூறு, முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகள் அனைத்தையும் பிரதிபலிக்கிறது. அதாவது, கூறிலுள்ள ராசிகளின் தன்மையும், முழுமைத் தொகுதியின் பொதுத் தன்மையும் ஓர் ஒழுங்கு நியதியில் அமைகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, 25 வயதுடைய ஆண்களில், ஒவ்வொன்றிலும் 100 பேர் அடங்கிய இரு சமவாய்ப்புக் கூறுகளை எடுத்துக்கொள்ளுவோம். இவ்விரு கூறுகளின் சராசரி உயரத்தைக் கணக்கிட்டால் அவை பொருட்படுத்தும் அளவிற்கு மாறுபடா; சிறிதளவே வேறுபாடு இருக்கும். கூறிலுள்ள எண்ணிக்கை 100 லிருந்து 1000-ஆக மாறினால் இரு கூறுகளின் சராசரி உயரங் களுக்கு இடையே உள்ள வேறுபாடு குறைவதுடன், முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியையும் அவை நெருங்கி இருக்கும்.

தனிப்பட்ட இரு நபர்களின் உயரங்களுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடு மிகையாக இருக்கலாம். ஆனால், பெரும் எண்ணிக்கை உடைய ராசிகளின் போக்கிலே ஓர் நிலைத் தன்மை அல்லது ஒழுங்கு முறை காணப்படுகிறது. ஒரு குறிப்பிட்ட நபர் 65 வயது வரை உயிர் வாழ்வார் என நம்மால் கூறவியலாது. ஆனால், ஒரு இலட்சம் அல்லது ஒரு கோடி மனிதர்களை எடுத்துக்கொண்டு அவர்களில் 65 வயதுவரை வாழ்வோரது விகிதத்தை ஆயுட் பட்டியல் துணை கொண்டு முன்கூட்டியே கூறினால், அதில் பெரும்பாலும் தவறு ஏற்படாது. இதையொட்டியே உயிர் ஒப்பந்த (Life Insurance) கழகங்கள், தங்கள் சந்தாதாரர்கள் நடுவிலேயே இறந்துபோனால் பெரும் தொகையை ஈடாகக் கொடுக்க நேரிடினும் ஆயுட் பட்டியலைப் (Mortality table) பயன்படுத்திச் சந்தாக்களைக் கணக்கிட்டு, பெருவாரியாக இலாபத்தையே பெறுகின்றன. இவ்வாறே விவசாயப் புள்ளியியலில் நவீன சாகுபடித் திட்டங்கள் அவற்றின்மூலம் கிடைக்கக் கூடிய விளைச்சலைப் பற்றிய அனுமானங்கள் பெரும்பாலும் சரியானவையாகவே இருக்கும். எனவே தனிப்பட்ட ராசிகளின் குறிப்பிடத்தக்க மாற்றம் ஏற்படுவது ஒழிய, வாழ்க்கையில் பொதுவாக எல்லா நிகழ்ச்சி களிலும் ஓர் பொது ஒழுங்குத் தன்மை நிலவும் தன்மையால், முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகளனைத்தையும் அறிந்துகொள்ளக் கூறு எடுத்தல் ஒரு பயனுள்ள கருவியாக விளங்குகிறது.

பேரெண்களின் மாறுப்பொதுமை (Law of Inertia of Large Numbers)

இதனைப் புள்ளியியல் ஒழுங்கு நியதியின் கிளைத் தேற்ற மாகக் கொள்ளலாம். சிறதளவே எண்ணிக்கையுடைய தொகுதி களைவிட மிகப் பெருமளவு எண்ணிக்கையுடைய தொகுதிகளின் ராசிகளில் நிலைப்புத் தன்மை அல்லது மாறாத் தன்மை

அதிகம் காணப்படுகிறது. ஏனெனில், பெரும் தொகுதியிலுள்ள ராசிகளில் ஒரு சிலவற்றின் மதிப்புகள் சராசரியைவிட அதிகமாக இருந்தால், அவற்றிற்கு ஈடு செய்வதைப்போல் வேறு சில ராசி களின் மதிப்புகள் குறைவாக இருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக, ஆயிரம் மாணவர்கள் அடங்கிய புகுமுக வகுப்பில் இரு தேர்வு களின் மதிப்பெண்களை ஒப்பிடும்போது, 10 மாணவர்களது சராசரி மதிப்பெண் முதல் தேர்வைவிட 2-ஆவது தேர்வில் 20 வரை அதிகரித்து இருக்கலாம். ஆனால் 10 மாணவர்களுக்குப் பதிலாக 100 அல்லது 200 மாணவர் அடங்கிய கூறுகளின் சராசரிகளைக் கணக்கிட்டால் அவற்றின் சராசரி மதிப்பெண் சிறிதளவே அதிகரித்து இருக்கும். இதுபோன்றே, ஒரு நாணயத்தை 10 முறை வீசினால் தலைகளில் எண்ணிக்கை 6 அல்லது 7 கூடக் கிடைக்கலாம். ஆனால், 100, 1000, 10,000 எனச் சோதனைகளின் எண்ணிக்கையை அதிகரித்துக் கொண்டே சென்றோமானால், தலைகளின் விகிதம் ·58, ·52, ·507 எனக் கணக்கியல் விகிதம் ·5-ஐ நெருங்குவதைக் காணலாம். எனவே, கூறுகளின் அளவுகள் பெரிதாக, பெரிதாகக் கூறுகளுக்கு இடையேயும், கூறுகளுக்கும் முழுமைத் தொகுதிக்கும் இடையேயும் உள்ள வேறுபாடு குறைகிறது.

புள்ளியியல் ஆய்வின் முதற்படி விவரங்களைச் சேகரித்தல் ஆகும். விவரங்களைப் பெறுவதற்கு நன்கு திட்டமிடப்பட்ட அமைப்பை ஒவ்வொரு ஆய்வாளரும் பின்பற்றவேண்டும். சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களைப் பொறுத்தே புள்ளியியல் ஆய்வின் வெற்றியமைவதால், விசாரணையில் ஏற்படக்கூடிய பல்வேறு சிக்கல்களையும் முன்கூட்டியே அறிந்து, அவற்றிற்கான தீர்வு களையும் காணுதல் வேண்டும். ஒரு விசாரணையை மேற்கொள்ளும் போது, முக்கிய கட்டங்கள் கீழ்வருமாறு.

(i) விசாரணையைத் திட்டமிடுதல்.
(ii) வினாப்பட்டியல்களைத் தயாரித்தல்.
(iii) கூறைத் தேர்ந்தெடுத்தல்.
(iv) விவரங்களைச் சேகரித்தல்.
(v) சேகரித்த விவரங்களைச் சரிபார்த்து முறைப்படி அமைத்தல்.
(vi) விவரங்களைப் பாகுபாடு செய்து, அட்டவணைப்படுத்தல்.
(vii) பட்டியல்களிலும், விளக்கப்படங்களிலும் விவரங்களை எடுத்துக் கூறுதல்.
(viii) விவரங்களை ஆய்ந்து விளக்கம் காணுதல்.

(i) **விசாரணையைத் திட்டமிடுதல்**

(அ) விசாரணையின் நோக்கத்தையும் செயற் பரப்பையும் நிர்ணயித்தல்.

ஆ விசாரணையின் தன்மை,முறை இவற்றைநிர்ணயித்தல்.

(இ) புள்ளியியல் அலகுகளை வரையறுத்தல்.

(ஈ) தேவைப்படுகின்ற அளவுகளின் துல்லியத்தைத் தீர்மானித்தல்.

என்ற 4 பிரிவுகள் விசாரணையைத் திட்டமிடுதலில் அடங்கும்.

விசாரணையின் நோக்கம்

விசாரணையின் நோக்கம் முன்கூட்டியே திட்டவட்டமாகத் தீர்மானிக்கப்படுவதோடு, எவற்றைக் கொள்ளவேண்டும், எவற்றைத் தள்ளவேண்டும் என்பதையும் ஆய்வாளர் நன்கு அறிந்திருந்தால் காலம், பணம் இவை விரயமாவதைத் தடுப்ப தோடு சரியான விவரங்களைச் சேகரிக்கவும் முடியும். எடுத்துக் காட்டாக, கல்லூரி மாணவரது மாதாந்திரச் செலவைப் பற்றிய ஆய்வை எடுத்துக்கொண்டால் ஆய்வில் கலை, அறிவியல் மாணவர்கள் மட்டுமின்றித் தொழிற் கல்லூரி மாணவரையும் எடுத்துக் கொள்வதா, மாணவரது கல்விச் செலவு தவிர விடுதிச் செலவுகளையும் சேர்த்துக் கொள்வதா என்ற பல்வேறு நிலைகளையும் பற்றிய முடிவுக்கு முன்கூட்டியே வருதல் வேண்டும்.

விசாரணையின் முறையையும் தன்மையினையும் நிர்ணயித்தல்

விசாரணையின் நோக்கத்தை வரையறுத்தவுடன் தேவையான விவரங்களை அறிந்து, எவ்வாறு சேகரிக்கவேண்டும் எனத் தீர்மானிக்க வேண்டும்.

1. **முதல் நிலை அல்லது இரண்டாம் நிலை முறை** (Primary or Secondary Method) : தேவையான புள்ளி விவரங்களை முதன் முறையாக விசாரணை நடத்திச்சேகரித்தல் முதல் நிலை முறையாகும். இரண்டாம் நிலை முறையில் ஏற்கெனவே வேறு விசாரணைக்காகச் சேகரிக்கப்பட்ட பதிவேடுகளிலும், அலுவலகங்களின் வெளியீடு களிலும்காணப்படும் விவரங்களை நமது தேவைக்குப்பயன்படுத்திக் கொள்கிறோம்.

2. **அரசு அல்லது தனியார் கணக்கெடுப்பு** : மாநில,மத்திய அரசுகளால் சட்டத்தின் வாயிலாக ஆணையிடப்பட்டு மக்களிட மிருந்து விவரங்களைப் பெறும் விசாரணைகள் ஓரளவு திறமை

வாய்ந்தவையாக இருக்கும். மக்கட் கணிப்பு, உணவுப் பங்கீடு அட்டைகள், வாக்காளர் பட்டியல் ஆகிய இவற்றை எடுத்துக் காட்டுகளாகக் கூறலாம். தனியார் வர்த்தகத்தொழில் நிறுவனங்கள், ஆராய்ச்சி வல்லுநர்கள் மேற்கொள்ளும் விசாரணைகள் முதலில் விசாரணைகளின் வெற்றி மக்களின் ஒத்துழைப்பைப் பொறுத்தே அமையும்

3. முழுக்கணிப்பு அல்லது மாதிரிக் கணிப்பு: விசாரணையில் அடங்கியுள்ள ஒவ்வொரு நபரிடம் இருந்து விவரங்களைப் பெறுதல் முழுக் கணிப்பு முறை ஆகும். இதன்மூலம் முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள எல்லோரிடம் இருந்தும் விவரங்களைப் பெறமுடிந்தாலும் ஆகும் பொருட் செலவும் காலச் செலவும் அதிகம். இதற்கு மாறாக முழுமைத் தொகுதியைப் பிரதிபலிக்கக்கூடிய, சில நபர்கள் அடங்கிய ஒரு சிறு பகுதி அல்லது கூறினை எடுத்துக் கொண்டு, விவரம் சேகரித்தல் கூறு முறையாகும்.

நேரடி விசாரணை அல்லது தபால்மூலம் விசாரணை

நேரடி விசாரணையில் ஆய்வாளரோ அல்லது அவரால் நியமிக்கப்பட்ட கணிப்பாளர்களோ விவரங்களை மக்களுடன் நேரடியாகத் தொடர்பு கொண்டு சேகரிப்பதால் அவ்வப்போது ஏற்படும் குறைகள் நீக்கப்படுவதால் இது சிறந்ததாக அமைகிறது. தபால் மூலம் வினாப்பட்டியல் பிரதிகளை அனுப்பியும் மக்களிடம் இருந்து விவரங்களைப் பெறலாம். நேரடி விசாரணையில் காலம், பொருட் செலவு அதிகம். பெருமளவு பெரிய விசாரணைகளை இம்முறையில் நடத்த இயலாது. ஆனால், தபால்மூலம் எல்லா வினாப் பட்டியல்களும் சரியாக விடையளிக்கப்பட்டுத் திரும்பிவரும் என்ற உறுதி கிடையாது. சிலபோது விசாரணைகள் வெளிப்படையாக மக்கள் எல்லோரும் அறியும் வகையில் இருக்கலாம். அல்லது குறிப்பிட்ட ஒரு சாரார்க்கு மட்டுமே தெரிந்த ரகசிய விசாரணைகள் வழக்கமாக ஒவ்வொரு குறிப்பிட்ட கால எல்லையில் நடக்கும் ஒழுங்கான விசாரணை (Regular Inquiry) ஆகும். வாழ்க்கைத் தரக் குறியீட்டெண்ணை நிர்ணயிப்பதற்காக மாதாந்திர விலைவாசி விவரங்களைச் சேகரித்தல், மற்றும் சில தேவைப்படும் நேரங்களில் மட்டுமே மேற்கொள்ளக் கூடிய விசாரணைகளாக அமைகின்றன. (எ கா.) பட்டதாரிகளில் வேலையற்றோரது புள்ளி விவரங்களைச் சேகரித்தல்.

புள்ளியியல் அலகுகளை வரையறுத்தல்

புள்ளியியல் விசாரணைகளில் சேகரிக்கப்படுகின்ற விவரங்கள் எந்த அளவுகளில் வலியுறுத்தப்படுகின்றனவோ, அவையே

அலகுகள் ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக, ரூபாய், மீட்டர், டன் போன்ற அலகுகள் சாதாரண அலகுகள் (Simple units) எனப்படும். புள்ளியியல் அலகுகள் தனிரகமானவை. எடுத்துக் காட்டாக, ஒரு மாநிலத்திலுள்ள பஞ்சாலைகளின் தன்மையைப் பற்றிய விசாரணையில் பஞ்சாலைகள் தன்மை, அவற்றில் முதலீடு செய்யப்படும் தொகை, தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை, மொத்த உற்பத்தி, ஒவ்வொரு ஆண்டின் சராசரி லாபம் போன்று பல வழி களில் அளக்கப்படலாம். ஆய்வாளர் இவற்றில் ஏதேனும் ஒரு வழியைப் பின்பற்றித் தேவையான விவரங்களைச் சேகரித்தல் வேண்டும். தொழிலில் ஈடு செய்த முதலையோ அல்லது வருடாந்திர லாபத்தையோ கணக்கிடுவதாகக்கொண்டால் 100 ரூபாய்ஆகவோ அல்லது 1000 ரூபாய் ஆகவோ எடுத்துக் கொள்ளப்படலாம். தொழிலாளரது எண்ணிக்கையின் அடிப்படையாக இருப்பின் ஒவ்வொரு தொழிலாளியையும் ஒரு புள்ளியியல் அலகாகக்கொள்ள வேண்டும். உற்பத்தி அளவு அடிப்படையாயின் அலகுகள் டன் களாகும். எனவே, இப்புள்ளியியல் அலகு விசாரணைக்கு ஏற்ற தாகவும், எளிதில் புரிந்துகொள்ளக் கூடிய அளவிற்குத் தெளிவான தாகவும், விசாரணை முழுவதும் ஒரே மாதிரியானதாகவும், ஒப்பிடு வதற்குத் தக்கவாறு விசாரணை முழுவதும் ஒரே அலகுகளைக் கொண்டதாகவும் இருக்கவேண்டும்.

அளவுகளில் தேவையான துல்லியத்தை வரையறுத்தல்

அளக்கப்படும் பொருட்களின் தன்மைக்கேற்ப அலகுகளின் துல்லியம் மாறுபடுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, இரு தொழிற்சாலை களின் வருமானங்களை ஒப்பிடும்போது 100 ரூபாய்க்குச் சுத்தமாகக் கணக்கிட்டால் போதுமானது. ஆனால், இரு குடும்பங்களின் வருமானங்களை ஒப்பிடும்போது ரூபாய்க்குச் சுத்தமாகக் கூறுவதே நல்லது.

வினாத்தொகுதி அல்லது வினாப்பட்டியல்களை அமைத்தல் : தேவையான விவரங்களை விடைகளின் வடிவில் சேகரிப்பதற்கான பல்வேறு வினாக்களைக் கொண்டதே வினாப்பட்டியல் ஆகும். வினாப்பட்டியல் நன்கு திட்டமிடப்பட்டு, பயனுள்ள, ஒன்றோடு ஒன்று தொடர்புள்ள வினாக்களைக் கொண்டதாக, சுருக்கமான பட்டியலாக அமையவேண்டும்.

ஒரு வினாப்பட்டியலில், விவரங்களைத் தருவோரிடம் கேட்கப் படும் வினாக்களுக்குரிய விடைகளை ஆய்வாளரே பதிவு செய் வதற்காகக் காலி இடம் விடப்பட்டுள்ளது. வினாத்தொகுதி

நேரிலோ அல்லது தபால்மூலமோ அனுப்பப்பட்டு விவரங்களைப் பெறுபவர், தாமே அதில் எழுதத் தக்கவாறு அமைகிறது.

வினாப்பட்டியலைத்தயாரிக்கும் போது பின்வரும் பொதுவான விதிகளைக் கருத்தில் கொள்ளவேண்டும்.

(i) வினாக்கள் புரிந்துகொள்வதற்கு எளியனவாயும், சுருக்கமானவையாயும் இருக்கவேண்டும். நீண்ட வினாக்களோ, அல்லது கடின சொற்களைக்கொண்ட வினாக்களோ பொது மக்களால் புரிந்துகொள்ள இயலாது.

(ii) ஆம், இல்லை என்பன போன்ற சுருக்கமான விடைகளைக் கொண்ட வினாக்கள் விரும்பத்தக்கவை.

(iii) வினாக்கள் ஒன்றையொன்று தழுவி முறையாக அமைதல் வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக, கல்லூரி மாணவரது மாதாந்திர செலவைப் பற்றிய ஆய்வில் மாணவர் படிக்கும் கல்லூரி, வகுப்பு, கல்லூரிக்கான கட்டணம், விடுதிச் செலவு, பிரயாணச் செலவு, உடைச் செலவு, புத்தகச் செலவு, பொழுதுபோக்குச் செலவு என்பன போன்ற பல்வகை விவரங்கள் ஒன்றோடொன்று தொடர்புடைய வினாக்களாக அமைதல் வேண்டும்.

(iv) வினாக்கள் ஒருவரது அந்தரங்கங்களை அறியும் ஆர்வமற்றவையாயும், மதம், சாதி, குலம் இவை பற்றி ஆராயும்போது மனக்கசப்பு தரத்தக்க வினாக்களாயிராமலும் இருத்தல் வேண்டும்.

(v) வினாக்களைப் பற்றிய தேவையான விளக்கங்கள் பெறுவதற்கு அடிக்குறிப்புகள் தரப்படலாம். வினாப்பட்டியலில் கேட்கப்படும் விவரங்கள் வேறு எவரிடமும் எடுத்துக் கூறப்படமாட்டா என்றும், அவை ரகசியமாகப் பாதுகாக்கப்படும் என்றும் குறிப்புத் தரப்படுமாயின் மக்களிடமிருந்து சிறந்த முறையில் விடைகளைப் பெறலாம். சில ஆய்வுகளுக்கான மாதிரி வினாப்பட்டியல் நூலின் பிற்பகுதியில் தரப்பட்டுள்ளன.

விவரங்களைச் சேகரித்தல்

முதனிலை விவரங்கள் (Primary Data)

ஆய்வாளர் நேரடியாகவோ, அல்லது தமது உதவியாளர் மூலமாகவோ ஒரு குறிப்பிட்ட ஆய்விற்காக மட்டும் முதன்முதலில் சேகரிக்கும் விவரங்களே முதனிலை விவரங்களாகும். இவற்றைக் கீழ்க்காணும் மூன்று வழிகளில் பெறலாம்.

(i) ஆய்வாளரின் நேரடி விசாரணை.

(ii) தபால் மூலமாக வினுப்பட்டியல்களை அனுப்பி விடைகளைப் பெறுதல்.

(iii) உதவியாளர்கள்மூலம் வினுப்பட்டியலை அனுப்பி விவரங்களைச் சேகரித்தல்.

மிகவும் நுட்பமான ஆராய்ச்சிகளுக்கும், ஒரு சில நபரேயடங்கிய சிறுதொகுதிக்கும் ஆய்வாளரே நேரடியாக விவரங்களைப் பெறலாம். ஆய்வாளரின் நேரடிப் பார்வையில் விவரங்கள் சேகரிக்கப்படுவதால் அவை சிறந்தவையாகவும், தரமுடைய தாகவும் அவ்வப்போது ஏற்படும் சந்தேகங்களைத் தீர்த்து சரியான விவரங்களைத் தரக்கூடியதாகவும் இருக்கும். எனினும், இம்முறை கூறு முறைக்கே அன்றி முழுக்கணிப்பு முறைக்குப் பொருந்தாது,

வினுத் தொகுதிகள் தபாலில் அனுப்பப்பட்டு விவரங்கள் சேகரிக்கப்படுவது, பரந்த விசாரணைக்கு ஏற்றதாக உள்ளது. இம்முறையில் ஆகும் பொருட்செலவும், உழைப்புச் செலவும் அதிகமில்லை. ஆனுல், விவரம் தருபவர்கள் யாவரும் கல்வியறிவு உடையவர்களாகவும், இத்தகைய ஆய்வுகளில் ஆர்வமுள்ள வர்களாகவும் இருந்தால்தான் குறிப்பிட்ட காலத்தில் பூர்த்தி செய்யப்பட்ட வினுப்பட்டியல்களைத் திரும்பப் பெறமுடியும். இருப் பினும் அவை எல்லா வினுக்களும் பூர்த்தியானதாக இராமல், சரியான முறையில் விடைகள் தரப்படாமல் இருக்கலாம்.

ஆய்வாளர் பல உதவியாளர்களை அனுப்பி நேரடியாக விவரம் சேகரித்தலால் அதிக பொருட் செலவு ஆயினும், புள்ளி விவரங்களைத் தக்க முறையில் கல்வியறிவு இல்லாதவர்களிடம் இருந்தும்கூட பெறுவதற்கு இது ஒன்றே ஏற்ற வழியாகும்.

சேகரிக்கப்படும் விவரங்கள் ஒரே தன்மை உடையனவாக இருப்பதற்காக எல்லா ஆய்வாளர்க்கும் முன்கூட்டியே ஆய்வை நடத்துவதற்கு உதவும் வகையில் குறிப்புகள் தரப்படுகின்றன.

இரண்டாம் நிலை விவரங்கள் (Secondary Data)

வேறு பல ஆய்வுகளுக்காக ஏற்கெனவே சேகரிக்கப்பட்டுப் பதிவாகியுள்ள புள்ளி விவரங்களில் இருந்து, நமக்குத் தேவையான விவரங்களை எடுத்துக்கொள்ளுதல் இவ்வகையைச் சார்ந்தது ஆகும். மத்திய, மாநில அரசுகளின் வெளியீடுகள் [எடுத்துக் காட்டாக 'தமிழரசு', 'திட்டம்' (யோஜனு) போன்ற அரசியலார் பத்திரிகைகள்] வர்த்தக சங்கங்கள், வங்கிகள் போன்றவற்றின்

ஆண்டறிக்கைகள், வெளிநாட்டரசுகள், ஐக்கிய நாட்டு நிறுவனம் போன்றவற்றின் வெளியீடுகள், பல்வேறு ஆராய்ச்சியாளரின் ஆய்வுக் கட்டுரைகள் முதலானவை ஏற்கெனவே தக்க முறையில் சேகரித்து, வகைப்படுத்தியுள்ள புள்ளி விவரங்களைத் தருகின்றன. இவற்றைத்தவிர கிராமக் கணக்கர், மாவட்ட ஆட்சியாளர் அலுவலகங்கள் அரசாங்க செய்தித்துறை மூலமும் மக்களின் பல்வேறு நிலைகள் குறித்து விவரங்கள் கிடைக்கும்.

இரண்டாம் நிலை விவரங்களைப் பயன்படுத்தும்போது அவற்றை மிகவும் கவனமாக ஆராய்ந்து பார்த்து, அவை நம்பிக்கைக்கு உரியவையா எனக் கண்டறியவேண்டும். அவை யாரால், எப்போது, எம்முறையில் சேகரிக்கப்பட்டன, எந்த அலகில், எத்தகைய துல்லியத்துடன் விவரங்கள் கிடைத்துள்ளன என்பவற்றை அறிதல் வேண்டும். மேலும், அவை நாம் எடுத்துக்கொண்டுள்ள ஆய்வின் நோக்கத்திற்குப் பொருந்தக் கூடியதாகவும், போதுமான விவரங்கள் கொண்டதாகவும் இருக்கவேண்டும்.

இவ்வாறு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட விவரங்களைச் சரிபார்த்து வகைப்படுத்தவேண்டும். விவரங்களில் காணக்கூடிய பிழைகளை சார்புடைய பிழை (Biased error), சார்பற்ற பிழை (Unbiased error) என இருவகையாகப் பிரிக்கலாம்.

சார்புடைய பிழை

அளக்கும் கருவியிலுள்ள பிழையாலோ அல்லது ஆய்வாளரின் ஒருதலைச்சார்புடைய தன்மையாலோ சேகரிக்கப்படும் விவரங்கள் சார்புடைய பிழையைக் கொண்டுள்ளன. எடுத்துக்காட்டாக, மாணவர்களின் நிறையைக் காணும்போது ஒவ்வொரு ஒரு கிலோ கிராமிற்கும் ஒரு கிராம் குறைவாகக் காட்டக் கூடிய ஓர் எடைபார்க்கும் இயந்திரத்தைப் பயன்படுத்தினால் 50 கி.கி. எடை உடைய மாணவனுக்கு 50 கிராம் குறைவாகக் காணப்படும். இவ்வாறு ஒவ்வொரு அளவிலும் எடைக் குறைவு காணப்படுவதால் சார்புடைய பிழைகள் மேல்நோக்கியோ, அல்லது கீழ்நோக்கியோ வளர்ந்துகொண்டே செல்லும். எனவே, இத்தகைய பிழைகளை அறவே நீக்க முற்படவேண்டும். பெரும்பாலும் பெண்கள் தங்கள் வயதைக் குறைத்துக் கூறுவது, மக்கட் கணிப்பின்போது வயதைப் பூர்த்தி செய்யப்பட்ட பூர்த்தியான ஆண்டுகளில் கூறுவது. அதிகாரிகள் தங்களுக்குத் தேவையான உதவியாளரின் எண்ணிக்கையைக் கூறும்போது சிறிதளவு தேவைக்கு அதிகமாகவே கூறுதல் போன்றவை சார்புடைய பிழைகளுக்கு எடுத்துக்காட்டாகும்.

சார்பற்ற பிழைகள்

ஒருதலைச் சார்பற்ற பிழை ஒன்றுடன் ஒன்று ஈடு செய்து இறுதியில் சிறிதளவே உண்மையான மதிப்பிலிருந்து கணக்கிடப் பட்டுள்ள மதிப்பு மாறும் வகையில் அமையும். எடுத்துக்காட்டாக, தோராய மதிப்புகளைக் கணக்கிடும்போது 3·2 என்பதை 3 எனக் கொள்ளும்போது 0·2 ஐ விட்டுவிடுகிறோம். ஆனால், அது போலவே 4·8 என்பதை 5 எனக்கொண்டு 0·2 ஐக் கூட்டிக் கொள் கிறோம். எனவே, பிழைகள் ஓரளவு ஒன்றையொன்று ஈடு செய்து விடுகின்றன.

பிழைகள் ஏற்படும் காரணங்கள்

(1) வேண்டுமென்றே, நடுநிலைதவறி ஆய்வாளர்கள் குறிப் பிட்ட நோக்கத்துடன் விவரங்களைச் சேகரிக்க முற்பட்டால் முடிவில் தவறான விவரங்களையே பெறமுடியும்.

(2) ஒப்பிட இயலா விவரங்களை எடுத்து முடிவு காணுதல் எடுத்துக்காட்டாக பயிற்சி மொழிஆங்கிலத்தை உடைய 20 மாணவர்களுக்கும், பயிற்சி மொழி தமிழாக உடைய 20 மாணவர் களுக்கும் ஒரே தலைப்பில் ஒரு ஆங்கிலக் கட்டுரையை எழுதக் கொடுத்து, மதிப்பெண்களை ஒப்பிட்டு அவர்களது ஆங்கிலத் தேர்ச்சியைப் பற்றிய முடிவுக்கு வருதல் சரியல்ல.

(3) போதுமான விவரங்களின்மை : ஒரு கிராமத்திலுள்ள மக்களின் பொருளாதார நிலைபற்றிய ஆய்விற்கு, கிராமத்தில் ஒரே தெருவிலுள்ள 30 குடும்பங்கள் தரும் புள்ளி விவரங்கள் மட்டும் போதாது. கூறிலுள்ள இராசிகளின் எண்ணிக்கை தேவையான அளவு அதிகமாக இருத்தல் வேண்டும்.

மேலும், அலகுகளைச் சரியாக வரையறுக்கத் தவறுதல், நன்கு திட்டமிடப்படாத சோதனைகளை மேற்கொள்ளுதல், தோராய மதிப்புகளை எடுத்துக் கொள்ளுதல் போன்ற பலவகைக் காரணங் களாலும் புள்ளியியல் ஆய்வுகளில் பிழைகள் ஏற்படலாம்.

சார்புடைய பிழைகள், சார்பற்ற பிழைகள் எவையாயினும் சரி, அவற்றால் சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள், பெரிதும் பாதிக்கப்பட்டோ அல்லது முன்னுக்குப் பின் முரணாகவோ அமைந்தால் அவற்றை அறவே ஒதுக்கிவிடவேண்டும். சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களை அடியோடு மாற்றிவிடாமல், சிறுசிறு பிழைகளைத் தவிர்த்து, பெரும் கவனத்துடனும் பொறுமையுடனும் விவரங்களைச் சரிபார்த்து வகைப் படுத்தவேண்டும்.

புள்ளி விவரங்களின் பாகுபாடு (Classification of Statistical Data)

புள்ளியியலை கிராக்ஸ்டன், கௌடன் என்னும் புள்ளியியல் அறிஞர்கள் சேகரித்தல், படைத்தல், பகுத்துணர்தல், விளக்கம் காணுதல் என்னும் நான்கு முக்கியப் பண்புகள் உடையதாக விளக்கம் கூறுகிறார்கள். விவரங்களைச் சேகரித்தபிறகு

1. அவற்றின் ஒற்றுமை வேற்றுமைகளை அறிவதற்கும்

2. ஒப்பிட்டுப் பார்ப்பதற்கும்

3. விவரங்களின் முக்கியமான கருத்தைப் பார்த்த மாத்திரத்திலேயே உணரவும்

4. தேவையற்ற விவரங்களைத் தள்ளிவிட்டுத் தேவையான செய்திகளுக்கு முக்கியத்துவம் கொடுப்பதற்கும்

5. சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களைப் புள்ளியியல் முறையில் ஆராய்வதற்கு ஏதுவாக அமைப்பதற்கும்

அவற்றைப் பாகுபடுத்தல் இன்றியமையாதது ஆகும்.

பாகுபடுத்தலின் வகைகள்

1. இடவாரியாக—எடுத்துக்காட்டாக, பல்வேறு மாவட்டங்களின் நெல் உற்பத்தி போன்றவற்றைத் தருவன.

2. காலவாரியாக—பத்தாண்டுகளில் ஒரு தொழிற்சாலையின் பொருளாதார வளர்ச்சி, ஆறு ஆண்டுகளில் ஒரு பல்கலைக் கழகத்தின் பட்டதாரி மாணவியரது எண்ணிக்கை போன்றவை.

3. பண்புவாரியாக நிறம், கல்வியறிவு, மதம் போன்ற பண்புகளையொட்டிப் பிரித்தல்.

4. எண்ணளவை வாரியாக, உயரம், மதிப்பெண்கள், வருமானம், போன்றவற்றின் பாகுபாடு.

தனித்த மாறிகள் (Discrete Variables)

ஒரு குடும்பத்திலுள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கை, ஒரு பள்ளியிலுள்ள மாணவரின் எண்ணிக்கை, ஒரு தோட்டத்திலுள்ள மலர்களின் எண்ணிக்கை போன்றவை, முழு எண்களாகத்தான் இருக்குமேயன்றிப் பின்னங்களாக இராது. முழு எண்களைமட்டும் மதிப்புகளாகப்பெறும் இத்தகைய மாறிகளையே தனித்த மாறிகள் என்று கூறுகிறோம்.

தொடர் மாறிகள் (Continuous Variables)

ஓர் இடத்தின் வெப்பநிலை ஒரு நாளில் 102°F-லிருந்து 103°F வரை மாறும்போது இடையிலுள்ள எல்லா மதிப்புகளையும் ஏற்றுக் கொள்கிறது. அதுபோன்றே, ஒரு மாணவியினது உயரம் 63

அங்குலத்திலிருந்து 64 அங்குலத்திற்கு மாறும்போது இடையில் உள்ள எல்லா மதிப்புகளையும் பெறுகிறது. எனவே, ஒரு குறிப்பிட்ட வரம்பிற்குள் எல்லா மதிப்புகளையும் பெறும் மாறியே தொடர்மாறி எனப்படும்.

நிகழ்வெண் பரவல் (Frequency Distribution)

கீழ்க்காணும் விவரங்கள் ஒரு தொழிற்சாலையில் வேலை செய்யும் 60 தொழிலாளர்களது வாராந்திர ஊதியங்களைத் தருகின்றன.

78, 75 60, 92, 93, 74, 72, 68, 83, 88, 83, 88,
67, 80, 78, 72, 62, 88, 94, 53, 90 92, 84, 77,
65, 79, 79, 86, 73, 74, 88, 73, 70, 77, 56, 90,
74, 72, 62, 56, 89, 73, 94, 74, 71 81, 77, 72,
88, 82, 47, 76, 97, 84, 84, 69, 78, 67, 89, 66.

மேற்கண்ட விவரங்களை அப்படியே பார்க்கும்போது அவற்றைப் பற்றிய எத்தகைய முடிவுக்கும் வர இயலாது. இவற்றை ஒரு சில பிரிவுகளுக்குள் பிரித்து அமைத்தால் நமக்குக் கிடைப்பது நிகழ்வெண் பரவலாகும்.

மீப்பெரு மதிப்பு ரூ. 97
மீச்சிறு மதிப்பு ரூ. 47

வீச்சு ரூ. **50**

பிரிவு இடைவெளியை ரூ. 5 ஆக எடுத்துக் கொண்டால் நிகழ்வெண் பரவல் பத்துப் பிரிவுகளைக் கொண்டதாக இருக்கும். எனவே பிரிவுகளை 45—49, 50—54...என எடுத்துக் கொள்ளலாம்

45—49, 50 54 ... இவற்றில் எத்தனை ராசிகள் இருக்கின்றன என்று ஒவ்வொன்றாக எண்ணி வருவதைவிட, ஒரு எண்ணைக் கண்டதும் அது எந்தப்பிரிவில் வருகின்றதோ, அதற்கு எதிராக ஒரு சரிபார்க்கும் குறியீட்டை எழுதலாம். 4 குறியீடுகள் முடிந்த பின்னர் 5-வது குறியீட்டை அந்த நான்கு கோடுகளுக்குக் குறுக்கே எண்ணுவதற்கு வசதியாக குறுக்கே ஒரு கோட்டைப் போடலாம். இதனால் கோடுகளை ஐந்து ஐந்தாக எண்ணுவதற்கு வசதியாக இருக்கும்.

(அ)

தொழிலாளர்களின் ஊதியம் [ரூபாயில்]	குறியீடு	நிகழ்வெண்
45—49	𝍷	1
50—54	𝍷	1
55—59	𝍷𝍷	2
60—64	𝍷𝍷𝍷	3
65—69	𝍸 𝍷	6
70—74	𝍸 𝍸 𝍷𝍷𝍷	13
75—79	𝍸 𝍸	10
80—84	𝍸 𝍷𝍷𝍷	8
85—89	𝍸 𝍷𝍷𝍷	8
90—94	𝍸 𝍷𝍷	7
95—99	𝍷	1
	மொத்தம்	60

மேற்கண்ட நிகழ்வெண் பரவலையே பின்வருமாறும் எழுதலாம்.

(ஆ) (இ)

ஊதியம் ரூபாயில் (எல்லைகள்)	நிகழ்வெண்	ஊதியம் ரூபாயில் (இடைமதிப்பு	நிகழ்வெண்
44·5 - 49·5	1	47	1
49·5—54·5	1	52	1
54·5—59·5	2	57	2
59·5—64·5	3	62	3
64·5—69·5	6	67	6
69·5—74·5	13	72	13
74·5—79·5	10	77	10
79·5—84·5	8	82	8
84·5—89·5	8	87	8
89·5—94·5	7	92	7
94·5—99·5	1	97	1
மொத்தம்	60	மொத்தம்	60

(அ) வில் உள்ள முதல் பிரிவு இடைவெளியின் கீழ் எல்லை 45; மேல் எல்லை 49. அடுத்தபிரிவின் கீழ் எல்லை 50. எனவே, எல்லைகள் தொடர்ந்து வராது, 49 க்கும் 50 க்கும் இடையே 1 அலகு விடுபட்டு உள்ளன. ஆயினும், ஒரு மாறியின் மதிப்பு 49·4 என்றால் அதனை 45—49 பிரிவிலேயும், 49·7 என்றால் 50—54 பிரிவிலேயும் தான் எடுத்துக்கொள்வது மரபு. எனவே, முதல் பிரிவின் மேல் எல்லையாக 49 மட்டும் இருப்பதாகத் தோன்றினாலும், 49 க்கு மேல் 49·5 வரை மதிப்புகள் உள்ள ராசிகளை இப்பிரிவில் சேர்த்துக் கொள்கிறோம். அதுபோல், இரண்டாவது பிரிவில் கீழ் எல்லையாக 50 எழுதப்பட்டிருந்தாலும், உண்மையில் 49·5, அதற்கு மேற்பட்டு 54·5 வரை மதிப்புகளையுடைய ராசிகளை இரண்டாம் பிரிவில் கொள்கிறோம். எனவே, 45—49, 50—54, 55—

பட்டுள்ள எண்களைக் கொண்ட பிரிவு இடைவெளிகளின் உண்மையான பிரிவு எல்லைகளைக் கொண்டு எழுதப்பட்டுள்ளதே பட்டியல் (ஆ).

குறிப்பு : முதற்பிரிவின் கீழ் எல்லை 49 க்கும், இரண்டாவது பிரிவின் மேல் எல்லை 50 க்கும் உள்ள வேறுபாடாகிய 1 ஐ இரண்டால் வகுத்துப் பெறும், 0·5 ஐ எல்லா மேல் எல்லைகளுடன் கூட்டிக்கொள்கிறோம். கீழ் எல்லைகளிலிருந்து குறைத்துவிடுகிறோம்.

(இ)-யில் மாறியின் மையமதிப்புகள் அல்லது இடை மதிப்புகள் எழுதப்பட்டுள்ளன. கொடுக்கப்பட்டுள்ள சீர்ப்படா விவரங்களைத் தொகுத்து நிகழ்வெண்பட்டியலாக மாற்றியபின் ஒவ்வொரு ராசியின் சரியான மதிப்பும் நமக்குத் தெரியாது. (எ.கா.) 79·5—84·5 என்ற பிரிவில் 8 பேர் ஊதியம் பெறுகின்றனர் என்றுமட்டுமே தெரியுமேதவிர அவர்கள் ஒவ்வொருவரும் எவ்வளவு பெறுகின்றனர் என்பது பட்டியலிலிருந்து அறிய முடியாது. எனவே, அப்பிரிவில் திரும்பத்திரும்ப நிகழ்கின்ற (frequently occuring) ராசிகளின் நிகழ்வெண் 8 ஆதலால், அந்த 8 தொழிலாளரும் பிரிவின் மையமதிப்பாகிய $\frac{79{\cdot}5 + 84{\cdot}5}{2}$ = ரூ. 82 ஐப் பெறுவதாகக் கொள்கிறோம். இவர்களில் ஒரு சிலர் ரூ. 82 க்கு மேலும், மற்றும் சிலர் ரூ. 82 க்குக் கீழும் ஊதியம் பெறலாம். எனவே, பிரிவு நிகழ்வெண் முழுமையும், பிரிவு மையமதிப்பைப் பெறுவதாகக் கொள்ளும் தற்கோளினால் அதிகம் தவறு ஏற்பட வழியில்லை.

நிகழ்வெண்பட்டியலை அமைக்கும்போது பிரிவு இடைவெளிகளைக் கவனத்துடன் தேர்ந்தெடுக்கவேண்டும். பிரிவு இடைவெளி மிகச்சிறியதாக இருந்தால் பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமாகி, நீண்டுதொடு பட்டியலாக அமைவதோடு, பல பிரிவுகள் நிகழ்வெண் ஒன்றுமில்லாத காலி பிரிவுகளாக (vacant classes) அமையும். அதேசமயம் பிரிவு இடைவெளி மிகப் பெரியதாக இருந்தால் கீழ் எல்லைக்கும், மேல் எல்லைக்கும் உள்ள வேறுபாடு மிக அதிகமாவதால் பிரிவு நிகழ்வெண் முழுமையும் பிரிவின் மையமதிப்பைக் கொள்வதாக ஏற்கும் தற்கோள் பொருளற்றதாகிவிடும். எடுத்துக்காட்டாக, மதிப்பெண்களில், 25 ஐப் பிரிவு இடைவெளியாகக் கொண்டு 30 — 55 என எழுதினோமானால், தேர்வில் வெற்றிபெறாது 31 வாங்கும் மாணவன், இரண்டாம் வகுப்பு மதிப்பெண் 53 பெறும் மாணவன் இருவரையும் 42·5 (மையமதிப்பு) பெறுவதாகக் கருதிவிடுகிறோம். எனவே,

கொடுக்கப்பட்டுள்ள ராசிகளின் தன்மையைக் கருத்தில் கொண்டு தேவையான அளவு நுண்ணிய தன்மையும், துல்லியமும் அமையும் வகையில் பிரிவு இடைவெளியைத் தகுந்த முறையில் தேர்ந்தெடுத்தல் வேண்டும்.

பிரிவு இடைவெளியை, அடுத்தடுத்து வரும் இரு பிரிவுகளின் கீழ் எல்லைகள் அல்லது மேல் எல்லைகள் அல்லது மையமதிப்புகளின் வேறுபாட்டைக் கொண்டு கணக்கிடலாம்.

பிரிவு இடைவெளிகளைக் கீழ்க்காணும் பல்வேறு விதங்களில் எழுதுவதுண்டு.

(1) 0 — 19, 20 — 39, 40 — 59, ...

(2) 0 — 20, 20 — 40, 40 — 60, ...

(3) 10, 30, 50, ...

(4) 0 —, 20 —, 30 —, ...

(5) 0 — 20 ற்குக் கீழ், 20 — 40க்குக் கீழ், 40 — 60 க்குக் கீழ்

(4), (5) இருமுறைகளிலும் மேல் எல்லைகளைப்பற்றிய சரியான மதிப்புகள் தெரியவில்லை. எந்த தசமத்தான சுத்தமாக அவை எடுத்துக் கொள்ளப்படவேண்டும் என வரையறுக்கப்பட வேண்டும்.

(3) ல் மையமதிப்புகளே தரப்பட்டுள்ளன. அவற்றிலிருந்து எல்லைகளைக் கணக்கிட்டு எழுதவேண்டும்.

(2) ல் எல்லைகள் இரண்டும் தரப்பட்டிருந்தாலும், 20 ஐ மதிப்பாகக்கொண்ட ராசியை முதற்பிரிவில் அல்லது இரண்டாவது பிரிவில் சேர்த்தல் குறித்து ஐயம் ஏற்படுகிறது. இது முன் கூட்டியே திட்டவட்டமாக வரையறுக்கப்படுவதோடு, ஒரே முறையைப் பாகுபடுத்தல் முழுவதும் பின்பற்றவேண்டும். உடன் சேர்க்கும் முறையில் (inclusive method) மேல் எல்லைகள் 20, 40, 60 போன்றவையும், அவ்வப்பிரிவிற்கு உடையனவாகக் கருதப்படுகின்றன. தவிர்க்கும் முறையில் (exclusive method) 20, முதற்பிரிவின் மதிப்பாகக் கொள்ளப்படுவதில்லை. 20 க்கு அடியிலுள்ள மதிப்புகளைத்தான் எடுத்துக்கொள்கிறோம். எல்லை மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பரவலில் காணப்படாவிடில், இம் முறையைத் தயங்காது பயன்படுத்தலாம்.

முறை (1) எல்லாவற்றிலும் சிறந்து விளங்குகிறது; ராசிகளைப் பிரிவுகளுக்கு ஒதுக்குவதில் ஐயம் ஏற்பட்ட வழியில்லை. எனவே இதனையே பெரிதும் பயன்படுத்தல் நலம்.

பட்டியல் அமைத்தல் (Tabulation) : விவரங்களைப் பாகுபாடு செய்தபின் அவற்றை ஒரு பட்டியல் வடிவில் எடுத்துக் கூறுவதால், விவரங்களைத் தெளிவாகப் புரிந்து கொள்ளவும், அனைத்து விவரங்கள் பற்றிய உட்கருத்தினை ஒரே பார்வையில் உணர்ந்திடவும் ஏதுவாகிறது. ஒரு பட்டியலை விவரங்களைக் கட்டுக்கோப்பாகவும், தெளிவாகவும் எடுத்துக் கூறி, படிப்போர் ஒப்பிட்டுப் பார்த்து உணரும் வகையில் அமைப்பது 'ஒரு தனிக்கலை' என்கிறார் புள்ளியியல் அறிஞர் டிப்பெட் (Tippett) அவர்கள்.

எளிய பட்டியலமைப்பு (simple tabulation) முறையில் ஒரே ஒரு பண்பை ஒட்டியே பாகுபாடு செய்யப்படுகிறது.

கமலாநேரு உயர்நிலைப் பள்ளியில் பணிபுரியும் ஆசிரியர்களின் பட்டியல்

வயது (ஆண்டுகளில்)	ஆசிரியர்களின் எண்ணிக்கை
25-க்கும் கீழ்	———
25—35	———
35—45	———
45- 55	———
55-க்குமேல்	———
	மொத்தம் ....

இரு பண்புகளை ஒட்டி விவரங்களைப் பாகுபடுத்திக் கூறும் பட்டியல் இருவழிப் பட்டியல் (two-way table) ஆகிறது.

கமலாநேரு உயர்நிலைப் பள்ளியில் பணிபுரியும் ஆசிரியர்களின் பட்டியல்

வயது (ஆண்டுகளில்)	ஆசிரியர்கள்		மொத்தம்
	ஆண்	பெண்	
25-க்கும் கீழ்	---	---	---
25—35	---	---	---
35 - 45	---	---	---
45 - 55	---	---	---
55-க்கு மேல்	---	---	---
மொத்தம்	---	---	---

மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பண்புகளை ஒட்டிப் பிரிக்கும்போது சிக்கலான பட்டியல் அமைப்பு (complex tabulation) கிடைக்கிறது.

கமலாநேரு உயர்நிலைப் பள்ளியில் பணிபுரியும் ஆசிரியர்களின் பட்டியல்

வேலையின் தன்மை	வயது (ஆண்டுகளில்)	ஆசிரியர்கள்						மொத்தம்		
		பட்டதாரி			பட்டதாரி அல்லாதவர்					
		ஆண்	பெண்	மொத்தம்	ஆண்	பெண்	மொத்தம்	ஆண்	பெண்	மொத்தம்
நிரந்தரமானவர்	25-க்கு கீழ்	......	......	......	......	......	......	......	......	......
	25 35	......	......	......	......	......	......	......	......	......
	35 45	......	......	......	......	......	......	......	......	......
	45—55	......	......	......	......	......	......	......	......	......
	55-க்கு மேல்	......	......	......	......	......	......	......	......	......
	மொத்தம்	......	......	......	......	......	......	......	......	......
தற்காலிகமானவர்	25-க்கு கீழ்	......	......	......	......	......	......	......	......	......
	25—35	......	......	......	......	......	......	......	......	......
	35—45	......	......	......	......	......	......	......	......	......
	45—55	......	......	......	......	......	......	......	......	......
	55-க்கு மேல்	......	......	......	......	......	......	......	......	......
	மொத்தம்	......	......	......	......	......	......	......	......	......

பட்டியலமைக்கும்போது பொதுவாகக் கவனத்தில் கொள்ளத் தக்கவை

1. பட்டியலின் தலைப்பு சிறியதாகவும், அதே சமயம் அதிலடங்கியுள்ள விவரங்களைப் பற்றிய முழுக் கருத்தினையும் எடுத்துக்கூறும் வகையிலும் இருத்தல் வேண்டும்.

2. பட்டியலில் படுக்கைக் கட்டங்களும், நெடுக்கைக் கட்டங்களும் அமைக்கும்போது, அவை ஒவ்வொன்றிற்கும் பொருத்தமான, சுருக்கமான, தெளிவான தலைப்புகள் தரப்பட வேண்டும்.

3. தொடர்ந்து நீண்டு வரும் எண் பட்டியல் குழப்பத்தை விளைவிக்குமாதலால், ஒவ்வொரு 5 அல்லது 10 வரிசைகளுக்குப் பிறகு இடைவெளி விட்டு எழுதுவது வேண்டும்.

4. தேவையான படுக்கை, நெடுக்கைக் கோடுகள் வரைந்து, முக்கியமான புள்ளி விவரங்களுக்குச் சிறப்பிடம் தரவேண்டும். அவற்றை மேலேயோ, இடது புறத்திலோ சுட்டிக் காட்டலாம்

5. தேவைப்படும் இடங்களில் விளக்கம் தருவதற்கு அடிக் குறிப்புகளும் (foot-note) தரப்படவேண்டும்.

6. மதிப்புகள் அளக்கப்படும் அலகுகள் தெளிவாகத் தரப்பட வேண்டும். (எ.கா.) " நிறை-கிலோ கிராமில் " " நெல் விளைச்சல்-1000 டன்களில்."

7. எடுத்துக் கூறவேண்டிய விவரங்கள் அதிகமாகவும், எண்ணற்ற பிரிவுகளிலும் இருந்தால், அவற்றை இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பட்டியல்களில் அமைத்துக் கூறலாம்.

பொதுவாக, விவரங்களைச் சேகரிப்பதிலும், பாகுபாடு செய்வதிலும் புள்ளியியலறிஞர் பௌலி என்பவர் கூறுவதுபோல் (" in collection and tabulation, common sense is the chief requisite and experience the chief teacher ") பொது அறிவும், அநுபவமுமே சிறந்த பலனைத் தர வழிகோலுகின்றன.

கீழ்க்காணும் விவரங்கள் 20 நபர்களுடைய உயரங்களையும் எடைகளையும் தருகிறது. உயரத்திற்குப் பிரிவு இடை வெளிகள் 62″- 64″, 64″- 66″ ………… என இருக்குமாறும், எடைகளுக்குப்

பிரிவு இடைவெளிகள் 115—125 பவு. 125—135 பவு……… என இருக்குமாறும், ஒரு இரு வழி நிகழ்வெண்பட்டியலை அமைக்கவும்.

வரிசை எண்	எடை	உயரம்	வரிசை எண்	எடை	உயரம்
1	170	70	11	163	70
2	135	65	12	139	67
3	136	65	13	122	63
4	137	64	14	134	68
5	148	69	15	140	67
6	124	63	16	132	69
7	117	65	17	120	66
8	128	70	18	148	68
9	143	71	19	129	67
10	129	62	20	152	67

விடை

மீப்பெரு உயரம் 71″ கணக்கின்படி 62″—64″ முதல் பிரிவாக இருப்பதால் கடைசிப் பிரிவு 70″—72″ ஆக அமையும். எனவே, உயரத்தைப் பொறுத்து 5 பிரிவுகள் கிடைக்கின்றன. இது போன்றே உயரத்தின் ஒவ்வொரு பிரிவிற்கும் எடையைப் பொறுத்து ஆறு பிரிவுகள் கிடைக்கின்றன. இவ்வாறு முழுமைத் தொகுதி $5 \times 6 = 30$ சிற்றறைகளில் பிரிக்கப்படுகிறது.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரத்தை அவற்றிற்கு உரிய சிற்றறைகளில் குறிப்பதற்குக் கீழ்க்காணும் முறையைக் கையாளுகிறோம்.

முதலில் ஒரு குறிப்பிட்ட ராசியின் உயரத்தின் அளவைப் பொறுத்து, அந்த ராசி எந்தக் குறுக்குப்பிரிவில் அமையவேண்டும் எனத் தீர்மானிக்கிறோம். பிறகு எடையைப் பொறுத்து அந்த ராசிக்கு உரிய நெட்டுப் பிரிவைத் தீர்மானிக்கிறோம். இவ்வாறு அந்தந்த ராசிக்கு உரிய சிற்றறை நிர்ணயிக்கப்படுகிறது.

சிற்றறைகளில் குறியீடுகளால் நிகழ்வெண்களைக் குறியிட்டு இரு வழி நிகழ்வெண் பட்டியலை அமைக்கிறோம்.

எடை பவுண்டுகளில் / உயரம் (அங்குலத்தில்)	115—125	125—135	135—145	145—155	155—165	165—175	மொத்தம்
62—64	11 (2)	1 (1)					3
64 - 66	1 (1)		111 (3)				4
66— 68	1 (1)	1 (1)	11 (2)	1 (1)			5
68—70		11 (2)		11 (2)			4
70—72		1 (1)	1 (1)		1(1)	1(1)	4
மொத்தம்	4	5	6	3	1	1	20

எ.கா. "1951-ஆம் ஆண்டில் இந்தியாவில் மக்கட் தொகைக் கணிப்பிலிருந்து (இந்தியாவின் மொத்த ஜனத்தொகை 357 மில்லியன்களில்) 249 மில்லியன் நபர்கள் விவசாயத்தில் ஈடுபட்டுள்ளனர். அவர்களில் நகரங்களில் காணப்படும் 9 மில்லியன் நபர்களைத் தவிர, மற்றப் பெரும் பகுதியினர் கிராமங்களிலேயே வாழ்கின்றனர். விவசாயத்தில் ஈடுபடாத மக்கட் தொகையில், பாதிக்கு மேற்பட்டோர் இன்னும் கிராமப் பகுதிகளிலேயே காணப் படுகின்றனர். சரியாகச் சொல்லவேண்டுமானால் அவர்களின் எண்ணிக்கை ஏறத்தாழ 55 மில்லியன்களாகும். மொத்தத்தில் 105 மில்லியன் நபர்கள் பிறரைச் சாராதவர்கள் (Self-supporting) ஆவர். இவர்களில் 71 மில்லியன் நபர்கள் விவசாயத்தைத் தொடர்புடைய தொழில்களில் ஈடுபட்டுள்ளனர். ஏறக்குறைய 147 மில்லியன் நபர்கள் வருமானம் இல்லாதவர்களாக விவசாய உற்பத்தியில் ஈடுபட்டோரைச் சார்ந்து உள்ளனர் மற்றும் 67 மில்லியன் வருமானம் இல்லாதோர் விவசாயத்துறையில்

ஈடுபடாத, இதர வருமானம் உள்ளவர்களைச் சார்ந்து உள்ளனர். மேற்காணும் கூற்றை 6 நெட்டுப்பிரிவுகள், 3 குறுக்குப் பிரிவுகள் உடையதாய் 'பிறரைச் சாராத நபர்கள்', 'வருமானம் இருந்தும் பிறரைச் சார்ந்து உள்ளவர்', 'வருமானம் இல்லாமல் பிறரைச் சார்ந்திருப்போர்', 'மொத்தம்' 'கிராமப் பகுதியில் வாழ்வோர்', 'நகரத்தில் வாழ்வோர்', என்பவற்றை நெட்டுப் பிரிவுகளில் தலைப்புகளாகக் கொண்ட பட்டியலை அமைக்கவும். குறுக்குப் பிரிவுகளில் 'விவசாயத்தில் ஈடுபட்டோர்', 'விவசாயத்தில் ஈடு படாதோர்', 'மொத்தம்' இவை குறிப்பிடப்பட வேண்டும்.

விடை :

	பிறரைச் சாராத நபர்கள்	வருமானம் இருந்தும் பிறரைச் சார்ந்து உள்ளவர்	வருமானம் இல்லாது பிறரைச் சார்ந்து உள்ளவர்	மொத்தம்	கிராமப் பகுதிகளில் வாழ்பவர்	நகரப் பகுதிகளில் வாழ்பவர்
விவசாயத்தில் ஈடுபட்டோர்	71	31	147	249	240	9
விவசாயத்தில் ஈடுபடாதோர்	34	7	67	108	55	53
மொத்தம்	105	38	214	357	295	62

பயிற்சி

1. முதனிலை விவரங்கள், இரண்டாம் நிலை விவரங்கள் இவற்றைப் பற்றி விளக்கிக் கூறி, அவை எப்போது, எவ்வாறு பயன்படுத்தப்படுகின்றன என விளக்குக. [செ.ப. 1967-A]

2. புள்ளி விவரங்களைச் சேகரிக்கும் பல்வேறு முறைகளைச் சுருக்கமாக எடுத்துக் கூறி, அவை ஒவ்வொன்றும் எந்த சூழ்நிலையில் நல்ல முடிவுகளைத் தருகின்றன என ஆராய்க.
[செ.ப. 1964-A]

3, விவரங்களைப் பாகுபாடு செய்யும் முறை யாது? அவற்றைப் பட்டியலில் எடுத்துக் கூறும்போது கருத்தில் கொள்ளத்தக்க விதி முறைகள் யாவை? [செ.ப. 1964-S]

4. பட்டியல் அமைப்பின் முக்கியப் பயன்கள் யாவை? பட்டியல் அமைப்பின்போது கையாளவேண்டிய விதிமுறைகள் யாவை? [செ.ப. 1967]

5. நிகழ்வெண் பட்டியலை விளக்கி, அதனை அமைப்பதற்குக் கருத்தில் கொள்ள வேண்டிய பல்வேறு வழி முறைகளை ஆராய்க. [செ.ப. 1963]

6. ஒரு சிறந்த வினாப்பட்டியலுக்குத் தேவையான பண்புகள் யாவை?

7. ஒரு தொழிற்சாலையில் பணிபுரிவோரின் எண்ணிக்கையை, மதம், நான்கு வயது பிரிவுகள், பால் (sex), திறமை இவற்றின் அடிப்படையில் பிரித்துக் கூறக்கூடிய ஒரு வெற்றுப் பட்டியலைத் (blank table) தயாரிக்கவும்.

8. (அ) உடற் பயிற்சி வகுப்புகள் (ஆ) கருத்தரங்குகள்: இவற்றினை அமைப்பதற்காக ஒரு பல்கலைக் கழகத்தின் மாணவர்களை வயது, பால் (sex), வகுப்பு இவற்றின் அடிப் படையில் பிரிக்கக்கூடிய வெற்றுப் பட்டியல்களைத் தயாரிக்கவும்.

9. கல்லூரியில் பயிலும் மாணவரது செலவினங்களைப் பற்றி, அறிய மேற்கொள்ளும் ஆய்வினை எவ்வாறு நடத்தவேண்டும் என்பதனைப் பற்றிச் சுருக்கமாக வரையவும்; அதற்குத் தேவையான வினாப்பட்டியலையும் அமைக்கவும். [செ.ப. 1967]

10. ஒரு வியாபாரி எத்தகைய கழுத்துப்பட்டைகளுக்கு (neck ties) மக்களிடம் அதிக வரவேற்பு இருக்கிறது என்பதை அறிய முற்படுகிறார். ஆய்வை மேற்கொள்ளும் சிறந்த வழிகளை அவருக்கு எவ்வாறு விளக்குவாய்? இதற்குரிய ஒரு வினாப் பட்டியலைத் தயாரிக்கவும். [செ.ப. 1968]

11. ஒரு குறிப்பிட்ட விவரத்திற்குப் பின்வரும் நான்கு முக்கியப் பண்புகளும், அவற்றின் உப-பண்புகளும் (sub-characteristics) தரப்பட்டுள்ளன.

முக்கியப் பண்புகள்	உப-பண்புகள்
வாழ்விடம்	நகரம், கிராமம்.
மதம்	இந்து, இந்து அல்லாதவர்கள்.
பால்	ஆண், பெண்
வயது	0—30, 30—60, 60-ம் அதற்கு மேலும்.

தகுந்தப் பட்டியலை அமைக்கவும்.

12. மாணவர்கள் கல்லூரிக்கு வருவதற்காக மேற்கொள்ளும் பயணத்தின் வகையை (mode of travel) ஆராய்வதற்கான ஒரு ஆய்வினை எவ்வாறு நடத்துவாய் ?

13. கீழ்க்காணும் பட்டியல் ஒரு தொழிற்சாலையில் வேலை பார்க்கும் தொழிலாளரது அன்றாடக் கூலி விவரங்களைத் தருகிறது. 10 பைசாவைப் பிரிவு இடைவெளியாகக் கொண்டு ஒரு நிகழ்வெண் பரவலை அமைக்கவும்.

2·51,	2·10,	2·36,	2·44,	2·55,	2·98,	2·67,	2·27,	2·39
2·75,	2.03,	2·37,	2·40,	2·52,	2·31,	2·81,	2·04	2·38
2·60,	2·28,	2·49,	2·46,	2·50,	2·42,	2·29,	2·47,	2·27
2·47,	2·15,	2·56,	2·65,	2·44,	2·41,	2·17,	2·69,	2·50
2·45,	2·73,	2·26,	2·42,	2·53,	2·46,	2·19,	2·62,	2·32
2·33,	2·47,	2·20,	2·76,	2.69,	2·46,	2·95,	2·16,	2·42
2·68,	2·38,	2·35,	2·77,	2·66,	2·07,	2·13,	2·67,	2·27
2·22,	2·36,	2·34,	2·24,	2·25,	2·12,	2·57,	2·58,	2·59
2·21,	2·56,	2·55,	2·40,	2·48,	2·62,	2·70,	2·92,	2·86
2·35,	2·82,	2·78,	2·54,	2·37.	2·31,	2·31,	2·57,	2·48

14. 60 மாணவர்கள் ஒரு தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு. 40—49 என்பதை ஒரு பிரிவாகக் கொண்டு, சம

பிரிவு இடைவெளி உடைய பத்துப்பிரிவுகள் கொண்ட நிகழ்வெண் பட்டியலை அமைக்கவும்.

41	17	83	63	54	92	60	58	70	06
67	82	33	44	57	49	34	73	54	63
36	52	32	75	60	33	09	79	28	30
42	93	43	80	03	32	57	67	24	64
63	11	35	82	10	23	00	41	60	32
72	53	92	88	62	55	60	43	40	57

15. ஒரு தொழிற்சாலையில் பணிபுரியும் 52 தொழிலாளர்களின் வயது விவரம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. தகுந்த பிரிவு இடைவெளிகளை அமைத்து, நிகழ்வெண் பரவல் அமைக்கவும்.

67	29	53	43	31	30	30	28	38	45
61	41	46	49	46	50	47	45	33	35
48	36	48	50	47	43	69	30	28	60
38	36	36	37	62	32	34	50	43	27
34	47	36	34	61	45	46	44	32	49
35	39.								

2. வரைபட, விளக்கப் படம்மூலம் புள்ளி விவரங்களை எடுத்துக் காட்டுதல்

விளக்கப் படங்கள்

புள்ளியியல் விவரங்களைத் தெளிவாகவும், படிப்பவர் மனதைக் கவரும் வகையிலும் செய்வதற்கு விளக்கப் படங்களும், வரை படங்களும் பெரிதும் உதவுகின்றன. பெரும்பாலோருக்கு வெறும் எண்களைக் கண்டவுடனே அவை எதைக் குறிக்கின்றன, அவற்றின் தன்மை என்ன என்பதைப் புரிந்துகொள்வது கடினம். அவ்வாறு புரிந்துகொண்டாலும் அவற்றை நினைவில் கொள்வது மேலும் கடினம். அதற்குமாருகப் புள்ளி விவரங்களை, விளக்கப் படங்களில் கண்டவுடன் அவற்றின் அடிப்படைக் கருத்துக்களை மக்கள் அறிந்துகொள்வதோடு அக் கருத்துக்களை நீண்ட நாள் மனதில் கொள்ளவும் கூடும். "10,000 சொற்களுக்கு ஈடாக ஒரு படத்தைக் கொள்ளலாம்" எனும் கூற்றுக்கு ஏற்பப் பெரிய எண்கள் அடங்கிய நீண்ட பட்டியலைவிட ஒரு சில படங்களின்மூலம் விவரங்களின் தன்மையை மனத்தைக்கவரும் வகையில் தெளிவாக எடுத்துக்கூறலாம். செலவிடும் காலமும் குறைகின்றது. விவரத்தைப்பற்றிய முழுமையான கருத்தும் புலனுகிறது. அன்ருடச் செய்தித்தாள்களில் அரசினரது ஐந்தாண்டுத் திட்டங்கள், வரவு செலவு விவரங்கள் முதல் தனிப்பட்டோர் தொழில் நிறுவனங்கள் தரும் புள்ளி விவரங்கள்வரை பட்டியல் களில் தரப்பட்டு இருந்தால் பெரும்பாலோர் அவற்றைப் படிக்காமலேயே விட்டுவிடுவர். ஆயின் அவை படங்கள் அல்லது விளம்பரங்களாகச்சுவையானமுறையில் தரப்பட்டிருந்தால் எவரும் படிக்கத் தவறுவது இல்லை. வெவ்வேறு இடங்கள் அல்லது காலங்களுக்குரிய விவரங்களை விரைவிலும், மிகச் சரியாகவும், ஒப்பிட்டுப் பார்ப்பதற்குப் படங்கள் பெரிதும் உதவுகின்றன. இவை விவரங்களில் பொதிந்துள்ள உண்மைகளையும், தொடர்புகளையும் வெளிப்படுத்துவதோடு அவற்றைப் பகுத்து ஆராய்ந்து முடிவு

காணவும் அடிகோலுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, மூன்று நகரங்களின் மக்கட் தொகைகள் முறையே 2,750,123 ; 2,572,321 ; 2,752,113 எனத் தருவதைவிட ஒரு பட்டை விளக்கப் படத்தில் மூன்று நகரங்களின் மக்கட் தொகையைக் குறித்தால் உடனேயே எங்கு மக்கட்தொகை மிக அதிகம், எங்கு மிகக் குறைவு என்பதனைப் பாமரமக்கள்கூட எளிதில் அறிந்துகொள்வர். ஒவ்வொரு மாணவரும் தனது அன்றட 24 மணி நேரத்தைக் கல்வி, விளையாட்டு, பிரயாணம், உணவு, உறக்கம், ஓய்வு, பொழுதுபோக்கு போன்ற பல அலுவல்களுக்குச் செலவிடப்படும் பகுதிகளாகப் பிரித்து, வட்ட விளக்கப்படம் வரைந்தால் தம் அலுவல்களில் எதற்கு அதிக முக்கியத்துவம் தரப்பட்டுள்ளது, அவ்வாறு நேரத்தைப் பங்கிட்டுள்ளது தம் முன்னேற்றத்திற்கு வழிகோலுகிறதா என உணரலாம்.

நான்கு ஐந்தாண்டுத் திட்டங்களில் பல்வேறு பகுதிகளுக்குச் செலவிடப்பட்டுள்ள முதலீடுகளை நான்கு நீண்ட பட்டியல்களில் தருவதைவிட நான்கு வட்ட விளக்கப்படங்கள் மூலம் தெளிவாகக் காட்டலாம்.

புள்ளியல் விவரங்களைப் பட்டியல் மூலமும் வரைபடங்கள் மூலமும் எடுத்துக் கூறுவதை ஒப்பிடுதல்

1. பட்டியல்களில் விவரங்களின் துல்லியமான மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். ஆனல், படங்களில் மதிப்புக்களை ஓரளவு தோராயமாகத்தான் காணமுடியும்.

2. பல படங்களைவிட ஒரே பட்டியலில் பெருமளவு விவரங்களை எடுத்துக்கூற இயலும்.

3. பட்டியல்களை மிகவும் ஆழ்ந்த கவனத்துடன் படித்தே புரிந்துகொள்வதோடு அவற்றிலிருந்து விவரங்களைப்பற்றிய முடிவுக்கு வருவதும் சிறிது கடினம்.

4. உளவியல்படி, பாமர மக்களின் கவனத்தையும் கவர வல்லவை படங்களே.

5. ஒப்பிட்டுப் பார்த்தலிலும், நீண்ட காலத்தொடரில் விவரங்களின் போக்கையும் உணர்ந்து கொள்வதற்கும் பட்டியல்களைவிட வரைபடங்களே மேலானவை.

விளக்கப் படங்களுக்கும் (Diagrams), வரைபடங்களுக்கும் (Graphs) உள்ள வேறுபாடுகள்

1. வரைபடங்கள் இரு மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள கணக்கியல் தொடர்பை எடுத்துக்கூறுவதால் அவற்றை வரை

வதற்கு நமக்கு வரைதாள் தேவையாக உள்ளது. ஆனால், விளக்கப்படங்களை வெறும் தாளிலேயே வரையலாம்.

2. விளம்பரத்திற்கும், செய்திகளைப் பரப்புவதற்கும் விளக்கப் படங்கள் பெரிதும் பயன்படுகின்றன. ஆனால், அவற்றால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்குப் புதிய ஆய்வுகளைப் பகுத்து ஆராய இயலாது. எனவே இவற்றைவிட வரைபடங்களையே ஆராய்ச்சியாளர்களும் புள்ளியியல் நிபுணர்களும் பயன்படுத்து கின்றனர்.

3. காலத் தொடர்களையும், நிகழ்வெண் பட்டியல்களையும் எடுத்துக்காட்டுவதற்கு வரைபடங்களே உதவுகின்றன.

விளக்கப்படம் வரைவதற்குக் கையாளவேண்டிய விதிகள்

1. **தலைப்பு :** ஒவ்வொரு படத்திற்கும் ஒரு பொருத்தமான தலைப்புத் தரப்பட்டிருக்கவேண்டும். அது ஒரு சில சொற்களில், அதேசமயத்தில் படத்தில் காணப்படும் எல்லா முக்கிய செய்தி களையும் அறிவிக்கும் வாயிலாக அமைதல் வேண்டும். அது படத்திற்கு மேலேயோ அல்லது கீழேயோ தரப்பட்டிருக்க வேண்டும்.

2. படத்தின் உயரத்திற்கும், அகலத்திற்கும் உள்ள விகிதம் படத்தின் தோற்றம் சீரான முறையில் இருக்குமாறு அமைய வேண்டும்.

3. அளவுத்திட்டமும், புள்ளி விவரங்களுக்கு ஏற்றவகையில், மிகப் பெரியதாகவோ அல்லது மிகச் சிறியதாகவோ இல்லாமலும் " மாணவர்களின் எண்ணிக்கை—(1000 களில்) " " உற்பத்தி— லட்சம் டன்களில் " என அலகுகள் தெளிவாகக் குறிக்கப்பட்டும் இருக்கவேண்டும்.

4. படங்கள் தெளிவாகவும், சரியாகவும் வரையப்பட வேண்டும். படத்தின் அடியில் தேவையான இடங்களில் குறிப்புகள் தரப்படவேண்டும். படத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ள பல்வேறு கோடுகள், நிறங்கள், குறிகள் இவற்றைப்பற்றிய விவரங்கள் தரப்படவேண்டும்.

ஒரே படத்தில் பெருமளவு விவரங்களைத் திணித்துக் காட்டுவதைவிட அவற்றைப்பிரித்து பல்வேறு எளிய படங்களின் மூலம் தெரிவித்தல் நலம்.

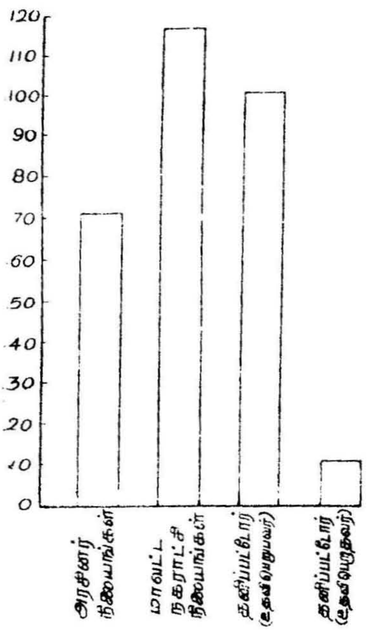
பட்டை விளக்கப்படங்கள் (Bar Diagrams)

பட்டை விளக்கப்படங்கள், சம தூரங்களில் வரையப்பட்டுள்ள ஓரே அகலமுடைய செவ்வகங்களைக் கொண்டவை.

உண்மையில் பட்டை விளக்கப்படங்களில் பட்டைகளின் உயரங்கள் மட்டுமே அவை எடுத்துக்கூறும் அளவுகளைப் பொறுத்து மாறுபடுகின்றன. பார்ப்போரின் கவனத்தைக் கவருவதற்காகவே பட்டைக் கோட்டிற்குப் பதிலாக செவ்வகமாக வரையப்பட்டுள்ளன. எனவே, அவை ஓர்பரிமாணப் படங்களாகும். பட்டைகள் செங்குத்தாகவோ அல்லது கிடைநிலையிலோ வரையப் படலாம். பட்டை விளக்கப் படங்களில் செவ்வகங்கள் யாவும் ஒரே கோட்டின்மீது சம தூரத்தில் வரையப்படு கின்றன. இவ் விவரங்களைப் பயிலும் முறை அறியாதவர் கூட எளிதில் புரிந்து கொள்ள லாம். இவற்றை வரைவது மிகவும் சுலபம்.

ஒப்பிட்டுப்பார்க்க வேண் டியசெய்திகளின்எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்கும்போது பட்டை விளக்கப்படங்களே கையாளப்படுகின்றன.

1952-53-ம் ஆண்டில் இந்தியாவிலுள்ள கல்வி நிலையங்களின் எண்ணிக்கை (1000-த்தில்)



படம் 2·1

எடுத்துக்காட்டு 1.

1952 - 53 ஆண்டில் இந்தியாவிலுள்ள கல்வி நிலையங்களின் எண்ணிக்கை (1000-த்தில்) அடியில் தரப்பட்டுள்ளது. இதனை ஒரு பட்டை விளக்கப்படத்தில் காட்டுக.

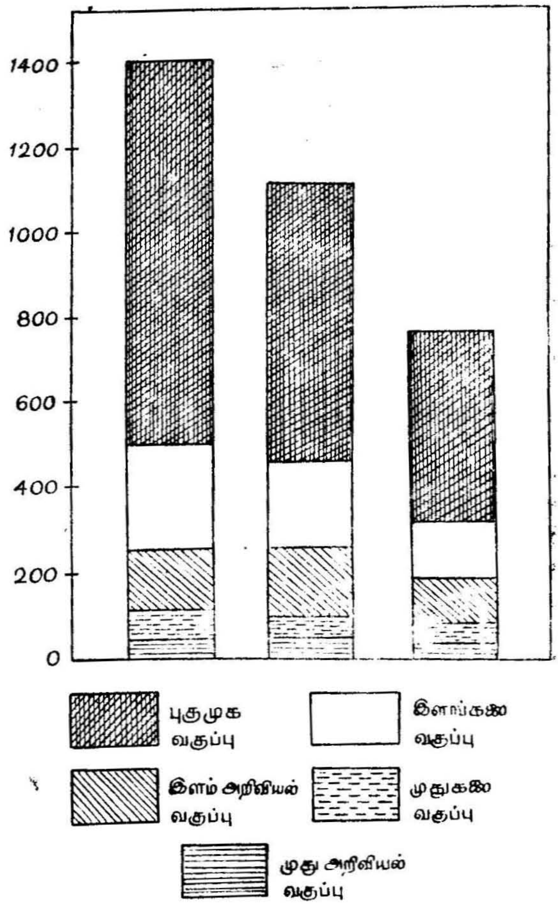
அரசினர் நிலையங்கள்	71
மாவட்ட நகராட்சி நிலையங்கள்	117
தனிப்பட்டோர், உதவி பெறுபவர்	101
தனிப்பட்டோர், உதவி பெருதவர்	11
மொத்தம்	300

பல் அங்கப் பட்டை விளக்கப்படம் (Component Bar Diagram)

ஒரு மாறி அதன் பல்வேறு பகுதிகளாகப் பிரித்துக் கூறப்பட்டிருந்தால் பட்டை விளக்கப்படங்களிலும் அவற்றைக் கோடுகளின் மூலமாக அதே விகிதத்தில் பிரித்து, வெவ்வேறு நிறங்கள் அல்லது குறிகள் மூலம் எடுத்துக் காட்டுகின்றோம். இரு கல்லூரிகளில் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை ஒப்பிடுவதற்குப் படங்கள் வரையும்போது அவற்றில் மொத்த மாணவரின் எண்ணிக்கை, புகுமுக வகுப்பு, இளங்கலை வகுப்பு, இளமறிவியல் வகுப்பு போன்ற பல பிரிவுகளில் தரப்பட்டிருந்தால் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உள்ள மாணவரின் எண்ணிக்கைக்கு ஏற்ற வகையில் பட்டைப் படங்களின் உயரங்களைப் பிரித்திடலாம். இதனைப் பகுதிப் பட்டை விளக்கப்படம் அல்லது பல் அங்கப்பட்டை விளக்கப்படம் (Component bar diagram) என்று கூறுகின்றோம்.

அடியிற் கண்ட பட்டியல் மூன்று கல்லூரிகளில் உள்ள வகுப்புக்களின் பல்வேறு மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைத் தருகின்றது. அதனை ஓர் பல் அங்கப் பட்டை விளக்கப் படத்தில் காட்டுக.

வகுப்பு	கல்லூரி-A	கல்லூரி-B	கல்லூரி-C
புகுமுக வகுப்பு	900	650	440
இளங்கலை	250	200	130
இளம் அறிவியல்	140	160	105
முதுகலை	70	47	45
முது அறிவியல்	40	43	30
மொத்தம்—	1400	1100	750



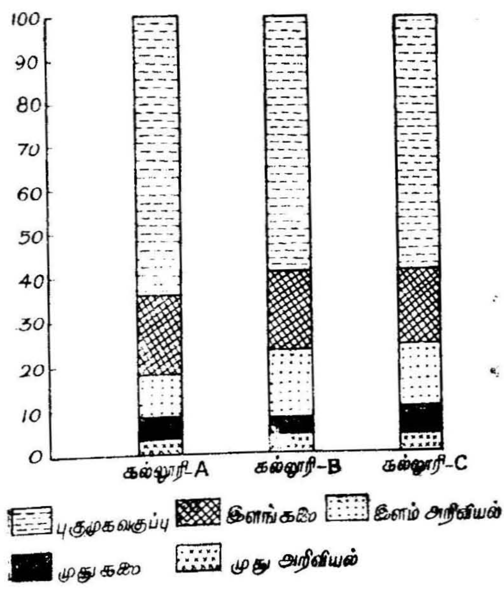
படம் 2·2

சதவீதப் பட்டை விளக்கப் படம் (Percentage Bar Diagram)

ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உள்ள பல்வேறு பகுதிகளின் மதிப்புக்கள், அப்பிரிவின் மொத்த மதிப்பின் சதவீதங்களாகத் தரப்பட்டிருந்தால், அது சதவீதப் பட்டை விளக்கப்படமாகும் இதில் எல்லா பட்டைகளும் ஒரே நீளத்தில் அமைகின்றன.

	கல்லூரி-A	கல்லூரி-B	கல்லூரி-C
புகுமுக வகுப்பு	64	59	59
இளங்கலை	18	18	17
இளம் அறிவியல்	10	15	14
முதுகலை	5	4	6
முது அறிவியல்	3	4	4
மொத்தம்—	100	100	100

<u>மாணவர்களின் எண்ணிக்கை</u>



படம் 2·3

ஒவ்வொரு கல்லூரியிலும் உள்ள மொத்த மாணவரை நூறாகக் கொண்டு, ஒவ்வொரு வகுப்பிலும் உள்ள மாணவரின் எண்ணிக்கையைச் சதவிகிதங்களாக மாற்றி அமைத்து வரைதல் வேண்டும். இதில் எல்லாப் பட்டைகளும் ஒரே நீளத்தில் அமைகின்றன.

மேற்கூறிய பட்டியலில் உள்ள மதிப்புகளுக்கு சதவிகிதங்கள் கணக்கிடப்பட்டு, அவை முழு எண் சுத்தமாக எழுதப்பட்டுள்ளன.

இணைப்பட்டை விளக்கப்படங்கள் (Bar Diagrams in juxta position)

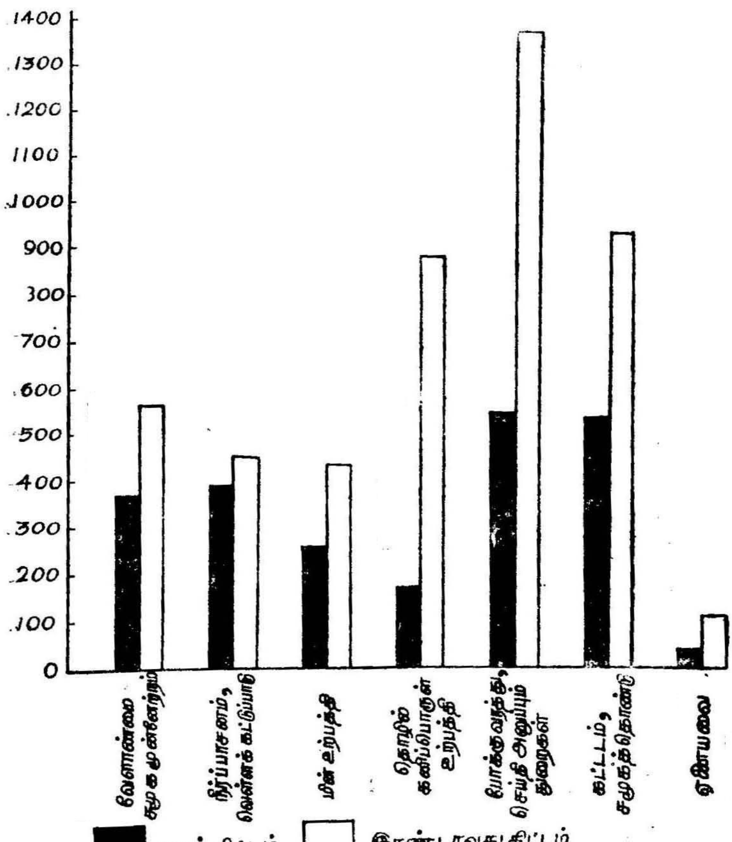
இரு புள்ளி விவரங்களை ஒப்பிட்டு அவற்றின் அடிப்படைக் கருத்துக்களை ஆராய்வதற்கு இணை விளக்கப்படங்கள் வரையப் படுவதுண்டு. எடுத்துக்காட்டாக, பட்டக்கல்வி பயின்றோரில் ஆடவர், மகளிரின் எண்ணிக்கை, பல்வேறு ஆண்டுகளில் ஒரு. தொழிற்சாலையின் வரவு செலவு, ஒரு பொருளின் ஏற்றுமதி இறக்குமதி இவற்றை ஒருசேர ஒப்பிட்டுப் பார்க்க இவை உதவுகின்றன.

எ. கா. முதலிரண்டு ஐந்தாண்டுத் திட்டங்களில் இந்திய நாட்டின் முன்னேற்றத்திற்காக மூலதனங்களைச் செலவிட்ட வகைகளின் அட்டவணை பின்வருமாறு: இணைப்பட்டை விளக்கப் படம் வரைக.

செலவினங்கள்	முதல் திட்டம்	இரண்டாவது திட்டம்
வேளாண்மை சமூக, முன்னேற்றம்	372	565
நீர்ப்பாசனம், வெள்ளக் கட்டுப்பாடு	395	458
மின் உற்பத்தி	266	440
தொழில் கனிப்பொருள் உற்பத்தி	179	891
போக்குவரத்து, செய்தி அனுப்பும் துறைகள்	556	1384
கட்டடம், சமூகத்தொண்டு	547	946
ஏனையவை	41	116

செவ்வகப் படங்களில் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு காலத் தொடரில் பரவியுள்ள, தொடர் மாறிகளாய் உள்ள மதிப்புக்களை, எடுத்துக் காட்ட முடியாது. எடுத்துக் காட்டாக, சென்னை நகரில் பத்து ஆண்டுக் காலத்தில் பெய்யப் படுகின்ற மழையின் அளவை ஒரு தொடர்ச்சியற்ற பட்டை விளக்கப்படத்தில் காட்டுவது இயலாது. ஆனால், பல்வேறு நகரங்களில் உள்ள சராசரிமழையின் அளவுகள் தொடர்பற்ற விவரங்கள் ஆதலால், அவற்றைப் பட்டை விளக்கப் படத்தில் காட்டலாம்.

முதலிரண்டு ஐந்தாண்டு திட்டங்களில்
மூலதனங்களைச் செலவிட்ட வகைகள்

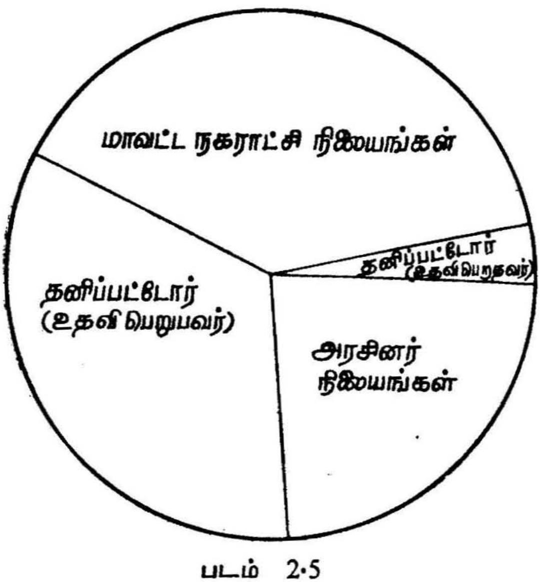


படம் 2·4

வட்ட விளக்கப் படங்கள் (Pie diagram)

செய்தித் தாள்களிலும், விளம்பரங்களிலும், வட்ட விளக்கப் படங்கள் மக்களது கவனத்தைக் கவரும் வகையில் வரையப் பட்டுள்ளதைக் காண்கிறோம். ஒரு மாறியின் மொத்த மதிப்பு அதன் பல்வேறு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளதை எடுத்துக் காட்ட இது பயன்படுகின்றது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு கட்டடம் கட்டுவதற்கான மொத்த செலவு, கூலி, செங்கல், சிமெண்ட், எஃகு, மரம், மேற்பார்வைச் செலவு போன்ற பல பிரிவுகளில் காணப்படுவதைக் குறிக்கவோ அல்லது ஐந்தாண்டுத் திட்டத்தில் செலவிடப்படும் தொகையானது விவசாயம், தொழில், கல்வி போன்ற பல துறைகளில் பிரிக்கப்பட்டுள்ளதைக் காட்டுவதற்கோ இதனைக் கையாளலாம்.

வட்ட விளக்கப் படத்தை வரையும் முறை: பல்வேறு பிரிவுகளின் மதிப்புகளை வட்டக் கோணப் பகுதிகளின் மூலம் காட்ட வேண்டியுள்ளதால் மையத்திலுள்ள மொத்தக் கோணம் 360°யை அப்பிரிவுகளின் மதிப்புக்களின் விகிதத்தில் பிரித்துக்



படம் 2·5

கொள்கிறோம். கிடை நிலையிலுள்ள ஓர் ஆரத்தை எடுத்துக் கொண்டு கோணமானியின் மூலம், கணக்கிடப்பட்ட பல்வேறு கோணங்களைக் குறிக்கின்றோம். வட்ட கோணப் பகுதிகளை அவற்றின் அளவிற்கு ஏற்ப இறங்கு வரிசையில் இடஞ்சுழியாகக்

குறிப்பது வழக்கம். ஒவ்வொரு பிரிவையும் தெளிவாகக்காட்டு வதற்காக வெவ்வேறு நிறங்கள் அல்லது குறிகளைப் பயன்படுத்தி, அழகுற அமைப்பதோடு அவற்றிற்கான விளக்கக் குறிப்பையும் அடியிற் கண்டபடி தரவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1-ல் உள்ள விவரங்களுக்கு, வட்ட விளக்கப் படம் வரைக :

வசதியான ஓர் ஆரத்தில் வட்டம் ஒன்று வரைந்து கொள்ள வேண்டும். கல்வி நிறுவனங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை 300க்கு 360° எனக்கொண்டு, ஒவ்வோர் பிரிவிற்கும் உள்ள கோணங்களைக் கணக்கிட்டு அவற்றை முழு எண் சுத்தமாக எழுதவேண்டும்.

$$\text{அரசினர் நிலையங்கள்} = \frac{71}{300} \times 360 = 85^\circ$$

(85·2°)

$$\text{மாவட்ட நகராட்சி நிலையங்கள்} = \frac{117}{300} \times 360 = 141^\circ$$

(140·4°)

$$\text{தனிப்பட்டோர், உதவி பெறுபவர்} = \frac{101}{300} \times 360 = 121^\circ$$

(121·2°)

$$\text{தனிப்பட்டோர், உதவி பெறுதவர்} = \frac{11}{300} \times 360 = 13^\circ$$

(13·2°)

இறுதியில் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 360° இருக்குமாறு அமைத்துக் கொள்கிறோம்.

இரு வட்ட விளக்கப்படங்கள் வரையும்போது வட்டங்களின் பரப்புக்கள் அவற்றின் ஆரங்களின் வர்க்கங்களின் நேர்விகிதத்தில் இருப்பதால் அவற்றின் ஆரங்களை இனங்களின் மொத்த மதிப்புகளின் வர்க்கமூலங்களின் விகிதத்திற்கு ஏற்ப எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும்.

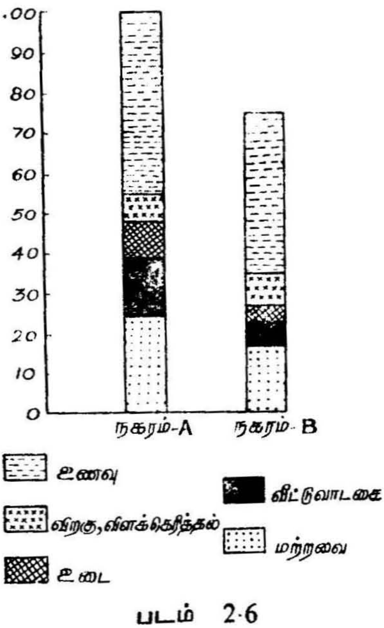
எடுத்துக்காட்டாக மூன்று தொழிற்சாலைகளின் வருடாந்திர இலாபங்கள் முறையே ரூ.90,000 ரூ.2,50,000 ரூ.3,60,000 இருந்தால் ஆரங்கள் $\sqrt{9} : \sqrt{25} : \sqrt{36} = 3 : 5 : 6$] என்ற விகிதத்தில் இருக்கும்.

கணக்கு

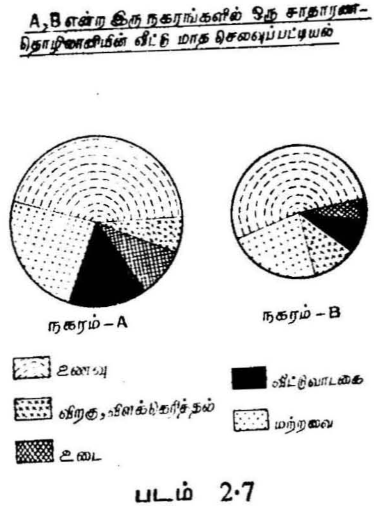
A, B என்ற இரு நகரங்களில் ஒரு சாதாரண தொழிலாளியின் வீட்டு மாத செலவுப் பட்டியல் அடியில் தரப்பட்டுள்ளது.

(1) பட்டை விளக்கப்பட மூலம். (2) வட்ட விளக்கப்படம் மூலம் விவரங்களை எடுத்துக் காட்டுக.

	நகரம் A	நகரம் B
உணவு	45	40
எரிபொருள்	7	8
உடை	9	4
வீட்டு வாடகை	15	6
இதர செலவுகள்	24	17
மொத்தம்	100	75



படம் 2·6



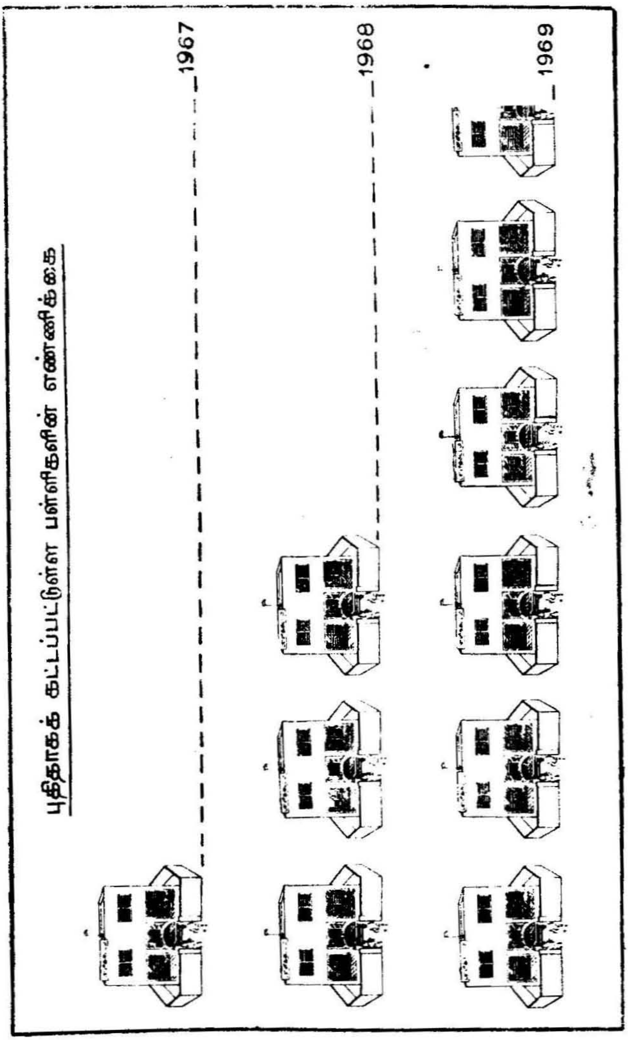
படம் 2·7

சித்திர விளக்கப்படங்கள் (Pictograms)

புள்ளி விவரங்களை எடுத்துக் கூறுவதற்குப் பெருமளவில் பயன்படுபவை சித்திர விளக்கப்படங்கள். கண்காட்சிகள், வியா

பாரச் சந்தைகள் போன்ற இடங்களில் பொதுமக்களின் கவனத்தைக் கவருவதற்கு இவை கையாளப்படுகின்றன. பட்டியல்களில்,

சித்திர விளக்கப் படம்



படம் 2·7 a

எடுத்துக்கூறுவதைவிட சித்திரப்படங்களில் எடுத்துக்காட்டப்படும் விவரங்கள் நீண்டநாள் நினைவிலிருப்பவை. மாறியினது மதிப்புக்களை அவைகளின் பண்புக்கேற்ற உருவங்கள் வரைந்து, அவற்றின் வேறுபட்ட தன்மையினை ஒரே அளவுடைய,

எண்ணிக்கையில் மாறுபட்ட பல படங்களாகவோ, அன்றிப் பல் வேறு அளவுகளுடைய ஒரே படமாகவோ சுட்டிக்காட்டலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பகுதியில் 1970, 1971, 1972, 1973ஆம் ஆண்டுகளில் கிடைத்த நெல்விளைச்சல் 3000, 4000, 6000, 7000 டன்களாக இருந்தால், 3, 4, 6, 7 நெல் மூட்டைகளை வரைந்து காட்டலாம். இல்லையேல் ஒவ்வொரு ஆண்டுக்கும் ஒரே நெல் மூட்டையை வரைந்து அதன் கன அளவுகள்மட்டும் 3 : 4 : 6 : 7 என்ற விகிதத்தில் 4 ஆண்டுகளிலும் இருப்பதாகக் காட்டலாம்.

(எ.கா. ஒரு மாநிலத்தில் 3 ஆண்டுகளில் புதிதாகக் கட்டப் பட்டுள்ள பள்ளிகளின் எண்ணிக்கை வருமாறு :

1967	24
1968	72
1969	132

24 பள்ளிகள் = 1 என்ற அளவுகோலில், படம் வரையப் பட்டுள்ளது. (படம் 2.7a)

சித்திர விளக்கப்படங்கள் பாமரமக்களைக் கவர்ந்து, அவர்களும் எளிதில் புரிந்து, நினைவில் கொள்ளச்செய்வனவேயன்றி, மேற் கொண்டு புள்ளியியல் ஆய்வுகளுக்குப் பயன்படா. மேலும், இவற்றை வரைவதற்கு ஓவியத்திறமை வேண்டும். மாறியின் மதிப்புகள் 5,150 3,760, 2,608 போன்று வந்தால் பின்னங்களைப் படத்தில் காட்டல் கடினம்.

வரைபடங்கள் (Graphs)

கீழ்க்காணும் வகைகளில், ஒரு நிகழ்வெண் பரவலை வரை படங்களாக்கித் தெளிவுறக் காட்டலாம்.

1. நேர்க் கோட்டுப்படம் (Line diagram)
2. செவ்வகப் படம் (Rectangular histogram)
3. நிகழ்வெண் பல கோணம் (Frequency polygon)
4. நிகழ்வெண் வரை (Frequency curve)
5. கீழின, மேலின வளர் நிகழ்வெண் வரை (Less Than, Greater than Ogive)

நேர்க் கோட்டுப்படம் (Line Diagram)

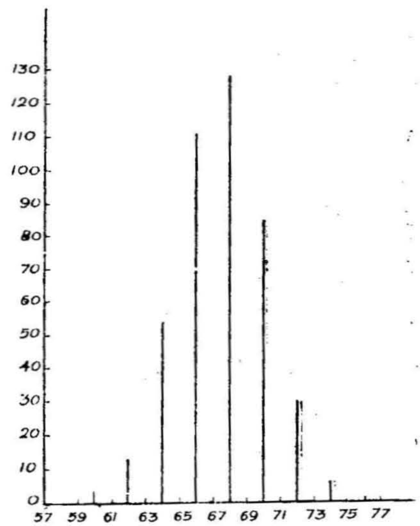
x அச்சின்மீது பிரிவு இடைவெளிகளின் மைய மதிப்புகளைக் குறித்துக் கொண்டு, அவற்றிற்கான புள்ளிகளின் வழியாக அப் பிரிவின் நிகழ்வெண்ணின் விகிதத்தில் வரையப்படும் நேர் கோடுகள் கொண்ட படமே நேர்க் கோட்டுப் படமாகும்.

எ. கா. பரவல் (1)

ஒரு கல்லூரியில் படிக்கும் மாணவர்களின் உயரங்களைத் தரும் நிகழ்வெண் பரவல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இதற்கு ஒரு நேர்க் கோட்டுப்படம் வரைக.

(அங்குலத்தில்) உயரம்	நிகழ் வெண்
59—61	3
61 - 63	13
63—65	54
65—67	111
67—69	128
69—71	85
71—73	30
73—75	6
75—77	1
	431

கோட்டு விளக்கப்படம்

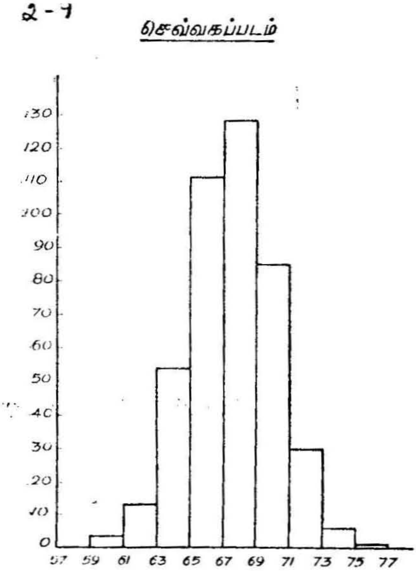


படம் 2·8

பிரிவுகளின் மையப் புள்ளிகளாகிய 60, 62, ... 76-ல் நேர்க் கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் உயரங்கள் முறையே நிகழ்வெண்கள் 3, 13, 54, ... இவற்றினை ஒரு வசதியான அளவு கோலில் குறிக்கின்றன. (படம் 2·8)

செவ்வகப் படம் (Rectanguler Histogram)

இது ஒவ்வொரு உண்மையான பிரிவு இடை வெளியின்மீதும் அதற்குரிய நிகழ் வெண்ணைக் காட்ட வரையப்படும் பல்வேறு செவ்வகங்களைக் கொண்டது. செவ்வகங்களின் பரப்பு நிகழ் வெண்களைக் குறிக்கிறது. ஆனால், பிரிவு இடை வெளியின் நீளம் சமமாக இருப்பதால், செவ்வகங்களின் உயரங்கள் மட்டும் அவை குறிப்பிடும் நிகழ் வெண்களுக்கு ஏற்ற வகையில் மாறுபடுகின்றன. பிரிவு இடைவெளிகள் தொடர்ச்சியாக இருப்பதால் செவ்வகப் படத்திலுள்ள பட்டைகள் ஒன்றுக்கொன்று அருகில் பொருந்தியிருக்கும்.



படம் 2·9

கணிப்புகளின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமாகவும், பிரிவு இடைவெளியின் தூரம் மிகக் குறைவாகவும் இருந்தால் செவ்வகப்படம் முழுமைத் தொகுதியைத் தோராயமாகக் குறிப்பிடுவதால் எந்த நிகழ்வெண் பரவலையும் இழைத்து வரையப்படுகின்றது.

மேலே காணும் செவ்வகப் படம் (2·9) நிகழ்வெண் பரவல் 1க்கு வரையப்பட்டுள்ளது.

குறிப்பு : பிரிவு இடைவெளிகளின் தூரங்கள் ஒன்றாக இராமல், பல்வேறு மதிப்புகளைக் கொண்டிருந்தால், செவ்வகத்தின் பரப்பு நிகழ்வெண்ணைக் குறிப்பதால், செவ்வகத்தின் அகலம் மாற, மாற உயரத்தையும் அதற்கேற்றாற்போல், தக்கவாறு மாற்றியமைக்க வேண்டும்.

எ. கா. கீழ்க்காணும் வார சம்பளப் பட்டியலை ஒரு செவ்வகப் படத்தில் காட்டுக.

வாரச்சம்பளம் (ரூபாயில்)	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை
50 – 70	40
70 – 110	120
110—150	160
150 - 180	90
180 – 230	80
230 - 240	10

செவ்வகங்களின் உயரங்கள் கணக்கிடப்பட்டுக் கீழ்வருமாறு உள்ளன.

வாரச்சம்பளம்	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	இடைவெளி	உயரங்கள்
50— 70	40	20	$\frac{40}{20} = 2$
70—110	120	40	$\frac{120}{40} = 3$
110—150	160	40	$\frac{160}{40} = 4$
150—180	90	30	$\frac{90}{30} = 3$
180—230	80	50	$\frac{80}{50} = 1.6$
230—240	10	10	$\frac{10}{10} = 1$
	500		

விளக்கம்

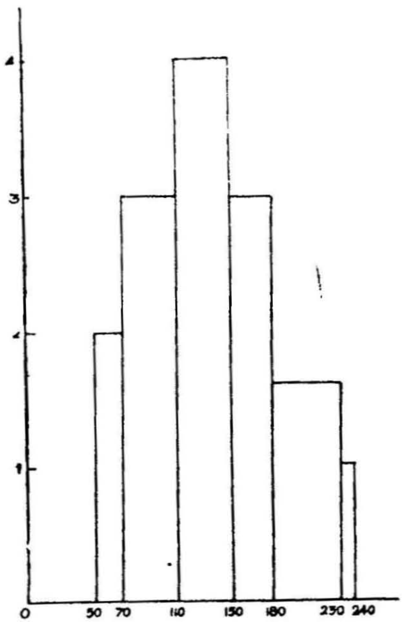
ஒரு செவ்வகப் படத்தை வரையும்போது அதிலுள்ள ஒவ்வொரு செவ்வகத்தின் பரப்பும் அப்பிரிவின் நிகழ்வெண்ணைப் பொறுத்து அமைகிறது.

செவ்வகத்தின் பரப்பு = செவ்வகத்தின் உயரம் × பிரிவு இடைவெளி

பிரிவு இடைவெளி பரவல் முழுவதுக்கும் சமமாக இருந்தால், செவ்வகத்தின் உயரங்கள் நிகழ்வெண்களின் விகிதத்தில் இருக்கும். பிரிவு இடைவெளி மாறும் போது,

$$\text{செவ்வகத்தின் உயரம்} = \frac{\text{செவ்வகத்தின் பரப்பு}}{\text{பிரிவு இடைவெளி}}$$

$$= \frac{\text{பிரிவு நிகழ்வெண்}}{\text{பிரிவு இடைவெளி}}$$



படம் 2·10

என ஒவ்வொரு பிரிவிற்கும் கணக்கிடப்பட்டு வரையப்படுகிறது. (படம் 2.10)

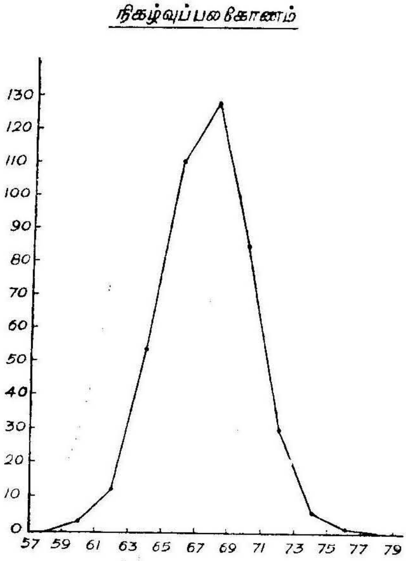
நிகழ்வெண் பலகோணம் (Frequency Polygon)

x ஆய தூரங்களைப் பிரிவுகளின் மைய மதிப்புகளாகவும், y ஆய தூரங்களைப் பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்களாகவும் கொண்டுள்ள புள்ளிகளை, நேர்க்கோடுகளால் சேர்த்தால், நிகழ்வெண் பல கோணம் கிடைக்கிறது.

செவ்வகப் படத்திலுள்ள செவ்வகங்களது உச்சிகளின் நடுப் புள்ளிகளைச் சேர்த்தும் நிகழ்வெண் பல கோணம் வரையலாம். நிகழ்வெண் பலகோணம் பொதுவாக அச்சின்மீது துவங்குவதோ அல்லது முடிவதோ கிடையாது. ஆயினும், முதல் பிரிவின் முன்பு வரக்கூடிய பிரிவின் மையப் புள்ளியில் நிகழ்வெண் பல கோணத்தைத் துவங்கி, இறுதிப் பிரிவுக்கு அடுத்து வரக்கூடிய பிரிவின் மையப் புள்ளியோடு இணைத்து முடிப்பது வழக்கம். நிகழ்வெண் பல கோணத்திற்கும், x அச்சிற்கும் இடையே உள்ள பரப்பு, செவ்வகப் படத்தின் பரப்புக்குச் சமமாதலால், இது மொத்த நிகழ் வெண்ணின் மதிப்பைத் தரும்.

ஒன்றின் மீதொன்றாக (Superimposed) நிகழ்வெண் பல கோணங்களை வரைந்து, இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பரவல்களை ஒப்பிடலாம். ஒரே அடிக்கோட்டில் இரு செவ்வகப் படங்களை வரைந்து ஒப்பிடுவது தெளிவாக இராது. ஆனால், நான்கு அல்லது ஐந்து நிகழ்வெண் பலகோணங்களை வரைந்து அவற்றிற்கான நிகழ்வெண் பரவல்களை எளிதில் ஒப்பிடலாம். ஒவ்வொரு நிகழ்வெண் பலகோணத்திற்கும் வெவ்வேறு குறியீடு களும், நிறங்களும் தந்தால் வேறுபாடு நன்கு தெரியும். செவ்வகப் படத்திலுள்ள பட்டைகள் ஒவ்வொரு பிரிவிலுமுள்ள நிகழ் வெண்களைத் தெளிவாகக் காட்டுகின்றன. ஆனால் நிகழ்வெண் பலகோணம் அத்தகையதல்ல. நிகழ்வெண் பலகோணத்தில் செவ்வகப் படத்தைப்போன்று ஏற்ற, இறக்கங்கள் பெருமளவு இல்லாததால், பரவலின் பொதுத் தன்மையினைச் செவ்வகப் படத்தைவிட இது நன்கு பிரதிபலிக்கிறது. இருவகை வரை படங்களிலிருந்தும் பரவல் சமச்சீருடையதா, இல்லையா என அறியலாம்.

நிகழ்வெண் பலகோணங்களில் ஒவ்வொரு பிரிவிற்கும், நிகழ் வெண்களின் சதவீதங்களைக் கணக்கிட்டு வரைந்தால், பரவல்களின் அடிப்படை வடிவம் பாதிக்கப்படாமல், ஒப்பிட்டுப் பார்க்க எளிதாயிருக்கும்.

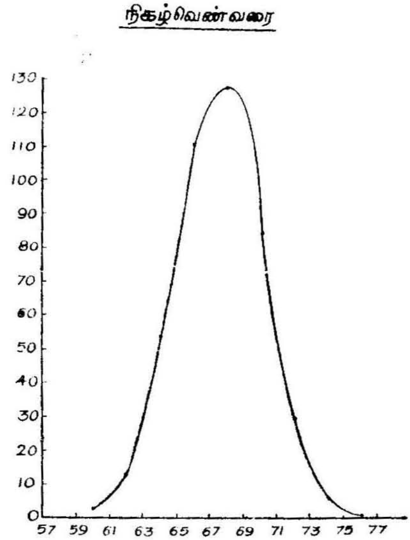


படம் 2·11

நிகழ்வெண் பரவல் (1)-க்கான நிகழ்வெண் பல கோணம் மேலே வரையப்பட்டுள்ளது.

நிகழ்வெண் வரை (Frequency Curve)

நிகழ்வெண் பல கோணத்தின் பிரிவு இடைவெளிகளைச் சிறிதாக்கிக் கொண்டேயும், மொத்த நிகழ்வெண்களின் மதிப்பை அதிகமாக்கிக்கொண்டேயும் சென்றால், இதன் கோணப் புள்ளிகள் ஒன்றுக்கொன்று மிக அண்மையில் இருக்கும். இப் புள்ளிகளை அளவுகோலின் உதவியின்றி கையாலேயே இழைத்து வரையப்படும் வரையே நிகழ்வெண் வரையாகும். இவ்வரைக்கும், x அச்சிற்கும் இடையே உள்ள பரப்பு, மொத்த நிகழ்வெண்ணைத் தருகிறது. இது ஒரு இலட்சிய வளைகோடு. கொடுக்கப்பட்டுள்ள மைய மதிப்புகள் x-ஆயதூரங்களாகவும், நிகழ்வெண்கள் y ஆய தூரங்களாகவும் உள்ள புள்ளிகளைக் கையாலே இழைத்து வரையப்படும் இவ்வரையின் உதவியால், புள்ளி விவரங்களைக் கணக்கியல் முறைக்கு உட்படுத்தி, உட்கருத்துக்களை ஆராய இயலும். (படம் 2·12)



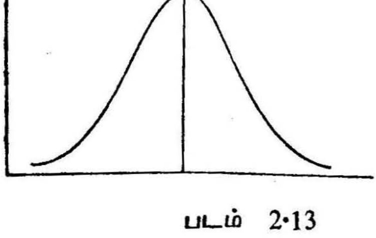
படம் 2·12

நிகழ்வெண் வரையில் சில வகைகள்

(1) சமச்சீருடைய அல்லது மணிவடிவ வரை
(2) ஓரளவு சமச்சீரற்ற அல்லது கோட்டமுடைய வரை
(3) பெருமளவு சமச்சீரற்ற, அல்லது J-வடிவ அல்லது இடமாற்றம் அடைந்த J-வடிவ வரை
(4) U-வடிவ வரை
(5) இரு முகட்டுவரை
(6) பல் முகட்டுவரை என்பனவாகும்.

(1) சமச்சீருடைய வரை

மைய நிலைக்கோட்டை மீப்பெரு நிலைத்தூரமாகக் கொண்டு அதிலிருந்து இருமருங்கிலும் சமதூரத்தில் உள்ளராசிகளின் நிகழ்வெண்கள் சமமாக இருக்கும். நிகழ்வெண்கள் நடுவில் மீப் பெருமதிப்பையடைந்து, இருபக்கங்களிலும் குறைந்து கொண்டேசென்று பூஜ்யத்தை அடைகின்றன.

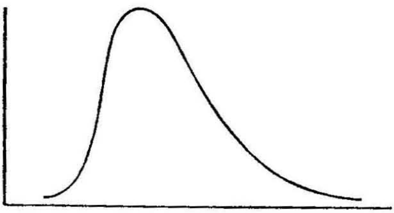


படம் 2·13

(2) ஓரளவு கோட்டமுடைய வரை

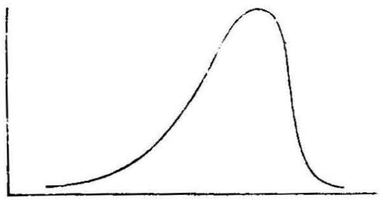
வரையில் சமச்சீர் இல்லாவிடில் அது கோட்டமுடையதெனக் கூறப்படுகிறது. இந்த வரையில் ஒரு வால் பகுதி மற்றதைவிட நீளமாக உள்ளது. நீண்ட வால் பகுதி நேர்க்குறி உடைய பக்கத்தில் இருந்தால், கோட்டம் நேர்க்குறி உடையதெனவும், நீண்ட வால் பகுதி எதிர்க் குறி உடைய பக்கத்தில் இருந்தால் கோட்டம் எதிர்க்குறி உடையது எனவும் கூறுகிறோம்.

நேர்க்கோட்டமுடைய வரை



படம் 2·14

எதிர்க்கோட்டமுடைய வரை



படம் 2·15

(3) (*a*) பெருமளவில் கோட்டமுடைய *J*-வடிவவரை

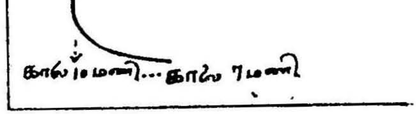
நிகழ்வெண்களின் மீப்பெரு மதிப்பு பிரிவு எல்லைகளின் ஒரு முனையிலிருந்தால் *J* வடிவ வரை கிடைக்கிறது. எடுத்துக் காட்டாக, ஒரு மாவட்டத்தில் உள்ள மக்களின் வருமானத்தின் பரவல் *J* வடிவ வரையாக இருக்கும். மிகுந்த வருமானம் உடைய மக்கள் ஒரு சிலரே இருப்பார்கள்.

J வடிவ வரை



படம் 2.16

மாறுபட்ட J வடிவ வரை



படம் 2·17

(3) (*b*) மாறுபட்ட *J* வடிவ வரை

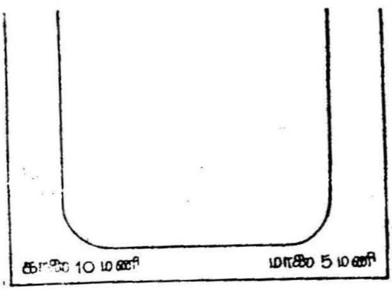
சென்னை நகரில் பேருந்துப்பிரயாணம் செய்வோர் எண்ணிக்கை காலை 7 மணியிலிருந்து அதிகரித்துக்கொண்டே

வந்து காலை 10 மணிக்கு உச்ச மதிப்பை அடைகிறது. இதனை ஒரு மாறுபட்ட J வடிவவரையாகக்காணலாம்.

(4) U-வடிவ வரை

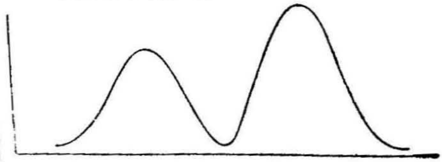
மீப்பெரு நிகழ்வெண் வீச்சின் இருமுனைகளிலும், மீச்சிறு நிகழ்வெண் நடுவிலும், இருந்தால் U-வடிவ வரை கிடைக்கிறது. எடுத்துக்காட்டாக, காலை 10 மணிக்கும், மாலை 5 மணிக்கும் பேருந்தில் பயணம் செய்வோர் எண்ணிக்கை மிக அதிகமாகவும், இடையில் குறைந்தும் காணப்படுகிறது.

U வடிவ வரை



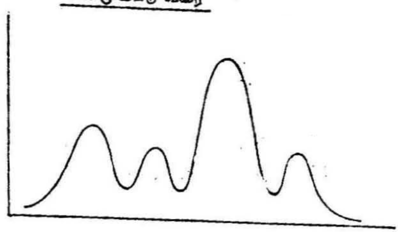
படம் 2·18

இரு முகட்டு வரை



படம் 2·19

பல முகட்டு வரை



படம் 2·20

(5) **இரு முகட்டு வரையில்** இரு மீப்பெரு மதிப்புகள் உள்ளன.

(6) **பல் முகட்டு வரையில்** இரு மீப்பெரு மதிப்புகளுக்குமேல் உள்ளன.

வளர் நிகழ்வெண் (குவிவு நிகழ்வெண்) பட்டியல் (Cumulative Frequency Table)

ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியிலும் காணப்படும் நிகழ்வெண்களை நிகழ்வெண் பட்டியல் தருகிறது. ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லைக்குக் கீழேயோ அல்லது மேலேயோ இருக்கின்ற நிகழ்வெண்களை வளர் நிகழ்வெண் பட்டியல் தருகிறது.

கீழின வளர் நிகழ்வெண் பட்டியல் (Less than Cumulative Frequency Table)

உண்மையான பிரிவு இடைவெளிகளின் மேல் எல்லைகளைக் குறித்துக் கொண்டு அவை ஒவ்வொன்றுக்கும் கீழே எத்தனை

நிகழ்வெண்கள் குவிந்துள்ளன எனக் கணக்கிட்டு, கீழின வளர் நிகழ்வெண் பட்டியலைத் தயாரிக்கிறோம். இறுதி மேல் எல்லைக்குக் கீழே மொத்த நிகழ்வெண்ணும் இருப்பதால், வளர் நிகழ்வெண் பட்டியலைச் சரிபார்த்திட, இவ்வுண்மையைப் பயன்படுத்தலாம்.

முன்பு தரப்பட்ட மாணவரது உயரங்களுக்கான பட்டியலுக்குக் கீழின வளர் நிகழ்வெண்கள் காண்க.

மேல் எல்லைகளுக்குக் கீழே	வளர் நிகழ்வெண்
61	3
63	16
65	70
67	181
69	309
71	394
73	424
75	430
77	431

குறிப்பு : 61-க்குக் கீழே 3 ராசிகளும், 61—63 என்ற பிரிவில் 13 ராசிகளும் உள்ளன. எனவே, 63-க்குக் கீழே உள்ள மொத்த ராசிகளின் எண்ணிக்கை $3 + 13 = 16$ ஆகும். இவ்வாறே 65-க்குக் கீழ் $16 + 54 = 70$ ராசிகள் உள்ளன. அடுத்தடுத்து நிகழ்வெண்களைக் கூட்டிச் சென்றால், மொத்த ராசிகள் 431 ம் இறுதி மேல் எல்லை 77-க்குக் கீழ் இருக்கும்.

கீழின வளர் நிகழ்வெண் பல கோணம் (Less than Cumulative Frequency Polygon)

x அச்சில் மேல் எல்லைகளையும், y அச்சில் அவற்றிற்கான வளர் நிகழ்வெண்களையும் குறித்துக்கொண்டு, ஒரு கீழின வளர் நிகழ்வெண் பட்டியலை வரைபடமூலம் எடுத்துக் காட்டுவதே, கீழின வளர் நிகழ்வெண் பல கோணம். இப் பல கோணத்தின் புள்ளிகளை ஒரு இழைத்த வரையினால் சேர்த்தால் கீழின, வளர் நிகழ்வெண்வரை அல்லது ஓகைவ் (Less than ogive) கிடைக்கிறது.

ஓகைவின் பண்புகள்

முதலில் சிறிது சிறிதாக அதிகரித்து, நடுவில் பெருமளவு அதிகரித்துக் குறிப்பிடத்தக்க மாற்றம் அடைந்து, இறுதியில்

மீண்டும் சிறிதுசிறிதாகக் குவிவு நிகழ்வெண்கள் அதிகரிப்பதைப் பட்டியலில் காண்கிறோம். S வடிவில் உள்ள இவ்வரை தோளின் வடிவத்தில் அமைந்திருப்பதால் 'ஓகைவ்' எனப்படுகிறது. குறை குறியுடைய நிகழ்வெண்கள் இல்லாததால், இது எப்பொழுதும் அதிகரித்துக் கொண்டே செல்கிறது. வளர் நிகழ்வெண் வரையில் x அச்சின்மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் வரையப்பட்ட நிலைக்கோட்டின் உயரம், மாறியின் அம்மதிப்பு வரை உள்ள வளர் நிகழ்வெண்ணைத் தருகிறது.

நிகழ்வெண் வரையில் துவக்கத்திலிருந்து நிலைக்கோட்டின் இடப்பக்கம்வரை உள்ள பரப்பு, மாறியின் மதிப்பிற்கான வளர் நிகழ்வெண்ணைத் தருகிறது. எனவே, ஓகைவ் நிகழ்வெண் வரையின், தொகை வரையாகக் (integral curve) கருதப்படுகிறது.

ஓகைவின் பயன்கள்

மொத்த நிகழ்வெண் N ஆனால், $\frac{N}{4}, \frac{N}{2}, \frac{3N}{4}$ என்ற நிகழ் வெண்களுக்கான மாறியின் மதிப்புகள் முறையே முதற்கால் மானம் (first quartile) அல்லது கீழ்க்கால்மானம்(Lower quartile), இடைநிலை (Median), மூன்றும் கால்மானம் (third quartile) அல்லது மேல் கால்மானம் (upper quartile) எனக் கூறப்படு கின்றன. இவற்றைப் பெற,

முறையே $\frac{N}{4}, \frac{N}{2}, \frac{3N}{4}$ என y அச்சின் மீதுள்ள புள்ளி களிலிருந்து செங்குத்துக் கோடுகள் வரைந்தால் அவை ஓகைவை மூன்று புள்ளிகளில் சந்திக்கும். இப்புள்ளிகளிலிருந்து 3 அச்சுக்குச் செங்குத்துக் கோடுகள் வரைந்தால், அக்கோடுகளின் அடிப் புள்ளிகளின் ஆயதூரங்களே கீழ்க் கால்மானம், இடை நிலை, மேல் கால்மானம் ஆகும். இதுபோன்றே நிகழ்வெண் பரவலைப் பத்து பகுதிகளாகப் பிரிக்கும் பத்து மானங்கள், நூறு பகுதிகளாகப் பிரிக்கும் நூற்று மானங்கள் இவற்றையும் ஓகைவின் மூலம் காணலாம்.

ஓகைவின் திருகு புள்ளியின் (point of inflexion) x ஆய தூரமே முகடாகும். முகடு, மீப்பெரு நிகழ்வெண்ணைக் கொண்ட மாறியின் மதிப்பாகும். எனவே, நிகழ்வெண் வரையில் உச்சிப் புள்ளிக்கான x ஆயதூரம் முகடைத் தருகிறது. நிகழ்வெண்கள் மீப்பெரு மதிப்பை அடையும்வரை அதிகரித்துக் கொண்டே சென்று, முகட்டிற்குப் பிறகு குறைந்துகொண்டே செல்வதால்,

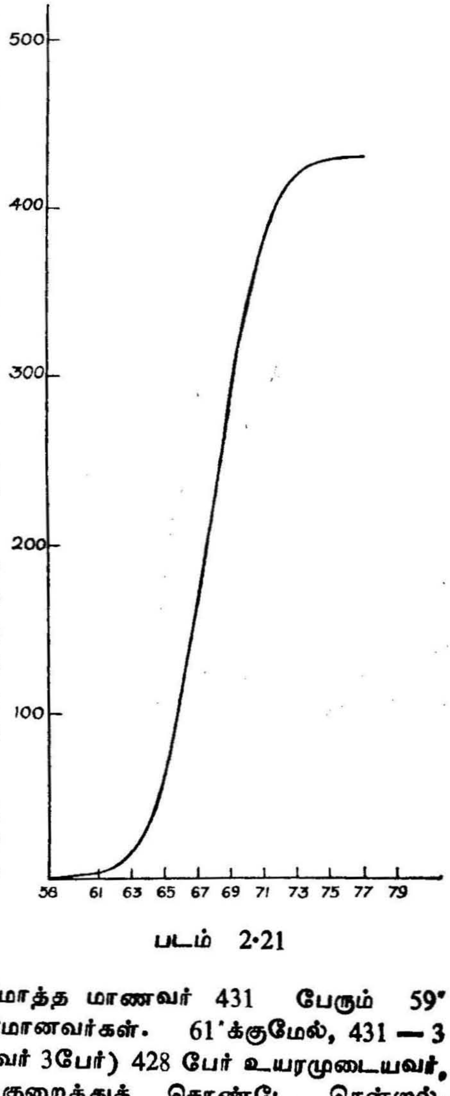
வளர் நிகழ்வெண் வரையில் முகட்டிற்கருகே பெருமளவு அதிகரிப்பு ஏற்பட்டு, x அச்சோடு ஓகைவின் தொடுவரை ஏற்படுத்தும் கோணம் மீப்பெரு மதிப்பை உடையதாயுள்ளது. எனவே, ஓகைவின் திசை மாற்றப் புள்ளியைக் கண்டு அதன் x மதிப்பை முகடாகக் கொள்கிறோம்.

முன்பு தயாரிக்கப்பட்ட கீழின வளர் நிகழ்வெண் பட்டியலுக்கு ஓகைவ் வரையப்பட்டுள்ளது. (படம் 2.21)

மேலின வளர் நிகழ்வெண் பட்டியல் (Greater than Cumulative frequency distribution) :

பிரிவு இடைவெளிகளின் கீழ் எல்லைகளை ஒருபுறம் குறித்துக் கொண்டு, அவை ஒவ்வொன்றிற்கும் மேலே உள்ள நிகழ்வெண்ணைத் தருவதுதான் மேலின நிகழ்வெண் பட்டியல்.

முன்பு தரப்பட்ட உயரங்களுக்கான பட்டியலின் மேலின வளர் நிகழ்வெண் பரவலைக் காண்போம்.

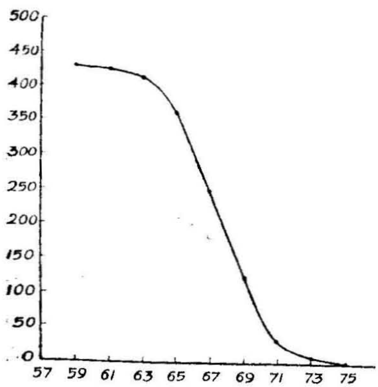


படம் 2·21

கொடுக்கப்பட்டுள்ள மொத்த மாணவர் 431 பேரும் 59" உயரத்தைவிட அதிக உயரமானவர்கள். 61"க்குமேல், 431 — 3 (61"க்குக்கீழ் உயரமுடையவர் 3பேர்) 428 பேர் உயரமுடையவர், இவ்வாறு அடுத்தடுத்துக் குறைத்துக் கொண்டே சென்றால், இறுதிப் பிரிவின் நிகழ்வெண், இறுதி கீழ் எல்லையைவிட அதிகமாக இருக்கும். நமது வளர் நிகழ்வெண் பட்டியலை இவ்வாறு சரிபார்த்திடலாம்.

கீழ் எல்லை	கீழ் எல்லைக்குமேல் மதிப்புகளையுடைய ராசிகளின் வளர் நிகழ்வெண்
59	431
61	428
63	415
65	361
67	250
69	122
71	37
73	7
75	1

x அச்சில் பிரிவுகளின் கீழ் எல்லைகளையும், y அச்சில் அவற்றிற்கு மேல் மதிப்புகளையுடைய வளர் நிகழ் வெண்களையும் எடுத்துக் கொண்டு, (59, 431) (61, 428), ... (75, 1) என்ற புள்ளிகளை நேர்க் கோடுகள் மூலம் சேர்த்தால் நமக்கு மேலின வளர் நிகழ்வெண் பல கோணம் கிடைக்கிறது. இப் பலகோணத்தின், கோணப்புள்ளிகளின் வழியாக இழைத்து வரையப்படும் வரையே மேலின வளர் நிகழ் வெண் வரை அல்லது மேலின ஓகைவ் ஆகும். (படம் 2·22)



படம் 2·22

மேலின ஓகைவிலும் வளர் நிகழ்வெண் $\frac{N}{2}$ க்கு ஒத்த x-ன் மதிப்பு இடைநிலையாக இருக்குமாதலால், இரு வளர் நிகழ்வெண்

வரைகளும் வரையப்படும்போது, அவை சந்திக்கும் புள்ளியின் ஆயதூரமே இடை நிலையாகும்.

நூற்று மானங்கள், பத்து மானங்கள் (Percentiles, Deciles)

மொத்த நிகழ்வெண் N ஆனால், x-வது நூற்றுமானம் $\frac{Nx}{100}$ என்ற வளர் நிகழ்வெண்ணுக்கு ஒத்த x-ன் மதிப்பாகும். சீர்படா விவரங்களை மதிப்பிற்கேற்ற வரிசையில் அமைத்தபின் x-வது நூற்றுமானம், $\frac{x(N+1)}{100}$ வது மதிப்பாகும். எனவே, 50-வது நூற்றுமானம் $\frac{50 \times N}{100} = \frac{N}{2}$ என்ற வளர்நிகழ்வெண்ணுக்கு உரியது. ஆதலால் அது இடைநிலையாகும். இதுபோன்றே $\frac{25N}{100} = \frac{N}{4}$, $\frac{75N}{100} = \frac{3N}{4}$ என்ற வளர் நிகழ்வெண்களுக்கு ஒத்த x-ன் மதிப்புகளாகிய கீழ்க் கால்மானம் (முதற் கால்மானம்), மேல் கால்மானம் (மூன்றுவது கால்மானம்) ஆகியவை முறையே 25-வது 75 வது நூற்றுமானங்களாகும்.

7 வது பத்து மானம் என்பது $\frac{7N}{10}$ என்ற வளர் நிகழ்வெண்ணுக்கு உரிய x-ன் மதிப்பாகும். எனவே, இடைநிலை 5வது பத்து மானமாகும்.

90 வது நூற்றுமானத்திற்கும், நூறுவது நூற்றுமானத்திற்கும் (9 வது பத்து மாதைத்திற்கும், 10-வது பத்து மானத்திற்கும்) இடையே உள்ள வேறுபாடு நூற்றுமான வீச்சு (Percentile Range) எனப்படுகிறது.

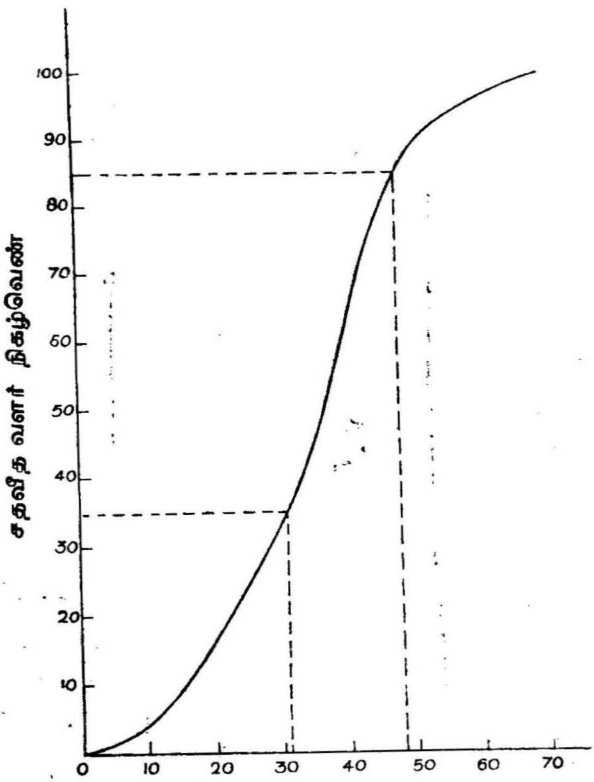
நூற்று மானவரை (Percentile Curve)

39 வது நூற்று மானம் காணவேண்டுமாயின், முதலில் $\frac{39N}{100}$ என்ற குவிவு நிகழ்வெண் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள அச்சின்மீதுள்ள புள்ளியிலிருந்து ஒரு செங்குத்துக்கோடு வரையவேண்டும். அது கீழின வளர் நிகழ் வெண் வரையை வெட்டும் புள்ளியிலிருந்து x அச்சிற்கு ஒரு செங்குத்துக் கோடு வரைந்தால், அக்கோட்டின் அடிப்புள்ளியின் x ஆயதூரமே 39 வது நூற்றுமானமாகும்.

நூற்றுமானங்களை வேறொரு முறையிலும் எளிதில் காணலாம். மொத்த வளர் நிகழ்வெண்ணை நூறாகக் கொண்டு, மற்ற பிரிவு

களின் வளர் நிகழ்வெண்களையும் சதவீதத்தில் கணக்கிடல் வேண்டும். இச் சதவீத வளர் நிகழ்வெண்களுக்கு ஓகைவ் வரைந்தால், அதுவே நூற்றுமான வரையாகும். இப்போது 39 வது நூற்றுமானம் என்பது, y ஆயத்தூரம் 39 ஆக இருக்கும்போது, x-ன் மதிப்பாகும். மதிப்பெண்களுக்கான ஒரு நூற்றுமான வரையில் மதிப்பெண் 65க்கான நூற்றுமானதூரம் அல்லது மதிப்பிடம் என்பது (Percentile rank), x ஆயதூரம் 65 ஆக இருக்கும்போது வரையின்மீதுள்ள புள்ளியின் y ஆயதூரமாகும்.

ஒரு மாணவர் பெறும் மதிப்பெண்கள் கணக்கில் 60%, ஆங்கிலத்திலும் 60% என்றால் அவர் இரு பாடங்களிலும் சமத்திறன்



படம் 2·23 மதிப்பெண்கள்

உடையவர் எனக் கூறுவதைவிட, இதர மாணவருடன் ஒப்பிடும்போது அவரது தரம் என்னவென்று அறிவதே பயனுடையதாகும்

நூற்றுமான வரையின்மூலம் அவர் கணக்கில் 47வது நூற்றுமான தரமும், ஆங்கிலத்தில் 70 வது நூற்றுமானதரமும் பெற்றுள்ளார் என அறிந்தால், மாணவரது ஆங்கிலத் தேர்ச்சி கணக்கைவிடப் பாராட்டும் வகையில் அமைந்துள்ளது எனலாம். எனவே கல்வி, உளவியல் பற்றிய புள்ளி விவரங்களில் நூற்றுமானவரை பெரிதும் பயன்படுகிறது. மேலும் வீச்சு ஒன்ருகவும், பிரிவு இடைவெளிகள் வெவ்வேருகவும் உடைய, இரண்டிற்கு மேற்பட்ட நிகழ்வெண் பரவல்களை ஒப்பிடும்போது நூற்றுமான வரைகள் உதவுகின்றன.

பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலுக்கு நூற்றுமான வரை வரைந்து, அதிலிருந்து 35, 85-வது நூற்றுமானங்களைக் கணக்கிடுக.

பிரிவு இடைவெளி	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70
நிகழ்வெண்	15	45	60	82	110	34	14

மேல் எல்லை	வளர் நிகழ்வெண்	சதவீதம்
10	15	4·16
20	60	16·6
30	120	33·3
40	202	61·7
50	312	87·0
60	346	96
70	360	100.

85-வது நூற்றுமானம் $= \frac{85N}{100}$ என்ற நிகழ்வெண்ணுக்கு ஒத்த x-ன் மதிப்பு

$= \frac{85 \times 360}{100}$,, ,,

$=$ 306 க்கு ஒத்த x-ன் மதிப்பு

$$= 40 + \frac{306 - 202}{110} \cdot 10$$

$$= 40 + \frac{104}{110} \times 10$$

$$= 40 + 9{\cdot}45.$$
$$= 49{\cdot}45.$$

35-வது நூற்றுமானம் $= \frac{35N}{100}$ ஆவது ராசியின் மதிப்பு

$$= \frac{35 \times 360}{100} \quad ,,$$
$$= 126 \quad ,,$$

$$30 + \frac{126 - 120}{82} \cdot 10$$

$$= 30 + \frac{60}{82}$$

$$= 30 + 0{\cdot}7$$

$$= 30{\cdot}7$$

வரைபடத்திலிருந்து (படம் 2.23) இவற்றின் மதிப்புகள் முறையே, 49·1 30·9 எனப் பெறுகிறோம்.

எ. கா.

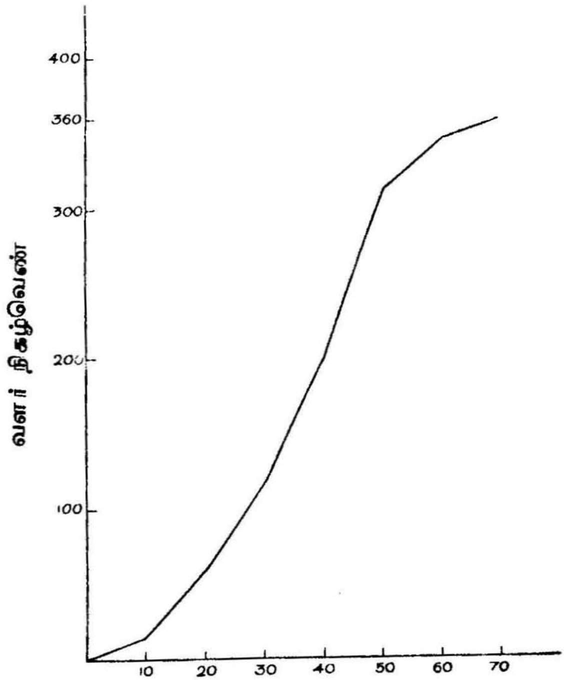
பின்வரும் பரவலுக்கு (i) கீழின வளர் நிகழ்வெண் பலகோணம் (less than cumulative polygon) (ii) மேலின வளர் நிகழ்வெண் பலகோணம் (greater than cumulative polygon) இவற்றை வரைக.

0—10	15
10—20	45
20—30	60
30—40	82
40—50	110
50—0	34
60—70	14
மொத்தம்	360

(i) **கீழின வளர் நிகழ்வெண் பட்டியல்**

மேல் எல்லை	10	20	30	40	50	60	70
குவிவு நிகழ்வெண்	15	60	120	202	312	346	360

மேல் எல்லைகளை x-அச்சிலும், குவிவு நிகழ்வெண்களை y அச்சிலும் எடுத்துக்கொண்டு, புள்ளிகள் (10, 15), (20, 60), (30, 120)......(70, 360) இவற்றை நேர்க்கோடுகளால் இணைத்தால் கீழின வளர் நிகழ்வெண் பலகோணம் கிடைக்கும்.



படம் 2·24

(ii) **மேலின வளர் நிகழ்வெண் பட்டியல்**

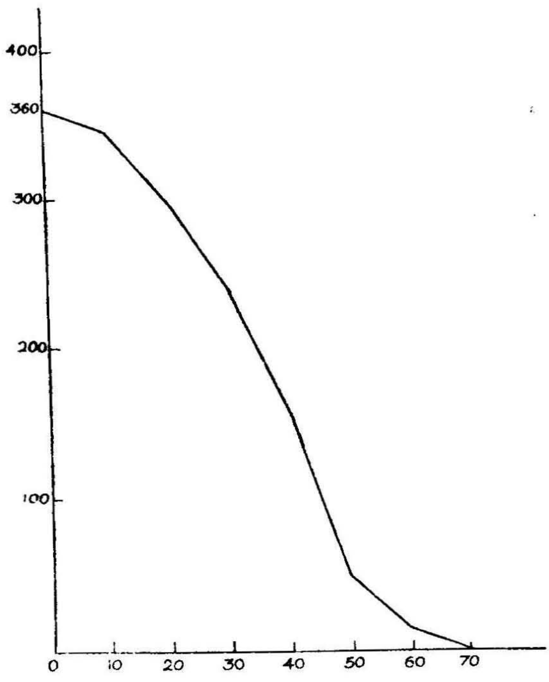
கீழ் எல்லை	0	10	20	30	40	50	60
குவிவு நிகழ்வெண்	360	345	300	240	158	48	14

கீழ் எல்லைகளை x-அச்சிலும், குவிவு நிகழ்வெண்களை x-அச்சிலும் எடுத்துக் கொண்டு, புள்ளிகள் (0, 360), (10, 345)...

...(60, 14) இவற்றை நேர்கோடுகளால் இணைத்தால் மேலின வளர்நிகழ்வெண் பல கோணம் கிடைக்கும்.

லாரன்சு வரை

நிகழ்வெண்கள், மாறிகள் இரண்டிற்கும் அவற்றின் குவிவு மொத்தங்களின் சதவீதங்கள் கணக்கிட்டு *x*, *y* இரு அச்சுகளிலும் ஒரே அளவுத் திட்டத்தை எடுத்துக்கொண்டு 0—100 வரை குறிப்பிட்டு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்களுக்குப் புள்ளிகளைக் குறித்து, ஒரு வரையை இழைத்து வரைந்தால், அது லாரன்சு வரையாகும்.

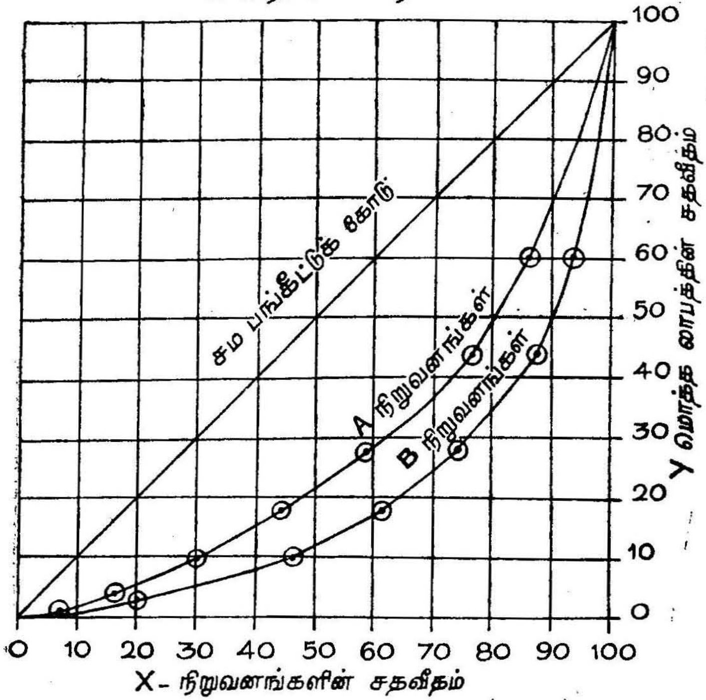


படம் 2·25

குவிவு நிகழ்வெண் சதவீதம் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், மாறியின் குவிவு சதவீத மதிப்பையும், மாறியின் குவிவு சதவீத மதிப்புத் தரப்பட்டிருந்தால், குவிவு நிகழ்வெண் சதவீதத்தையும் காண இது பயன்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு நகரத்திலுள்ள மொத்த ஆலைகளில் 20% ஆலைகள், மொத்த லாபத்தில் 85% ஐப் பெறுவதாகக் கொண்டோமானுல், மீதமுள்ள

15% லாபத்தை மட்டும் பெரும்பாலான 80% ஆலைகள் பகிர்ந்து கொள்கின்றன என்பதால், அந்நகரில் இலாபப் பங்கீட்டில்

லாரென்சு வரை



படம் 2·26

பெருமளவு சமனின்மை நிலவுகிறது என உணர்கிறோம். இது போன்றே ஊதியங்கள், நிலங்கள், செல்வம், மதிப்பெண்கள் போன்றவை சீராகப் பரவியுள்ளனவா அன்றி பெரும் ஏற்றத் தாழ்வுடன் சிதறியுள்ளனவா, என ஆராய லாரன்சு வரை பொருளாதாரத்தில் பெரிதும் பயன்படுகிறது.

லாரன்ஸ் வரை x அச்சில் (0, 0)-வில் தொடங்கி, சதுரத்தின் எதிர் முனையாகிய (100, 100) வரை செல்கிறது. சதுரத்தின் மூலை விட்டத்தில் எந்தப் புள்ளியை எடுத்தாலும், அதன் x ஆய தூரம் $= y$ ஆயதூரம் ஆதலால், முற்றிலும் சமத்தன்மையுடைய லட்சியப் பரவலை மூலைவிட்டம் குறிக்கிறது. நாம் வரையும் லாரன்ஸ் வரை

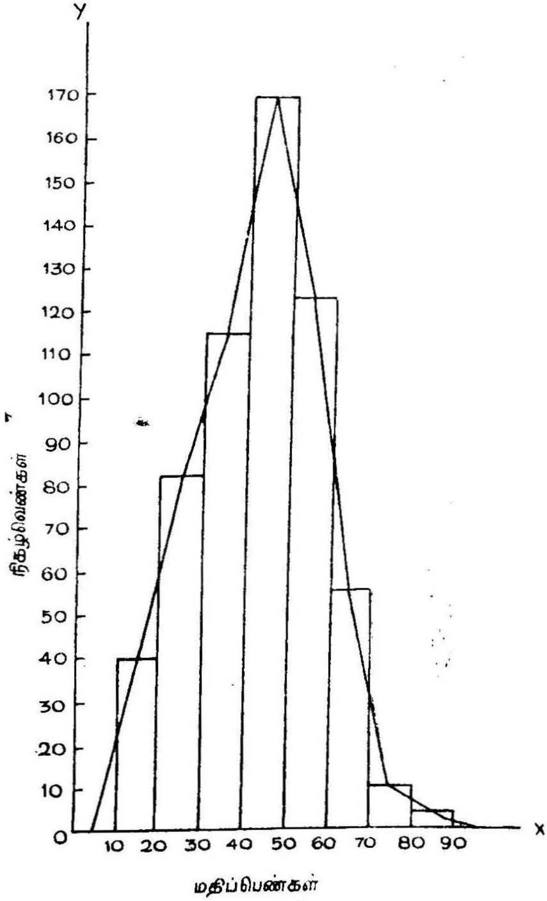
எவ்வளவுக்கெவ்வளவு இம் மூலைவிட்டத்திலிருந்து விலகி வருகிறதோ, அவ்வளவுக்கவ்வளவு பரவலில் சமனின்மை காணப்படுகிறது என அறிகிறோம். இரு பரவல்களின் லாரன்ஸ் வரைகளை வரைந்து, அவற்றில் எந்த வரை சதுரத்தின் மூலை விட்டத்திலிருந்து அதிகம் விலகிச் செல்கிறதோ, அந்தப் பரவலில் அதிக மேடு பள்ளங்கள் உள்ளன என உணர்கிறோம்.

எ. கா. 1

1. கீழ்க்காணும் பட்டியல் ஆங்கிலத் தேர்வில் ஒரு பள்ளியின் 600 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களைத் தருகிறது. செவ்வகப் படத்தையும், நிகழ்வெண் பலகோணத்தையும் ஒரே படத்தில் வரைக.

மதிப்பெண்கள்	நிகழ்வெண்
10—20	40
20—30	82
30—40	115
40—50	170
50—60	123
60—70	56
70—80	10
80—90	4
	600

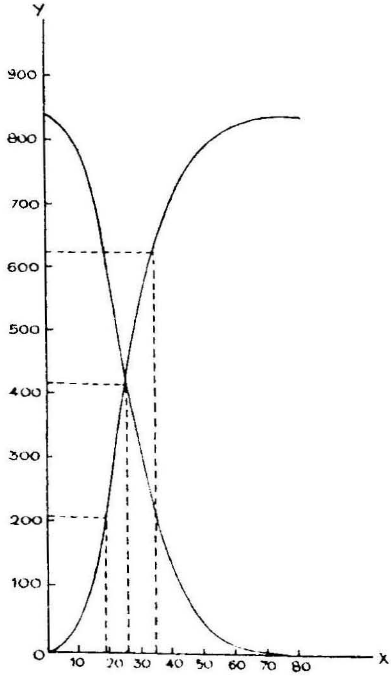
எ. கா. 2



படம் 2·27

1931 ஆம் ஆண்டு இந்தியாவில் திருமணமான பெண்களின் எண்ணிக்கையைக் கீழ்க்காணும் பட்டியல் தருகிறது. இரு வளர் நிகழ்வெண் வரைகளையும் வரைந்து, அவற்றிலிருந்து இடைநிலையையும், கால்மானங்களையும் பெறுக.

வயது	நிகழ்வெண்	வயது	நிகழ்வெண்	வயது	நிகழ்வெண்
0—5	8	25 – 30	128	50—55	22
5—10	42	30—35	106	55—60	11
10—15	73	35—40	71	60 - 65	7
15—20	130	40 – 45	54	65—70	3
20—25	148	45—50	31	70-ம் அதற்கு மேலும்	3



படம் 2·28

கீழின வளர் நிகழ்வெண் பரவல் (Less than cumulative Distribution).

வயது மேல் எல்லை	5	10	15	20	25	30	35	40
குவிவு நிகழ்வெண்	8	50	123	253	401	529	635	706
வயது மேல் எல்லை	45	50	55	60	65	70	75	
குவிவு நிகழ்வெண்	760	791	813	824	831	834	837	

மேலின வளர் நிகழ்வெண் பரவல் (Greater than cumulative Distribution)

வயது கீழ் எல்லை	0	5	10	15	20	25	30	35
குவிவு நிகழ்வெண்	837	829	787	714	584	436	308	202
வயது கீழ் எல்லை	40	45	50	55	60	65	70	75
குவிவு நிகழ்வெண்	131	77	46	24	13	6	3	0

வாய்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி,

$$\text{இடைநிலை } M = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c$$

$$= 25 + \frac{418{\cdot}5 - 401}{128} \times 5$$

$$= 25{\cdot}68.$$

$$\text{முதல் கால்மானம் } Q_1 = l + \frac{\frac{N}{4} - m}{f} \times c$$

$$= 15 + \frac{209{\cdot}25 - 123}{130} \times 5$$

$$= 18{\cdot}319$$

$$\text{மூன்றும் கால்மானம் } Q_3 = l + \frac{\frac{3N}{4} - m}{f} \times c$$

$$= 30 + \frac{627{\cdot}75 - 529}{106} \times 5$$

$$= 34{\cdot}659$$

$$\text{கால்மானம் விலக்கம்} = Q \cdot D \cdot = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{34{\cdot}659 - 18{\cdot}319}{2}$$

$$= \frac{16{\cdot}340}{2}$$

$$= 8{\cdot}17.$$

வரைபடத்திலிருந்து,

இடைநிலை — 25·8

முதல் கால்மானம் — 18·2

மூன்றும் கால்மானம் — 34·8

எ. கா. 3

2. கீழ்க்காணும் விவரங்கள் 900 பள்ளி மாணவர்களுடைய புத்தி கூர்மை எண்களின் நிகழ்வெண் பரவலைத் தருகின்றன.

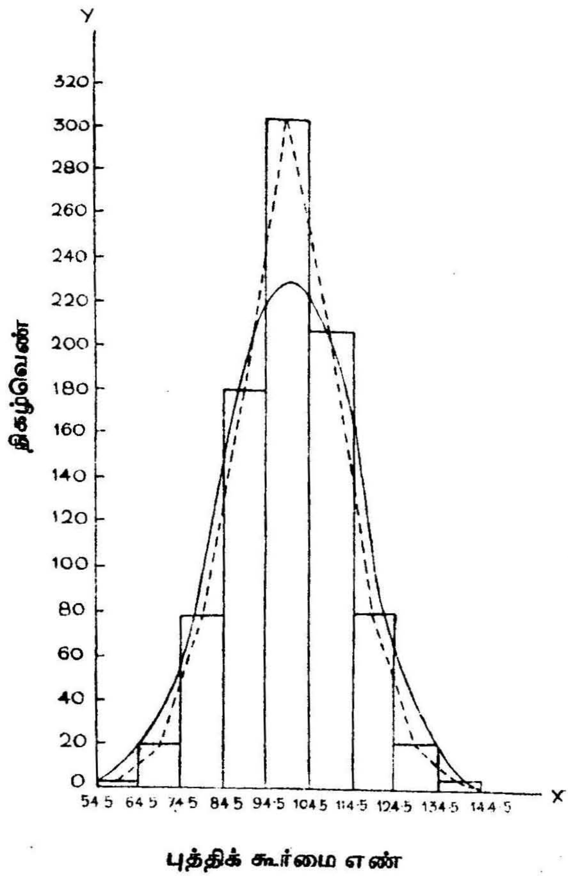
(i) நிகழ்வெண் பலகோணம்

(ii) இழைத்து வரையப்பட்ட நிகழ்வெண் வரை

(iii) செவ்வகப் படம்

இவைகளை வரைக.

I Q.	நிகழ்வெண்
55—64	3
65—	20
75—	78
85—	180
95—	305
105—	208
115—	80
125—	**21**
135—144	5



படம் 2·29

(i) நிகழ்வெண் பலகோணம்

IQ.	54·5—64·5	64·5—74·5	74·5—84·5	84·5—94·5	94·5—104·5
	3	20	78	180	305

104·5—114·5	114·5—124·5	124·5—134·5	134·5—144·5
208	80	21	5

(ii) இழைத்து வரையப்பட்ட நிகழ்வெண் வரை

x.	59·5	69·5	79·5	89·5	99·5
	7·67	33·67	92·67	187·67	231
	109·5	119·5	129·5	139·5	
	197·67	103	35·33	8·67	

(i) X-அச்சில் மைய மதிப்புகளையும், Y-அச்சில் நிகழ்வெண்களையும் எடுத்துக்கொண்டு (59·5, 3) (69·5, 20) ………… (139·5, 5) என்ற புள்ளிகளை நேர்க்கோடுகளின்மூலம் இணைத்தால் நிகழ்வெண் பலகோணம் கிடைக்கிறது.

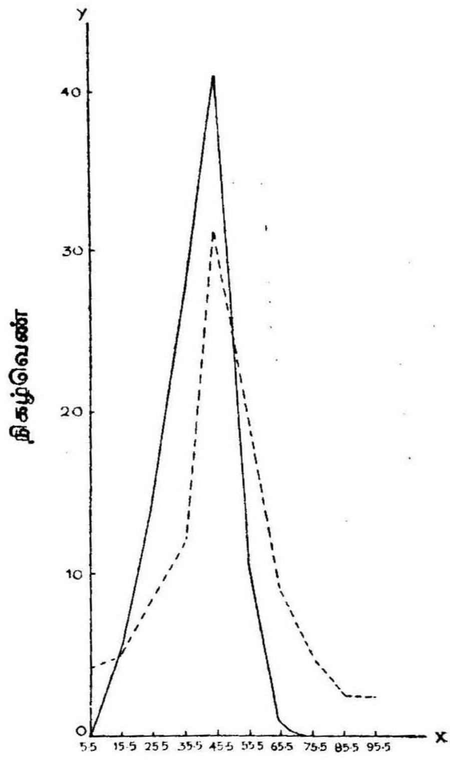
(ii) பெரும்பாலான புள்ளிவிவரங்களில் நிகழ்வெண் வரையில் மிக அதிக அளவில் சிறுசிறு ஏற்ற இறக்கங்கள் காணப்படுகின்றன. இவை கூறுகளில் காணப்படும் பிழைகளால் ஏற்படுகின்றன. எனவே, அடுத்தடுத்துள்ள மூன்று பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்களின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிட்டு அதனை நடுப் பிரிவிற்கு உரிய நிகழ்வெண்ணாக எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

பட்டியல் (ii)-ல் நிகழ்வெண்கள் $\frac{0+3+20}{3} = 7{\cdot}67$; $\frac{3+20+78}{3} = 33{\cdot}67$ · இது போன்றே இறுதி நிகழ்வெண் $= \frac{21+5+0}{3} = 8{\cdot}67$.

எ. கா. 4

ஆங்கிலம், கணிதம் என்ற இரு பாடங்களில் இரு பிரிவு மாணவர்கள் பெற்றுள்ள மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. சதவீத நிகழ்வெண் பலகோணங்களை (Percentage frequency polygons) வரைக.

பிரிவு இடைவெளி	ஆங்கிலம்	கணிதம்
1— 10	1	8
11— 20	30	10
21— 30	80	16
31— 40	140	24
41— 50	220	62
51— 60	60	39
61— 70	3	18
71— 80	—	10
81— 90	—	5
91—100	—	5



படம் 2·30

ஆங்கிலம்

x	5·5	15·5	25·5	35·5	45·5	55·5	65·5	75·5	85 5	95·5
f	·1873	5·616	14·98	26·21	41·20	11 24	·5619	0	0	0

கணிதம்

x	5·5	15·5	25·5	35·5	45·5	55·5	65·5	75·5	85·5	95·5
f	4·060	5·076	8·119	12·18	31·47	19·79	9·135	5·076	2·538	2·538

விடுபட்ட கோடுகளின்மூலம் கணிதத்திற்கும், மற்றதன் மூலம் ஆங்கிலத்திற்கும் சதவீத நிகழ்வெண் பலகோணங்கள் வரையப்பட்டுள்ளன.

பயிற்சி

1. இரண்டாவது ஐந்தாண்டுத் திட்டத்தில் பல்வேறு துறைகளுக்கு ஒதுக்கப்பட்ட நிதி நிலையினைக் கீழ்க்கண்ட பட்டியல் காட்டுகிறது.

		ரூபாய்கள் (கோடியில்)
உழவு, சமுதாய வளர்ச்சி	...	565
பாசனப் பகுதி, வெள்ளக்கட்டுப்பாடு	...	458
மின் சக்தி	...	440
தொழிற்சாலை, சுரங்கம்	...	891
போக்குவரத்து, செய்தித்துறை	...	1,384
சமூக சேவை	...	946
பிற இனங்கள்	...	116

இதனை ஒரு வட்ட விளக்கப் படத்தினில் அமைத்துக் காட்டுக. (செ.ப.),

2. உற்பத்தியான பொருள்களின் நீள அளவை (மி.மீல்) கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

நீளமைய மதிப்புக்கள் :	604	606	608	610	612	614
நிகழ்வெண் :	3	16	35	33	11	2

இதற்குரிய வளர் நிகழ்வெண் வரையைக் காண்க. (செ.ப.)

3. புள்ளியியல் வரைபடங்களின் உபயோகத்தைப் பற்றி ஒரு சிறு குறிப்பு வரைக.

4. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைப் பிரதிபலிக்கும் பட்டை விளக்கப் படத்தையும், வட்ட விளக்கப் படத்தையும் தகுந்த உதாரணங்களை கொண்டு ஒப்பிடுக. (அ.ப.)

5. புள்ளியியல் விவரங்களைக் காட்டும் வரைபடங்களில் ஏதேனும் இரண்டை ஆய்க. (அ.ப)

6. சிறு குறிப்பு வரைக.

(1) பட்டை விளக்கப் படங்கள்

(2) பரவல் செவ்வகங்கள்

(3) வட்ட விளக்கப் படங்கள் (அ.ப.)

(4) நிகழ்வெண் பலகோணங்கள்

7. A, B என்ற இரு நகரங்களில் ஒரு சாதாரணத் தொழிலாளியின் வீட்டு மாதச் செலவுப் பட்டியல் இங்கே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. தகுந்த விளக்கப் படங்களுடன் அவன் செலவு செய்யும் விதங்களை ஒப்பிடுக.

செலவினம்	செலவுத் தொகை (ரூபாயில்)	
	A நகரம்	*B* நகரம்
உணவு ...	45	40
விறகு, விளக்கெரித்தல் ...	7	8
உடை ...	9	4
வீட்டு வாடகை ...	15	6
மற்றவை ...	24	17
	100	75

8. ஒரு பல்கலைக் கழகத் தேர்வில் 121 உறுப்பினர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் அலைவுப் பரவலின் அட்டவணை பின்வருமாறு :

மதிப்பெண்கள்		உறுப்பினர்
35-க்கு கீழ்	——	21
35—45	——	24
45—50	——	32
50—55	——	12
55—60	——	10
60—65	——	8
65—75	——	9
75-க்கு மேல்	——	5
	மொத்தம்	121

இப்பரவலின் குவிவு] அலைவெண் வளைகோட்டை வரைக. வரைபடத்தின் மூலம் இடைநிலை, முகடு இவைகளின் அளவுகளைக் காண்க.

9. பலவித வழிகளின் வாயிலாகக் கிடைக்கும் இரண்டு மாகாணங்களின் ஆண்டு வருமானத்தைப் (இலட்சம் ரூபாயில்) பின்வரும் பட்டியல் அறிவிக்கிறது. செய்திக்களுக்குரிய வரை படங்கள் வரைந்து, வருமானங்களின் வடிவமைப்பை ஒப்பிடுக.

தோற்றுவாய்	வருமானம் (இலட்சம் ரூபாயில்)	
	A மாகாணம்	B மாகாணம்
நில வருமானம்	20	10
உள்நாட்டுப் பொருள் வரி	5	6
வருமான வரி	10	7
வணிக வரி	5	6
போக்குவரத்து	2	4
மற்றவை	8	2
	50	35

10. பின்வரும் செய்திகளுக்குப் பொருத்தமான விளக்கப் படம் வரைக.

ஓர் ஆண்டு கூலி (ரூபாய்)	வேலையில் ஈடுபடுவோரின் எண்ணிக்கை
0— 99	10
100—199	54
200—299	184
300—399	264
400—499	146
500—599	36
600—699	5
700—799	1
மொத்தம் =	700

11. ஒரு கல்லூரி விடுதியிலுள்ள 100 மாணவர்களின் வயது பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இப்பரவலின் 'ஓகைவ்' வளைகோட்டை வரைந்து, அதன்பின் இப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

வயது		நிகழ்வெண் (மாணவர்களின் எண்ணிக்கை)
16—17	—	3
17—18	—	13
18—19	—	23
19—20	—	31
20—21	—	18
21—22	—	9
22—23	—	2
23—24	—	1
மொத்தம்	—	100

12. புள்ளி விவரங்களை வரைபட மூலம் விளக்குவதில் பல்வேறு முறைகளைக் குறிப்பிடுக.

ஒரு நகரத்தில் ஜுலை மாதத்திய மழை அளவின் நிகழ்வுப் பரவலுக்குரிய செவ்வகப் படம் வரைந்து, அதில் நிகழ்வெண் வரையைப் பொருத்துக.

மழை அளவு (அங்)	0 – 7	8 – 15	16—23	24 - 31	32—39	40 – 47	48 – 55	56—63
அலைவெண்	3	12	17	25	6	4	1	1

13. மரக்கட்டைகளின் நீளங்கள் ஏறு வரிசையில் பின் வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

76, 79, 81, 86, 87, 89, 90, 91, 94, 96, 98, 99, 99. 99, 100, 100, 100, 100, 102 103, 103, 105, 106 109, 111, 112, 114.

இவ் விவரங்களுக்குக் 'கீழ் இன' ஓகைவ் படம் வரைக. வரை படத்திலிருந்து இடைநிலையையும் கூட்டுச் சராசரி விலக்கத்தையும் காண்க.

14. கீழ்வரும் விவரங்களின் போக்குக்குரிய ஒரு நேர்கோட்டு விளக்கப் படத்தை வரைக.

ஆண்டு		செலாவணி முறி
1933—34	———	177
1934 - 35	———	186
1935—36	———	196
1936—37	———	208
1987—38	———	215
1938—39	———	208
1939—40	———	252
1940—41	———	270
1941—42	———	421
1942—43	———	650

15. தொழிலாளர்களின் வரவு செலவுத் திட்டங்களைப் பற்றி ஆய்ந்ததில் கீழ்க்கண்ட விவரங்கள் பெறப்படுகின்றன.

வருமான பிரிவு	ரூ.20 க்கு கீழ்	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70	70 க்கு மேல்
குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	47	167	198	118	69	20	12
குடும்பத்தின் சராசரி வருமானம் (ரூபாய் சுத்தமாக)	18	25	34	44	54	64	86

மேற்கண்ட விவரங்களுக்கு லாரென்சு வரையை வரைக.

3. மையப் போக்களவைகள்

(MEASURES OF CENTRAL TENDENCY)

புள்ளியியல் அறிஞர் பௌலி (Bowley) என்பவர் புள்ளியியலைச் "சராசரிகளின் அறிவியல்" (Science of Averages) எனக் கூறியுள்ளார். எண்ணற்ற புள்ளி விவரங்களின் உட்கருத்தை அல்லது மையப் போக்கை உணர்ந்திட ஓர் அளவை தேவை ஒரு வகுப்பிலுள்ள 60 மாணவரது மதிப்பெண்களையும் அப்படியே கொண்டு, அதிலிருந்து மாணவரது தேர்ச்சி பற்றிய ஒரு முடிவுக்கு வருதல் கடினம். அத்துணை எண்களையும் நினைவில் கொள்வதும் இயலாது. ஆனால், அவ்வகுப்பு மாணவரின் சராசரி மதிப்பெண் 65 எனத் தெரிந்தால், மாணவர் ஓரளவு நல்ல தேர்ச்சி உடையவர் என்ற முடிவுக்கு வரலாம். மேலும், இரு புள்ளி விவரத் தொகுதிகளை ஒப்பிட்டுப் பார்ப்பதற்கும் மையப் போக்களவைகள் தேவைப் படுகின்றன. இரு மாநிலங்களின் வாழ்க்கைத் தரத்தை ஒப்பிடும் போது அவற்றில் அடங்கிய மாவட்டங்களின் தனிநபர் வருமானங் களின் சராசரிகள் உதவுகின்றன. இரு தொழிற்சாலைகளின் வளர்ச்சியை அவற்றின் 10 ஆண்டுச் சராசரி உற்பத்தி அளவு களையும், இலாபங்களையும் கொண்டு மதிப்பிடலாம்.

ஒரு சில உச்ச மதிப்புகள் நீங்கலாக பரவலின் பெரும்பான்மையான ராசிகளின் மையப் போக்கு, சராசரியின் மதிப்பை யொட்டியே அமைகிறது.

எனவே, ஒரு பரவலில் அடங்கியுள்ள ராசிகளின் மதிப்புகளைப் பிரதிபலிக்கின்ற ஓர் அளவை அப்பரவலின் சராசரி அல்லது மையப்போக்களவை யாகும்.

வழக்கில் பெரும்பான்மையாக இருந்து வரும் மையப் போக்களவைகள் :

1. கூட்டுச் சராசரி (Arithmetic Mean)
2. இடைநிலை (Median)

3. முகடு (Mode)
4. பெருக்குச்சராசரி (Geometric Mean)
5. இசைச்சராசரி (Harmonic Mean)

கூட்டுச்சராசரி

கொடுக்கப்பட்ட n மதிப்புகளின் கூட்டுச்சராசரியை, அம் மதிப்புகளைக் கூட்டி, அத்தொகையை n-ஆல் வகுப்பதன்மூலம் பெறுகிறோம். $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ என்பனவற்றைக் கொடுக்கப்பட்ட n மதிப்புகளாகக் கொள்வோம். அதன்

$$\text{கூட்டுச் சராசரி} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$x_1 + x_2 + \dots + x_n$ என்பதனை $\sum_{r=1}^{n} x_r$ என்று குறிக்கிறோம்.

எனவே,

$$\text{கூட்டுச்சராசரி} = \frac{\sum_{r=1}^{n} x_r}{n} \text{ ஆகும்.}$$

இக் கூட்டுச் சராசரியை $\bar{x}$ என்று குறிக்கிறோம்.

$$\text{எனவே } \bar{x} = \frac{\Sigma x_r}{n}$$

நிகழ்வெண் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் காணுதல் : $x_1, x_2, \dots$ என்பன ஒரு நிகழ்வெண் பரவலில் n மைய மதிப்புகளாகட்டும். $f_1, f_2 \dots f_n$ என்பன முறையே அம்மதிப்புக்களின் நிகழ்வெண்கள் என்க.

x_1, f_1 முறைகளும், x_2, f_2 முறைகளும், x_3, f_3 முறைகளும் ... x_n, f_n முறைகளும் வருவதால் ராசிகளின் மொத்தமதிப்பு $= f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \dots + f_n x_n$

இதனை $\Sigma f x_r$ என்று கூறுகிறோம். இதில் அடங்கியுள்ள ராசிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $f_1 + f_2 + \dots\dots + f_n = N$ ஆகும். எனவே, அப்பரவலின் கூட்டுச்சராசரி

$$\bar{x} = \frac{\sum_{r=1}^{n} f_r x_r}{N}$$

சுருக்கமுறையில் கூட்டுச்சராசரியைக் காணல்

1. $x_r = A + d_r$ எனக் கொள்வோம்.

இங்கு A என்பது ஏதேனும் ஒரு வசதியான மூலப்புள்ளி. d என்பது Aயிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட x_n-ன் விலக்கம் $[x_r - A = d_r]$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_r x_r}{N} = \frac{\Sigma f_r (A + d_r)}{N} = \frac{A \Sigma f_r}{N} + \frac{\Sigma f_r d_r}{N}$$

$$= A + \frac{\Sigma f_r d_r}{N}$$

2. $x_r = A + C\, dr$ எனக் கொள்வோம்.

அதாவது $dr = \frac{(x_r - A)}{C}$

இங்கு C என்பது பிரிவு இடைவெளி.

A ஏதேனும் ஒரு பிரிவின் மையப்புள்ளி. பொதுவாக, மீப்பெரு நிகழ்வெண்ணுக்குரிய மையப் புள்ளியை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\Sigma fr\, xr}{N} = \frac{\Sigma fr (A + C\, dr)}{N} = \frac{\Sigma fr\, A}{N} + C \frac{\Sigma f_r\, dr}{N}.$$

$$= A + \frac{C \Sigma fr dr}{N}.$$

கூட்டுச் சராசரியைச் சுலபமாகக் கணக்கிட இவ் வாய்பாடு உதவுகிறது.

குறிப்பு

சீர்படா விவரங்களுக்கு, $\bar{x} = A + \frac{\Sigma dr}{n}$.

$fr = 1$ (ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்)

கணக்கு

(அ) கீழ்க்காணும் எண்களுக்குக் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க.

16, 21, 37, 18, 11, 9, 17, 5, 16, 15

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_r}{n} = \frac{165}{10} = 16{\cdot}5.$$

கூட்டுச் சராசரியை சுருக்கு வழியில் கணக்கிடல்

வசதியான ஒரு மூலம் எடுத்துக்கொண்டு அதனின்று எண்களுடைய விலக்கங்களை எடுத்துக்கொள்வோம்.

மூலம் $A = 16$ எனில்

$$\bar{x} = A + \Sigma \frac{d}{n} = 16 + \frac{0+5+21+2-5-7+1-11+0-1}{10}$$

$$16 + \frac{5}{10} = 16 \cdot 5$$

(ஆ) கீழ்க்கண்ட நிகழ்வெண் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரி காண்.

பிரிவு இடைவெளி	நிகழ்வெண்
10 — 13	8
13 — 16	15
16 — 19	27
19 — 22	51
22 — 25	75
25 — 28	54
28 — 31	36
31 — 34	18
34 — 37	9
37 — 40	7
	300

பிரிவு இடைவெளி	மையப்புள்ளி x_r	நிகழ்வெண் fr	$fr\ x_r$
10 — 13	11·5	8	92·00
13 — 16	14·5	15	217·50
16 — 19	17·5	27	472·50
19 — 22	20·5	51	1045·50
22 — 25	23·5	75	1762·50
25 — 28	26·5	54	1431·00
28 — 31	29·5	36	1062·00
31 — 34	32·5	18	585·00
34 — 37	35·5	9	319·50
37 — 40	38·5	7	269·50
		300	7257·00

$$\bar{x} = \Sigma \frac{fr\ x_r}{N} = \frac{7257}{300} = 24 \cdot 19.$$

சுருக்கு வழியில் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுதல்

மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டில்,

23·5 ஐ மூலப்புள்ளியாக எடுத்துக்கொள்வோம். d_r என்பது பிரிவு இடைவெளி அலகில் விலக்கங்களைக் குறிக்கட்டும்.

$$\left(d_r = \frac{x_r - A}{C} \right)$$

x_r மையப்புள்ளி	d_r	f_r	$f_r d_r$
11·5	—4	8	—32
14·5	—3	15	—45
17·5	—2	27	—54
20·5	—1	51	—51
23·5	0	75	0
26·5	1	54	54
29·5	2	36	72
32·5	3	18	54
35·5	4	9	36
38·5	5	7	35
	5	300	69

$$\bar{x} = A + \Sigma \frac{f_r \cdot d_r}{N} \times C \quad [C = \text{பிரிவு இடைவெளி தூரம்} = 3]$$

$$= 23{\cdot}5 + \frac{69 \times 3}{300}$$

$$= 23{\cdot}5 + {\cdot}69 = 24{\cdot}19.$$

கூட்டுச் சராசரியின் சிறப்பியல்புகள்

(i) கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களின் கூடுதல் பூஜ்யம் ஆகும்.

நிறுவுதல்

(*a*) சீர்படா விவரங்களுக்கு :

$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்பவை மாறியின் n மதிப்புகள் என்க.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_r}{n}$$

இங்கு விலக்கம் $d_r = (x_r - \bar{x})$.

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} d_r = \sum_{r=1}^{n} (x_r - \bar{x})$$

$$\therefore \frac{\Sigma d_r}{n} = \frac{\Sigma x_r}{n} - \frac{\Sigma \bar{x}}{n}$$

$$= \bar{x} - \frac{n\bar{x}}{n} = \bar{x} - \bar{x} = 0.$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} (x_r - \bar{x}) = 0$$

(*b*) நிகழ்வெண் பரவலுக்கு:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_r x_r}{N}$$

இங்கு $f_r d_r = f_r (x_r - \bar{x})$

$$\frac{\Sigma f_r d_r}{N} = \frac{\Sigma f_r x_r}{N} - \bar{x}\frac{\Sigma f_r}{N}$$

$$= \bar{x} - \bar{x} = 0$$

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{f_r d_r}{N} = 0.$$

(ii) கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் மீச்சிறு மதிப்பை உடையதாகும்.

$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்பன மாறியின் n மதிப்புகளாக இருக்கட்டும். A என்ற ஒரு மூலத்திலிருந்து விலக்கம் காணுவதாகக் கொள்வோம்.

$f(A)$ என்பது, A-யிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களின் கூடுதலாக இருக்கட்டும்.

$$\therefore \quad f(A) = \Sigma (A - x_r)^2$$
$$= \Sigma A^2 - 2 \Sigma A x_r + \Sigma x_r^2$$
$$= n A^2 - 2A \Sigma x_r + \Sigma x_r^2$$

$f(A)$ மீச்சிறு மதிப்பை உடையதாயின்,

$$\frac{df}{dA} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{df}{dA} = 2nA - 2 \Sigma x_r$$

இதனை பூஜ்யத்திற்கு சமன்படுத்த,

$$2nA - 2\Sigma x_r = 0$$

$$\therefore \quad A = \frac{\Sigma x_r}{n} = \bar{x}$$

விலக்கங்களின் கூடுதல் மீச்சிறு மதிப்பை உடையதாக இருக்கவேண்டுமானுல் $\frac{d^2 f}{d A^2}$ ஓர் நேர் எண்ணுக இருக்க வேண்டும்.

இங்கு $\frac{d^2 f}{d A^2} = 2n$

$\therefore \quad A = \bar{x}$ என்ற மூலத்திலிருந்து எடுக்கப்பட்ட வர்க்கங்களின் கூடுதல் மீச்சிறு மதிப்புடையதாகும்.

எனவே, கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட வர்க்கங்களின் கூடுதல் மிகச் சிறியதாகும்.

(iii) n_1 ராசிகள் கொண்ட ஒரு குழுவின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_1$, n_2 ராசிகள் கொண்ட மற்றொரு குழுவின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_2$. இவ்விரண்டும் இணைந்த புதிய குழுவின்

$$\text{கூட்டுச் சராசரி } \bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

முதல் குழுவின் மொத்த மதிப்பு $= n_1 \bar{x}_1$

2-ஆம் குழுவின் மொத்த மதிப்பு $= n_2 \bar{x}_2$

இணைந்த குழுவின் மொத்த மதிப்புகள் $= n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2$.

புதுக் குழுவின் ராசிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $= n_1 + n_2$

எனவே, $\bar{x}$ என்பது புதுக் குழுவின் கூட்டுச் சராசரியாய் இருந்தால், $\bar{x} = \dfrac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$.

குறிப்பு: $n_1, n_2, \ldots\ldots n_r$ என்ற 'r' குழுக்களை எடுத்துக் கொள்ளுவோம். இவற்றின் கூட்டுச் சராசரிகள் முறையே $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots\ldots \bar{x}_r$ எனக் கொண்டால், 'r' குழுக்களும் இணைந்த புதிய குழுவின் கூட்டுச் சராசரி,

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2 + \ldots\ldots + n_r \bar{x}_r}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots\ldots + n_r}.$$

எ.கா. ஒரு பரவலின் நான்கு பகுதிகள் கீழ் வருமாறு:

பகுதி	ராசிகளின் எண்ணிக்கை	கூட்டுச் சராசரி
1	50	61
2	100	70
3	120	80
4	30	83

இதற்கான கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க.

பரவலிலுள்ள ராசிகளின் எண்ணிக்கை n_1, n_2, n_3, n_4 எனவும், அவற்றிற்குரிய கூட்டுச் சராசரிகள் $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$ என இருந்தால்,

$$\text{கூட்டுச் சராசரி} = \bar{X} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2 + n_3 \bar{x}_3 + n_4 \bar{x}_4}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}$$

$$= \frac{50 \times 61 + 100 \times 70 + 120 \times 80 + 30 \times 83}{50 + 100 + 120 + 30}$$

$$= \frac{3050 + 7000 + 9600 + 2490}{300}$$

$$= \frac{22140}{300}$$

$$= 73{\cdot}8$$

இடைநிலை (Median)

இடைநிலை என்ற பெயருக்கேற்ப இச்சராசரி, ராசிகளை ஏறுவரிசையிலோ அல்லது இறங்கு வரிசையிலோ தரப்படுத்தி அமைத்தபின், கிடைக்கப்பெறும் நடுவுறுப்பின் மதிப்பேயாகும்.

$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்பவை x மாறியின் n மதிப்புகளாக இருக்கட்டும். இவற்றைத் தரப்படுத்தி அமைத்தபின், $\frac{n+1}{2}$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பே இடைநிலையாகும்.

$n = 2r$ என்று இரட்டைப்படை எண்ணுயின் $\frac{n+1}{2} = \frac{2r+1}{2}$ $= r + \frac{1}{2}$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பே இடைநிலை ஆகும். r ஆவது, $(r+1)$ ஆவது உறுப்புகள்தான் இருக்கமுடியும். $\left(r + \frac{1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு இவற்றிற்கிடையே உள்ள மதிப்பாகும். எனவே, இவ்விரு உறுப்புகளின் சராசரி $\frac{x_r + x_{r+1}}{2}$-ஐ இடைநிலையாகக் கொள்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு

(i) கீழ்வரும் எண்களுக்கு இடைநிலையைக் காண்க.
11, 17, 25, 32, 18, 10, 9, 45, 4.

ஏறுவரிசையில் எண்களை அமைத்தால்,
4, 9, 10, 11, 17, 18, 25, 32, 45 என ஆகின்றன.

நடு உறுப்பு $= \frac{9+1}{2} = 5$-வது உறுப்பு.
எனவே இடைநிலை $= 17$.

(ii) கீழ்க்காணும் எண்களுக்கு இடைநிலையைக் காண்க.
5, 21, 11, 39, 29, 17.

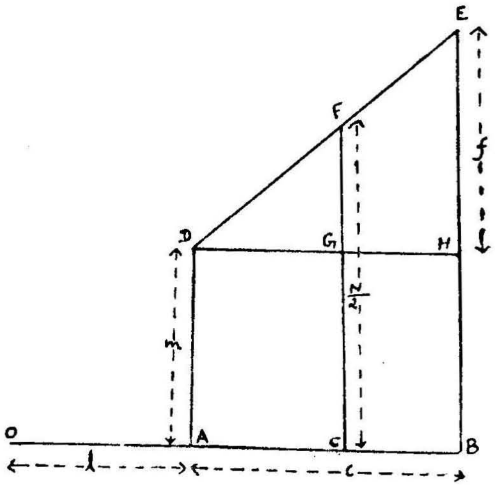
வரிசைப்படுத்தியபின் எண்கள்,
5, 11, 17, 21, 29, 39 என்ற நிலையை அடையும்.

இடைநிலை $= \frac{6+1}{2} = 3\frac{1}{2}$ ஆவது உறுப்பு

எனவே, 3-வது உறுப்பிற்கும் 4-வது உறுப்பிற்கும் இடையில் இடைநிலை இருப்பதால்,

$$\text{இடைநிலை} = \frac{17 + 21}{2} = 19 \text{ ஆகும்.}$$

வரைபடம் மூலம் இடைநிலைக்கு விளக்கம் கொடுத்தல்.



படம் 3—1

ஓகைவில் (ogive), இடைநிலைப்பிரிவில் அமையும்வரை ஒரு நேர்க்கோடு. அதன் படம் இங்கு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

AB என்ற இடைநிலைப்பிரிவில், DFE என்ற நேர்க்கோட்டு ஓகைவ் அமைந்துள்ளது. இங்கு $AB = c =$ பிரிவு இடைவெளி. AD என்பது A வரை அமைந்துள்ள வளர் நிகழ்வெண் ஆகும். எனவே $AD = m$.

EB என்பது B வரை அமைந்துள்ள வளர் நிகழ்வெண் ஆகும். எனவே $EB = m + f$.

DH என்ற கோடு EB-க்கு செங்குத்தாய் இருப்பதால், $EH = f$. FC என்பது F லிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு. $FC = \frac{N}{2}$ என இருந்தால், OC என்பது நமக்கு வேண்டிய இடைநிலை அளவாகும்.

வடிவொத்த முக்கோணங்களிலிருந்து,

$$\frac{DG}{DH} = \frac{FG}{EH}$$

எனவே, $DG = \frac{FG}{EH} \times DH$

$$= \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c \qquad [\because DH = AB = c]$$

$\therefore$ இடைநிலை $= OC = OA + AC$

$$= OA + DG$$

$$= l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c.$$

எ.கா. கீழ்க்கண்ட நிகழ்வெண் பரவலுக்கு இடைநிலையைக் காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	10—13	13—16	16—19	19—22	22—25	25—28	28—31	31—34	34—37	37—40	
நிகழ்வெண் :	8	15	27	51	75	54	36	18	9	7	300

விடை :

மெய்ப்பிரிவின் மேல் எல்லை	குவிவு நிகழ்வெண்
13	8
16	23
19	50
22	101
	$\frac{N}{2} = 150$
25	176
28	230
31	266
34	284
37	293
40	300

$N = 300$.

$\frac{N}{2} = 150$, நிகழ்வெண்கள் 101 க்கும், 176 க்கும் இடையே உள்ளதால், இடைநிலைப்பிரிவு 22 — 25 ஆகும்.

$\therefore \quad l = 22 ; m = 101 ;$

$f = 176 - 101 = 75 ; \quad c = 3$.

$$\text{இடைநிலை} = l + \frac{\left(\frac{1}{2} N - m\right)}{f} c ;$$

$$= 22 + \frac{150 - 101}{75} \times 3$$

$$= 22 + 1{\cdot}96$$

$$= 23{\cdot}96$$

இடைநிலையின் சிறப்பியல்பு : சீர்படா விவரங்களுக்கு இடைநிலையிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட தனி விலக்கங்களின் கூடுதல் மிகச் சிறியதாகும்.

நிறுவுதல்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சீர்படா விவரங்களை ஏறு வரிசையில் எடுத்துக்கொள்வோம். A-என்பது எடுத்துக்கொள்ளப்படும் ஏதாவதொரு மூல எண்ணுகை இருக்கட்டும்.

இவற்றுள் a, b, c என்பன A-ஐ விடச் சிறியதாக உள்ள n_1 எண்களாகும். k, l, m என்பன A-ஐ விடப் பெரியதாக உள்ள n_2 எண்களாகட்டும்.

$$\therefore \quad f(A) = \sum_{n_1} (A - a) + \sum_{n_2} (k - A)$$

இது ஒரு தொடர்பு சார்பு.

$$\text{எனவே, } \frac{df}{dA} = (1 + 1 + \cdots\cdots\cdots n_1 \text{ உறுப்புகள்}) -$$

$$(1 + 1 + \cdots\cdots\cdots n_2 \text{ உறுப்புகள்})$$

$$= (n_1 - n_2)$$

$$\frac{df}{dA} = \text{ஒரு எதிர் எண்} \ (n_1 < n_2 \ \text{எனில்})$$

$$\frac{df}{dA} = 0 \ (n_1 = n_2 \ \text{எனில்})$$

$$\frac{df}{dA} = \text{நேர் எண்} \ (n_1 > n_2 \ \text{எனில்})$$

$n_1 = n_2$ எனில், A இடைநிலையாகும். எனவே, இடைநிலைக்கு இடப்புறத்தில் அமைந்த x-ன் மதிப்புகளுக்கு $f(A)$ ஆனது ஒரு இறங்குகின்ற சார்பாகவும், வலப்புறத்தில் அமைந்த x-ன் மதிப்புகளுக்கு ஓர் ஏறுகின்ற சார்பாகவும் அமைகின்றது.

இடைநிலையில் $\frac{df}{dA} = 0$ ஆக அமைகிறது.

எனவே, இடைநிலையில் (A) மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறுகிறது. இடைநிலையிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட தனி விலகல்களின் கூடுதல் மிகச் சிறியதாகும்.

கணக்கு

ஒரு நிகழ்வெண் பரவல் சீரான இடைவெளியைக் கொண்ட எட்டு பிரிவுகளைக் கொண்டுள்ளது. அப்பிரிவுகளின் குவிவு நிகழ்வெண் (மேலிருந்து) ·01, ·07, ·18, ·25, ·48, ·67, ·92, 1 என்ற விகிதங்களில் உள்ளது. கடைசிப்பிரிவின் குவிவு நிகழ்வெண் 500 ஆக உள்ளது. இரண்டாவது, நான்காவது பிரிவுகளின் மைய மதிப்புகள் முறையே 5-ம், 9-ம் ஆகும். நிகழ்வெண் பரவலின் இடைநிலையைக் கண்டுபிடி. (அ.ப.)

குவிவு நிகழ்வெண்ணின் விகிதங்கள் ·01, ·07, ·18, ·25, ·48, ·67, ·92, 1. கடைசிப் பிரிவின் குவிவு நிகழ்வெண் 500. விகிதம் 1 ஆக இருந்தால் குவிவு நிகழ்வெண் 500.

விகிதம் ·92 ஆக இருக்கும்பொழுது குவிவு நிகழ்வெண் $·92 \times 500 = 460$.

இவ்வாறே மற்றெல்லா பிரிவுகளுக்கும் குவிவு நிகழ்வெண்ணைக் காண, குவிவு நிகழ்வெண்கள் 5, 35, 90, 125, 240, 335, 460, 500 எனக் கிடைக்கின்றன.

இரண்டாவது பிரிவின் மைய மதிப்பு 5.

நான்காவது பிரிவின் மைய மதிப்பு 9.

பரவல் சீரான இடைவெளியைக் கொண்டு இருப்பதால் முதல் பிரிவின் மைய மதிப்பு 3 ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

ஏனெனில், $9 - 5 = 4 =$ இரு பிரிவு இடைவெளிகளின் தூரம்.

எனவே, பிரிவுகளின் எல்லைகள் 2 முதல் 4, 4 முதல் 6, 6 முதல் 8, ……… ஆகும்.

$$\text{இடை நிலை} = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c$$

மெய்ப் பிரிவின் மேல் எல்லை	குவிவு நிகழ்வெண்
4	5
6	35
8	90
10	125
12	240
	$\frac{N}{2} = 250$
14	335
16	460
18	500

$N = 500$

$c = 2$ இடைநிலைப்பிரிவு $12 - 14$

$\frac{N}{2} = 250 \quad \therefore \quad l = 12, \quad m = 240, \quad f = 95$

$$\text{இடைநிலை} = 12 + \frac{250 - 240}{95} \times 2$$

$$= 12 + \frac{20}{95} = \mathbf{12 \cdot 21}.$$

முகடு (Mode)

ஒரு பரவலில் பெரும்பான்மையான முறைகள் காணப்படும் ராசியின் மதிப்பே முகடாகும். எனவே, முகட்டுப்பிரிவு மீப்பெரு

நிகழ்வெண்ணைக் கொண்டுள்ளது. ஒரு நிகழ்வெண் வரையின் உச்சிப்புள்ளியில் மீப்பெரு நிகழ்வெண் குறிப்பிடப்படுவதால் இப்புள்ளியின் x ஆயத்தூரமே முகடாகும். ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட முகடுகளையுடைய இரு முகட்டு வரை (bimodal) பல் முகட்டுவரை (multimodal) களும் உண்டு. ஒகைவின் (ogive) திருகுப் புள்ளியின் x ஆயத்தூரமே முகடாகும். பாமரமக்களும் எளிதில் புரிந்துகொண்டு, பெரிதும் பயன்படுத்தும் சராசரி முகடேயாகும்.

ஒரு கடையில் 15, 16, 21 என்ற அளவுகளில் தயாராகும் சட்டைகளில், அளவு 16 உடைய சட்டை அதிகம் செலவானால் கடைக்காரரைப் பொறுத்தவரையில், அளவு 16 தான் தேவையான சராசரி மதிப்பாகும். அதற்குப் பதிலாக $\frac{15+16+21}{3} = \frac{52}{3} = 17{\cdot}3$ என்ற கூட்டுச்சராசரி அளவில் தயாரித்தால் அது எவருக்குமே பொருந்தாது. எனவே,வியாபாரத் துறையில் முகட்டுச் சராசரியே அதிகம் பயனுடையதாகும்.

அலைவெண் பரவலை அமைக்க இயலாதபோது முகடு காணும் முறை:
(இங்கு மாறி தொடர்ச்சியற்றது)

முதல் முறை

இத்தகைய அலைவெண் பரவலுக்கு முகடை தொகுப்பு முறையில் (Method of grouping) காணலாம். தொகுப்பு முறையின் செய்முறை வருமாறு :

(i) இரண்டிரண்டு அலைவெண்களாகக் கூட்டி அலைவெண்களைத் தொகுக்க வேண்டும்.

(ii) முதல் அலைவெண்ணை விட்டுவிட்டு மீதியுள்ள அலைவெண்களை இரண்டிரண்டாகக் கூட்டித் தொகுக்கவேண்டும்.

(iii) அலைவெண்களை மும்மூன்றாகக் கூட்டி, கூடுதல் மைய மதிப்புக்கெதிராக எழுதித் தொகுக்கவேண்டும்.

(iv) முதல் அலைவெண்ணை விட்டுவிட்டு மீதியுள்ள அலைவெண்களை மும்மூன்றாகக் கூட்டித் தொகுக்க வேண்டும்.

(v) முதலிரண்டு அலைவெண்களை விட்டுவிட்டு மீதியுள்ளவற்றை மும்மூன்றாகக் கூட்டித் தொகுக்கவேண்டும்.

அலைவெண்களைத் தொகுத்தபின்னர் ஓர் ஆய்வுப் பட்டியல் அமைக்கப்படும். இது அதிக மதிப்புள்ள அலைவெண்ணின் அளவைச் சரியாகக் கொடுக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு

1. பின்வரும் பரவல் ஓர் நிறுவனத்திலுள்ள 50 வேலையாட்களின் தினக் கூலிகளைத் தருகிறது. முகட்டுக் கூலியைக் காண்க.

தினக்கூலி (ரூ)	:	3	4	6	7	9	10	12	13	15
கூலி பெறுபவர்களின் எண்ணிக்கை	:	2	3	2	6	10	11	12	3	1

கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தை ஆராய்ந்தால் நாம் உடனே முகட்டுக்கூலி ரூ. 12 என்போம். ஏனெனில், அதுதான் கூலி பெறுபவர்களின் அதிக எண்ணிக்கையைக் கொண்டிருக்கிறது. ஆனால், நாம் விவரங்களைத் தொகுத்து ஆய்வுப் பட்டியலில் அமைத்து ஆராய்ந்தால் இது தவறு எனத் தெரியவரும்.

தொகுப்புப் பட்டியல் (Grouping Table)

தினக் கூலிகள் (ரூ)	கூலி பெறுபவர்களின் அலைவெண் நெட்டுப் பிரிவு 1	நெட்டுப் பிரிவு 2	நெட்டுப் பிரிவு 3	நெட்டுப் பிரிவு 4	நெட்டுப் பிரிவு 5	நெட்டுப் பிரிவு 6
3	2	5				
4	3		5	7	11	
6	2	8				
7	6		16			18
9	10	21		27		
10	11		23		33	
12	12	15				26
13	3		4	16		
15	1					

அலைவெண் ஆய்வுப் பட்டியல் (Frequency Analysis Table)

நெட்டுப் பிரிவுகள்	மீப்பெரு அலைவெண்ணைக் கொண்ட அளவின் மதிப்பு				
1				12	
2		9	10		
3			10	12	
4	7	9	10		
5		9	10	12	
6			10	12	13
ஒரு அளவு திரும்பத்திரும்ப வந்த எண்ணிக்கை	1	3	5	4	1

ஆய்வுப் பட்டியலிலிருந்து 10 என்ற அளவானது அதிக எண்ணிக்கையான தடவைகளில் திரும்பத்திரும்ப அதாவது 5 தடவைகள் வந்துள்ளது. எனவே, முகட்டு தினக்கூலி = ரூ. 10.

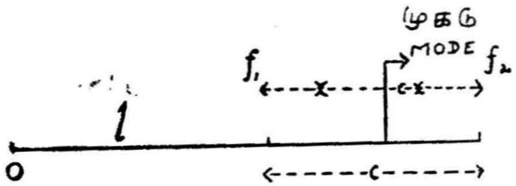
இரண்டாம் முறை

தோராய முகடு (Crude Mode)

பரவலின் முகடு ஒற்றை முகடாக இருக்கும்போது முகட்டுப்பிரிவு இடைவெளியின் மைய மதிப்பையே முகடாக இங்கு எடுத்துக்கொள்ளுகிறோம். ஆனால், இது அவ்வளவு செம்மையாகப் பயன்படாது. ஏனெனில், அலைவெண் வளை வரையில் உச்சிப் புள்ளியானது முகட்டுப் பிரிவு இடை வெளியின் மைய மதிப்பாக இருக்காது. ஆனால், உச்சிப் புள்ளியானது மீப்பெரு அலைவெண்ணையுடைய பிரிவு இடைவெளிக்கு அருகாமையில் இருக்கும். மேலும், புள்ளி விவரங்களைப் பாகுபடுத்திப் பட்டியல் அமைக்கும்போது நாம் பிரிவு இடைவெளிகளின் ஆரம்பம் அல்லது நீளங்களை மாற்றினால் மேற்கூறிய முறையில் நாம் கண்டுபிடிக்கும் முகடும் மாறும்.

மூன்றாம் முறை

அருகாமை அலைவெண்களுக்கு நிறையிட்டு முகடு கணக்கிடுதல்



படம் 3·2

முகடானது அலைவெண் அதிகமாக உடைய பிரிவு இடைவெளியை நெருங்கி இருக்கும் தன்மையுடையது. எனவே, அப் பிரிவு இடைவெளியிலுள்ள முகட்டுப் புள்ளியின்மீது அருகாமையிலுள்ள இரு அலைவெண்களின் திருப்புத் திறன்களும் (moments) சமம். (முகட்டுப் பிரிவு இடைவெளியின் முனை களிலுள்ள அலைவெண்களை எடுத்துக்கொள்கிறோம்.)

f_1, f_2 என்பன முகட்டுப் பிரிவு இடைவெளிக்கு முந்தினதும் அடுத்ததுமான பிரிவு இடைவெளிகளின் அலைவெண்கள். முகட்டுப் பிரிவு இடைவெளியின் கீழ் எல்லையிலிருந்து முகட்டின் தூரம் x ஆனால், அப் பிரிவு இடைவெளியின் மேல் எல்லையிலிருந்து முகட்டின் தூரம் $(c - x)$ ஆகும். l என்பது முகட்டுப் பிரிவு இடைவெளியின் கீழ் எல்லை.

எனவே, $f_1 x = f_2 (c - x)$.

$$(f_1 + f_2) x = c f_2.$$

$$\therefore \quad x = \frac{c f_2}{f_1 + f_2}. \quad \therefore \quad \text{முகடு} = l + \frac{c f_2}{f_1 + f_2}.$$

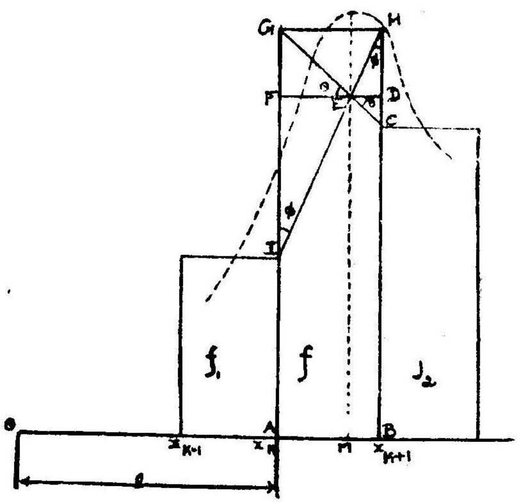
இங்கு முகட்டுப் பிரிவு இடைவெளியின் நிகழ்வெண், முகட்டைப் பாதிக்கவில்லை.

நான்காம் முறை

முகட்டிற்கான வாய்பாட்டைப் பெறுதல்

பிரிவுகள் $x_1 - x_2$, $x_2 - x_3$, $x_3 - x_4$, ..., $x_k - x_{k+1}$, ... $x_n - x_{n+1}$ என அமைந்திருக்கும் ஒரு பரவலை எடுத்துக் கொள்வோம். f என்பது நிகழ்வெண்களின் மீப்பெரு மதிப்பாயும்,

f_1, f_2 என்ற நிகழ்வெண்கள் அதற்கு இருபுறம் இருப்பதாயும் எடுத்துக்கொள்வோம். f என்பது நிகழ்வெண்களின் மீப்பெரு மதிப்பாய் இருந்தால், $(x_k - x_{k+1})$ என்பது முகட்டுப் பிரிவு ஆகும். மேலும் செவ்வகப் படத்தின் ஒருபகுதியை எடுத்துக் கொள்வோம். அதில், முகட்டுப் பிரிவின்மீது அமைக்கப்பட்ட செவ்வகமும் முகட்டுப் பிரிவின் இருபுறமும் அடுத்து அமைந்துள்ள பிரிவுகளின்மீது அமைந்துள்ள செவ்வகங்களும் அமைந்துள்ளன. முகட்டுப் புள்ளியை M என எடுத்துக்கொள்வோம்.



படம் 3·3

படத்திலிருந்து,

$$\tan \theta = \frac{GF}{FE} = \frac{CD}{DE}.$$

$$\tan \phi = \frac{FE}{IF} = \frac{ED}{HD}$$

$$\therefore \frac{FE}{DE} = \frac{GF}{CD} = \frac{IF}{HD}$$

$$= \frac{GF + IF}{CD + HD}$$

$$= \frac{IG}{HC}.$$

$$i.e., \quad \frac{FE}{FD - FE} = \frac{AG - AI}{HB - BC}.$$

$$\text{or} \quad \frac{FE}{h - FE} = \frac{f - f_1}{f_1 - f_2}.$$

இங்கு '*h*' என்பது பிரிவு இடைவெளியின் மதிப்பு.

$$FE = \frac{h(f - f_1)}{(f - f_2) + (f - f_1)}$$

$$= \frac{h(f - f_1)}{2f - f_1 - f_2}.$$

$$\text{முகடு} = OM = OA + AM = OA + FE$$

$$= l + \frac{h(f - f_1)}{2f - f_1 - f_2}$$

ஐந்தாம் முறை

அனுபவ வாய்பாடுமூலம் முகடு காணல்

சமச் சீரற்ற அலைவுப் பரவலில் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று (கூட்டுச் சராசரி — முகடு) = 3 (கூட்டுச்சராசரி — இடைநிலை) என்னும் அனுபவ வாய்பாட்டால் தொடர்பு பட்டிருக்கும். தேவையான விவரங்கள் கிடைக்காத நிலையில், கூட்டுச் சராசரியும், இடைநிலையும் தெரிந்திருந்தால் முகடை மேற்கூறிய வாய்பாட்டின் துணை கொண்டு காணலாம்.

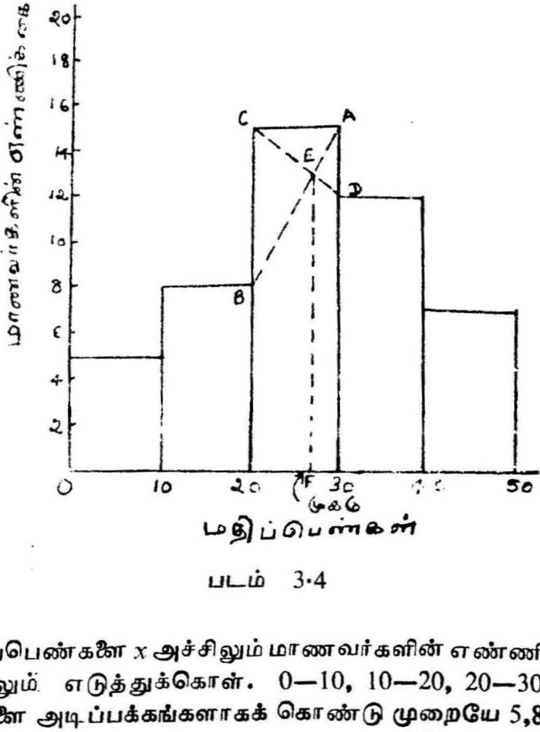
எடுத்துக்காட்டு

1. கீழ்க்காணும் பரவலுக்கு முகடைப் பல்வேறு முறைகளில் காண்க.

மதிப்பெண்கள் :	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை :	5	8	15	12	7

1 வரைபடம்மூலம் முகடு காணல்.

அலைவெண் செவ்வகப் படமும் முகடு கணக்கிடலும்.



படம் 3·4

மதிப்பெண்களை x அச்சிலும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை y அச்சிலும் எடுத்துக்கொள். 0—10, 10—20, 20—30, 30—40, 40—50 களை அடிப்பக்கங்களாகக் கொண்டு முறையே 5,8,15, 12, 7 உயரத்திற்குச் செவ்வகங்கள் வரை. முடிவில் கிடைக்கக்கூடிய வரைபடம் செவ்வகப் படமாகும். மிக உயரமான செவ்வகத்தின் அதாவது, 20—30 ஐ அடிப்பக்கமாகக் கொண்ட செவ்வகத்தின் வலது பக்க உச்சி மூலையையும் (A), மிக உயரமான செவ்வகத்தின் இடப் பக்கமுள்ள செவ்வகத்தின் வலதுபக்க மூலை (B)-யையும் சேர்க்க. இதேபோல் C, D-யை சேர். AB-யும் CD-யும் E-ல் வெட்டிக் கொள்ளட்டும். x அச்சிற்குச் செங்குத்தாக EF-ஐ வரைக. F-ன் x அச்சுத்தூரம் $= 27$. F-ன் x அச்சுத்தூரம் தான் வரைபடம் மூலமாக முகடு ஆகும்.

$\therefore$ முகடு $= 27$.

இரு வாய்பாடுகளையும் தனித்தனியே பயன்படுத்தினால், முகட்டுப் பிரிவு இடைவெளி 20—30.

(i) முகடு $= l + \dfrac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2} \times c$

$$= 20 + \frac{(15 - 8)\,10}{2 \times 15 - 8 - 12} \qquad = 20 + \frac{7 \times 10}{10}$$

$$= 20 + 7 = \mathbf{27}$$

(ii) முகடு $= l + \dfrac{C f_2}{f_1 + f_2} = 20 + \dfrac{12 \times 10}{12 + 8} = 20 + \dfrac{120}{20}$

$$= 20 + 6 = \mathbf{26}$$

பெருக்குச் சராசரி: $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ என்ற n மதிப்புக்களின் பெருக்குச் சராசரியானது $(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots\ldots x_n)^{\frac{1}{n}}$

நிகழ்வுப் பரவலின் $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்ற மதிப்புகளோடு இணைந்த நிகழ்வெண்கள் முறையே $f_1, f_2 \ldots\ldots f_n$ ஆக அமையுமாயின் அப்பரவலின் பெருக்குச் சராசரி

$= [\,(x_1 \cdot x_1 \cdot x_1 \ldots\ldots f_1$ தடவைகள்) $(x_2 \cdot x_2 \cdot x_2 \ldots\ldots f_2$ தடவைகள்) $(x_3 \cdot x_3 \ldots\ldots f_3$ தடவைகள்) $\ldots\ldots\ldots]^{\frac{1}{N}}$

(இங்கு $N = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots\ldots\ldots + f_n$)

$$= \left(x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot x_3^{f_3} \ldots\ldots x_n^{f_n}\right)^{\frac{1}{N}}$$

இரு பக்கங்களிலும் மடக்கை எடுக்க, (சீர் படா விவரங்களுக்கு)

$$\log G \cdot M. = \frac{1\,[\log x_1 + \log x_2 + \ldots\ldots\ldots + \log x_n]}{n}$$

இங்கு $G \cdot M =$ பெருக்குச் சராசரி.

நிகழ்வெண் பரவலுக்கு,

$$\log\ G \cdot M = \frac{(f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + \ldots\ldots\ldots + f_n \log x_n)}{N}$$

எனவே, பெருக்குச் சராசரியின் மடக்கை

= மதிப்புக்களின் மடக்கையின் கூட்டுச் சராசரி.

எ. கா. 1

பின்வரும் எண்களின் பெருக்குச் சராசரி காண்க:
7·96, 13·82, 22·95, 35·34.

$$\text{பெருக்குச் சராசரி} = G = (x_1 \, x_2 \, x_3 \, \ldots\ldots \, x_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$= (7{\cdot}96 \times 13{\cdot}82 \times 22{\cdot}95 \times 35{\cdot}34)^{\frac{1}{4}}$$

$$\log G = \frac{1}{4}[\log 7{\cdot}96 + \log 13{\cdot}82 + \log 22{\cdot}95 + \log 35{\cdot}34].$$

$$\log G = 1{\cdot}2376$$

$$G = \mathbf{17{\cdot}28}$$

எ. கா. 2

கீழ்க்காணும் பட்டியலுக்குப் பெருக்குச் சராசரியைக் காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	4—8	8—12	12—16	16—20	20—24	24—28	28—32	32—36	36—40
அலைவெண்	6	10	18	30	15	12	10	6	2

மையப்புள்ளி x	அலைவெண் f	$\log_{10} x$	$f(\log_{10} x)$
6	6	0·778151	4·668906
10	10	1·000000	10·000000
14	18	1·146128	20·630304
18	30	1·255273	37·658190
22	15	1·342423	20·136345
26	12	1·414973	16·979676
30	10	1·477121	14·771210
34	6	1·531479	9·188714
38	2	1·579784	3·159568
	109		137·193073

$$\log_{10} \text{(பெருக்குச் சராசரி)} = \frac{\Sigma f (\log_{10} x)}{N}$$

$$= \frac{137 \cdot 193073}{109} = 1 \cdot 25865$$

பெருக்குச் சராசரி $= 18 \cdot 14$

பெருக்குச் சராசரியின் சிறப்பு இயல்புகள்

தேற்றம் 1 : n_1 மதிப்புகளின் பெருக்குச் சராசரி G_1 ஆகவும், n_2 மதிப்புகளின் பெருக்குச் சராசரி G_2 ஆகவும் இருந்தால், இவை இரண்டும் சேர்ந்த புதிய குழுவின் பெருக்குச் சராசரி G ஆக இருக்கும் பொழுது,

$\log G = \dfrac{n_1 \log G_1 + n_2 \log G_2}{n_1 + n_2}$ என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

நிரூபணம்

$x_1, x_2 \dots \dots x$, என்பன முதல் n_1 மதிப்புக்களாக இருக்கட்டும்.

$y_1, y_2 \dots \dots y_{n_2}$ என்பன வேறு n_2 மதிப்புக்களாக இருக்கட்டும்.

$$n_1 \log G = \log x_1 + \log x_2 + \dots \dots + \log x_{n1}$$

$$n_2 \log G_2 = \log y_1 + \log y_2 + \dots \dots \dots + \log y_{n2}$$

$$\therefore \frac{n_1 \log G_1 + n_2 \log G_2}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{\log x_1 + \dots \dots + \log x_{n_1} + \log y_1 + \dots \dots + \log y_{n_2}}{n_1 + n_2}$$

$$= \log G$$

$$\frac{n_1 \log G_1 + n_2 \log G_2}{n_1 + n_2} = \log G$$

தேற்றம் 2 : ஒரு தொடர் பின்னத்தின் பெருக்குச் சராசரியானது, பகுதியின் பெருக்குச் சராசரியை, தொகுதிகளின் பெருக்குச் சராசரியால் வகுத்த ஈவு ஆகும்.

நிரூபணம்

$\frac{a_1}{b_1}, \frac{c_2}{b_2} \ldots\ldots \frac{a_n}{b_n}$ என்பது n தொடர் பின்னங்களாக இருக்கட்டும். அதன் பெருக்குச் சராசரி $= \sqrt[n]{\left(\frac{a_1}{b_1}\right)\left(\frac{a_2}{b_2}\right)\cdots\left(\frac{a_n}{b_n}\right)}$

$$= \frac{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots\cdots a_n}}{\sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdots\cdots b_n}} = \frac{\text{பகுதிகளின் பெருக்குச் சராசரி}}{\text{தொகுதிகளின் பெருக்குச் சராசரி}}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

N, x களுடைய பெருக்குச்சராசரி $M_g x$ ஆகவும்,
N, y களுடைய பெருக்குச்சராசரி $M_g y$ ஆகவும் இருந்தால்,
$2N$ மதிப்புக்களின் பெருக்குச்சராசரி Mg என்பதை
$M_g^2 = M_g x \, M_g y$ என்ற தொடர்பில் காண்க.

N, x-னுடைய பெருக்குச்சராசரி $M_g x$ ஆக இருப்பதால்,

$$M_g\, x = (x_1\, x_2\, x_3 \cdots\cdots x_N)^{\frac{1}{N}}$$

N, y-னுடைய பெருக்குச்சராசரி $M_g\, y$ ஆக இருப்பதால்,

$$M_g\, y = (y_1\, y_2 \cdots\cdots y_N)^{\frac{1}{N}}$$

$2N$ மதிப்புக்களின் பெருக்குச் சராசரி M_g என்பதாக இருப்பதால்,

$$M_g = (x_1\, x_2 \cdots\cdots x_N\, y\, y_2 \cdots\cdots y_N)^{\frac{1}{2N}}$$

$$\therefore\ M_g^2 = (x_1\, x_2 \cdots\cdots x_N\, y_1\, y_2 \cdots\cdots y_N)^{\frac{1}{N}}$$

$$= (x_1\, x_2 \cdots\cdots x_N)^{\frac{1}{N}} \cdot (y_1\, y_2 \cdots\cdots y_N)^{\frac{1}{N}}$$

$$= M_g\, x \cdot M_g\, y.$$

$$\therefore\ M_g^2 = M_g x \cdot M_g y.$$

எ.கா.

ஒவ்வொரு கால இடைவெளிக்கும் r என்ற மாருத விகிதத்தில், மக்கட்தொகை, n கால இடைவெளிகளுக்கு அதிகரிக்கிறது. n-ஆவது இடைவெளியின் முடிவில் ஜனத்தொகை P_n ஆக இருந்தால்

$P_n = P_0 (1 + r)^n$ எனக் காட்டுக.

முதல் கால இடைவெளியின் முடிவில் ஜனத்தொகை

$$= P_0 + r P_0$$

$= P_0 (1 + r)$ இங்கு, P_0 என்பது

ஆரம்ப ஜனத்தொகை 2-வது கால இடைவெளியின் முடிவில் ஜனத்தொகை $P_0 (1 + r) + r P_0 (1 + r)$

$$= (1 + r) [P_0 + r (P_0)]$$

$$= (1 + r) (P_0 + r P_0) = P_0 (1 + r)^2$$

இதேபோன்று மூன்றுவது கால இடைவெளிக்குப்பின் ஜனத்தொகை $P_0 (1 + r)^3$

$\therefore$ n-ஆவது கால இடைவெளிக்குப்பின் ஜனத்தொகை $P_0 (1 + r)^n$

இசைச்சராசரி : $x_1, x_2 \ldots \ldots x_n$ என்ற n மதிப்புகளின்

$$\text{இசைச்சராசரி} = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

நிகழ்வுப்பரவலில் $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ என்பவை n மைய மதிப்புகளாகும். அவைகளின் நிகழ்வெண்கள் முறையே $f_1 \cdot f_2 \ldots\ldots f_n$ ஆகவும் இருந்தால் அப்பரவலின்

$$\text{இசைச்சராசரி} = \frac{N}{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \frac{f_3}{x_3} + \ldots\ldots + \frac{f_n}{x_n}}$$

எ.கா. கீழ்க்காணும் பரவலுக்கு இசைச்சராசரியைக் காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	4—8	8—12	12—16	16—20	20—24	24—28	28—32	32—36	36—40
அலைவெண்	6	10	18	30	15	12	10	6	2

மையப்புள்ளி x	அலைவெண் f	$\frac{1}{x}$	$f\left(\frac{1}{x}\right)$
6	6	0 166661	1·000002
10	10	0·100000	1·000000
14	18	0·071429	1·285722
18	30	0·055556	1·666680
22	15	0·045455	0·681825
26	12	0.038462	0 461544
30	10	0·033333	0·333330
34	6	0·029412	0·176472
38	2	0·026316	0·052632
	109		6·658207

$$\frac{1}{\text{இசைச்சராசரி}} = \frac{\sum \frac{f}{x}}{N} = \frac{6\ 658207}{109}$$

$$\therefore \text{ இசைச்சராசரி} = \frac{109}{6{\cdot}658207}$$

$$= \mathbf{16{\cdot}37.}$$

எ.கா.

கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் சில கணக்குகளை, தீர்வு எடுக்கப்பட்ட நேரம் (நிமிடங்களில்) கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதிலிருந்து தீர்வு செய்ய எடுக்கப்பட்ட நேரத்தின் கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி, இசைச்சராசரி முதலியவற்றைக் காண்க.

நேரம் (நிமிடத்தில்)	0—1	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	8—9	9—10
கணக்குகளின் எண்ணிக்கை	3	28	50	35	35	23	14	15	4	:5

மையப் புள்ளி (x)	நிகழ்வெண் (f)	xf	log x	f log x	$f \times \frac{1}{x}$
0·5	3	1·5	$\bar{1}$·6990	$\bar{1}$·0970	6·0000
1·5	28	42·0	0·1761	4·9308	18·6667
2·5	50	125·0	0·3979	19·8950	20·0000
3·5	35	122·5	0·5441	19·0435	10·0000
4·5	35	157·5	0·6532	22·8620	7·7778
5·5	23	126·5	0·7404	17·0292	4·1818
6·5	14	91·0	0·8129	11·3806	2.1538
7·5	15	112·5	0·8751	13·1265	2·0000
8·5	4	34·0	0·9294	3·7176	0·4706
9.5	5	47·5	0·9777	4·8885	0·5263
	212	860·0		115·9707	71·7770

கூட்டுச்சராசரி $= \frac{\Sigma f(x)}{n} = \frac{860 \cdot 0}{212} = 4 \cdot 06$ நிமிடங்கள்

பெருக்குச்சராசரியின் அடுக்கு மூலம் (log) $= \frac{\Sigma f \cdot \log x}{n} = \frac{115 \cdot 9707}{212}$

$= 0 \cdot 54703$

$\therefore$ பெருக்குச்சராசரி $= 3 \cdot 52$ நிமிடங்கள்

$$\frac{1}{\text{இசைச்சராசரி}} = \frac{\Sigma f \times \frac{1}{x}}{n} = \frac{71 \cdot 7770}{212} = 0 \cdot 3386.$$

$\therefore$ இசைச்சராசரி $= \frac{1}{0 \cdot 3386} = 2 \cdot 95$ நிமிடங்கள்.

மேற்கண்ட மதிப்புக்கள்

எ.கா : ஒரு மாறி, ஒவ்வொன்றுக்கும் நிகழ்வெண் 1 ஆக a, ar, $ar^2 \ldots\ldots ar^{n-1}$ என்னும் மதிப்புகளைப் பெறுகிறது.

$M.H = G^2$ என நிறுவுக.

இங்கு M கூட்டுச் சராசரி, G-பெருக்குச் சராசரி, H-இசைச் சராசரி.

$$M = \frac{a + ar + \ldots\ldots\ldots ar^{n-1}}{n}$$

$$= \frac{a(1 - r^n)}{n(1 - r)}$$

$$G = (a \cdot ar \cdot ar^2 \ldots\ldots\ldots\ldots ar^{n-1})^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left[a^n r^{1 + 2 + \ldots\ldots\ldots \overline{n-1}}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[a^n \cdot r^{\frac{n-1\, n}{2}}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a} + \frac{1}{ar} + \dots\dots \frac{1}{a \cdot r^{n-1}}}$$

$$= \frac{n}{\frac{\frac{1}{a}\left[\left(\frac{1}{r}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{r} - 1}}$$

$$= \frac{a \cdot n\,(1 - r)\, r^n}{(1 - r^n)\, r} = \frac{a \cdot n\,(1 - r)\, r^{n-1}}{1 - r^n}$$

$$G^2 = \left(ar^{\frac{n-1}{2}} \right)^2 = a^2\, r^{n-1}$$

$$M \cdot H = \frac{a\,(1 - r^n)}{n\,(1 - r)} \times \frac{a \cdot n\,(1 - r)\, r^{n-1}}{1 - r^n} = a^2\, r^{n-1} = G^2$$

$$\therefore \quad M \cdot H = G^2$$

எ.கா. கொடுக்கப்பட்டுள்ள n ராசிகளின் கூட்டுச்சராசரி M-லிருந்து பெறப்படும் விலக்கங்கள் $d_1, d_2, \dots d_n$. M-ன் மதிப்போடு ஒப்பிடும்போது,

d-யின் மதிப்புகள் சிறியவை. எனவே $\left(\frac{d}{M}\right)^3$, மற்றும் $\left(\frac{d}{M}\right)$-ன் உயர்படிகளைச் சிறியவை என நீக்கிவிட்டு கீழ்க்காணும் தொடர்புகளைத் தோராயமாக நிறுவுக.

$$G = M\left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{M^2}\right], \quad M^2 - G^2 = \sigma^2$$

$$H = M\left[1 - \frac{\sigma^2}{M^2}\right]$$ [இங்கு G என்பது பெருக்குச் சராசரி; H இசைச் சராசரி; σ திட்ட விலக்கம்.]

நிரூபணம்

ராசிகளின் மதிப்புகள் $x_1, x_2, x_3 \dots\dots x_n$ என இருக்கட்டும். கூட்டுச்சராசரி M ஆக உள்ளது. M-லிருந்து வரும் விலக்கங்களை $d_1, d_2, \dots\dots d_n$ எனக் கொள்வோம்.

$$G = (x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\log G = \frac{1}{n}(\log x_1 + \log x_2 + \ldots\ldots \log x_n)$$

$$= \frac{1}{n}[\log(M + d_1) + \log(M + d_2) + \ldots\ldots \log(M + d_n)]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\log\left\{M\left(1 + \frac{d_1}{M}\right)\right\} + \log M\left\{\left(1 + \frac{d_2}{M}\right)\right\} + \ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\log M + \log\left(1 + \frac{d_1}{M}\right) + \log M + \log\left(1 + \frac{d_2}{M}\right) + \ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[n \log M + \left(\frac{d_1}{M} - \frac{d_1^2}{2M^2} + \frac{d_1^3}{3M^3} - \ldots\right) + \left(\frac{d_2}{M} - \frac{d_2^2}{2M^2} + \frac{d_2^3}{3M^3} \ldots\ldots\right) + (\quad) + (\quad) + \ldots\right]$$

$[\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots\ldots$ என்றிருப்பதால்]

$$= \frac{1}{n}\left[n \log M + \frac{d_1 + d_2 + \ldots\ldots d_n}{M} - \frac{d_1^2 + d_2^2 + \ldots\ldots d_n^2}{2M^2} + \frac{d_1^3 + d_2^3 + \ldots d_n^3}{3M^3} + \ldots\right]$$

$\frac{d_1^3}{M^3}$, ... வை மிகவும் சிறியது என்று நீக்கவும்.

$d_1 + d_2 + d_n = 0$...... என்பதால் அதனையும் நீக்கவும்.

$$\log G = \frac{1}{n}\left[n \log M - \frac{d_1^2 + d_2^2 + \cdots\cdots d_n^2}{2M^2} \right]$$

$$= \frac{1}{n}\left(n \log M - \frac{n\sigma^2}{2M^2} \right) = \log M - \frac{\sigma^2}{2M^2}$$

$$\therefore \quad \log G - \log M = \frac{-\sigma^2}{2M^2}$$

$$\log\left(\frac{G}{M}\right) = \frac{-\sigma^2}{2M^2}$$

$$\left(\frac{G}{M}\right) = e^{-\frac{\sigma^2}{2M^2}}$$

$$= 1 - \frac{\sigma^2}{2M^2} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{\sigma^4}{4M^4} - \cdots\cdots\cdots$$

$\left(e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots\cdots \right.$ என்றிருப்பதால்$\left.\right)$

$\frac{\sigma^4}{M^4}\cdots\cdots\cdots$ வைச் சிறியது என்று நீக்கினால்,

$$\frac{G}{M} = \left(1 - \frac{\sigma^2}{2M^2} \right)$$

$$\therefore \quad G = M\left(1 - \frac{\sigma^2}{2M^2} \right) \qquad \cdots\cdots \quad (1)$$

மேலும், $M^2 \quad G^2 = M^2 \left[\left(1 - \left(1 - \frac{\sigma^2}{2M^2} \right)^2 \right] \right.$

$$= M^2 \left(2\frac{\sigma^2}{2M^2} - \frac{\sigma^4}{4M^4} \right) = M^2 \cdot \frac{\sigma^2}{M^2}$$

$$= \sigma^2 \qquad \cdots\cdots \quad (2)$$

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots\cdots \frac{1}{x_n}}$$

$$= \frac{n}{\frac{1}{M+d_1} + \frac{1}{M+d_2} + \cdots\cdots\cdots \frac{1}{M+d_n}}$$

$$= \frac{nM}{\frac{1}{\left(1+\frac{d_1}{M}\right)} + \frac{1}{\left(1+\frac{d_2}{M}\right)} + \cdots\cdots}$$

$$= \frac{n M}{\left(1 - \frac{d_1}{M} + \frac{d_1^2}{M^2} \cdots\cdots\right) + \left(1 - \frac{d_2}{M} + \frac{d_2^2}{M_2} \cdots\cdots\right) + (\ ) + (\ ) + (\ )}$$

[$(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\cdots$ என்றிருப்பதால்]

$$= \frac{n M}{n - \frac{d_1 + d_2 + d_3 + \cdots\cdots d_n}{M} + \frac{d_1^2 + d_2^2 + \cdots\cdots d_n^2}{M^2}}$$

$$= \frac{n M}{n - 0 + \frac{n \sigma^2}{M^2}} = \frac{M}{1 + \frac{\sigma^2}{M^2}}$$

$$= M\left(1 + \frac{\sigma^2}{M^2}\right)^{-1} = M\left(1 - \frac{\sigma^2}{M^2}\right) \cdots (3)$$

ஒரு சிறந்த மையப் போக்களவையின் பண்புகள்

1. கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்களின் பிரதிநிதியாக ஒரு மையப் போக்களவை இருக்கவேண்டுமாயின், அது எல்லா ராசிகளின் மதிப்புகளையும் கொண்டு கணக்கிடப்படவேண்டும்.

2. இதனைப் புரிந்து கொள்ளுதல் எளிதாக இருத்தல் வேண்டும்.

3. சராசரி எளிதிலும், விரைவிலும் கணக்கிடும் வகையில் இருத்தல் நலம். நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடப்படவேண்டும்.

4. கொடுக்கப்பட்டுள்ள ராசிகளின் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகள் சராசரியைப் பெரிதும் பாதித்தல் கூடாது.

5. கணிப்புகளில் ஏற்படும் சிறு பிழைகளோ, அல்லது கூறுகளின் ஏற்றவிறக்கப் பிழைகளோ சராசரியின் மதிப்பில் பெருமாற்றத்தை ஏற்படுத்தலாகாது. கூடுமானவரை, சராசரி கூறுக்குக் கூறு மாறுந்தன்மை (stable) உள்ளதாய் இருத்தல் வேண்டும்.

6. சராசரி, மேன்மேலும் கணக்கியல் வழி துறைகளுக்குப் பயன்படுத்தத்தக்க வாய்பாட்டைக் கொண்டிருத்தல் வேண்டும்.

சராசரிகளின் இணை தராதரங்கள்

பண்பு	கூட்டுச்சராசரி	இடைநிலை	முகடு	பெருக்குச்சராசரி	இசைச் சராசரி
1. எல்லா ராசிகளின் மதிப்புகளையும் பயன்படுத்தி சராசரியைக் கணக்கிடுதல்	சீர்படா விவரங்களுக்கு $\bar{x} \sum_{r=1}^{n} \frac{x_r}{n}$ எனவும், பாகுபடுத்தப்பட்ட விவரங்களுக்கு $\bar{x} = \frac{\Sigma f_r x_r}{n}$ எனவும் வாய்பாடுகளைக் கொண்டதால் இது பரவல் முழுவதையும் பிரதிபலிக்கிறது.	மாறியின் மதிப்புகளை அவற்றின் ஏறு வரிசை மதிப்புகளாக எழுதி நடுமதிப்பு காண்பதற்கு மட்டுமே பயன்படுத்துவதால் இது எல்லா ராசிகளின் மதிப்புகளையும் பயன்படுத்திக் கணக்கிடப்படுவதில்லை.	இது பரவலில் பெருமளவில், காணப்படும், மாறியின் மதிப்பாதலால் இது எல்லா ராசிகளின் மதிப்புகளையும் பொறுத்து அமைவதில்லை.	சீர்படா விவரங்களுக்கு $G = (x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{N}}$ பாகுபடுத்தப்பட்ட விவரங்களுக்கு $G = (x_1^{f_1} x_2^{f_2} \ldots x_n^{f_n})^{\frac{1}{N}}$ எனவே பெருக்கு சராசரி பரவல் முழுவதையும் பொறுத்து அமைந்துள்ளது.	சீர்படா விவரங்களுக்கு $H = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_r}}$ பாகுபடுத்தப்பட்ட விவரங்களுக்கு $H = \frac{N}{\sum \frac{f_r}{x_r}}$ எனவே இசைச் சராசரி ராசிகளின் எல்லா மதிப்புகளையும் கொண்டு கணக்கிடப்படுகிறது.

2. நன்கு வரையறுக்கப் பட்ட வாய்பாடு	உண்டு	உண்டு	முகடிற்கு நன்கு வரையறுக்கப் பட்ட தனிப்பட்ட ஒரு வாய்பாடு கிடையாது. பல் வேறு வழிகளில் கணக்கிடப்படும் முகடின் மதிப்புக் கள் மாறுபடு கின்றன.	உண்டு	உண்டு
3. கணக்கிடு தல் எளிமை	இதனைச்சுருக்கு வழியிற் கணக் கிட, ஒரு வசதி யான மையப் புள்ளியிலிருந்து விலக்கங்களை எடுத் துக் கொண்டு $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f_r d_r}{N} \times C$ என்ற வாய் பாட்டைப் பயன் படுத்தலாம்.	பரவலின் மதிப் புகளைப் பார்த்த மாத்திரத்திலே யே ஒருமதிப்பை ஊகித்தும், அல்லது $M = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times C$ என்ற வாய் பாட்டைப்பயன் படுத்தியும் ஓர் அளவு எளிதாக கணக்கிடலாம்.	பரவலில் அடிக் கடி காணப்படு கின்ற மதிப்பாத லால் இதனைராசி களின் மதிப்பு களைக் கூர்ந்து நோக்கினாலேயே, அறிந்துகொள் ளலாம்.	பெருக்குச் சரா சரியின் வாய் பாட்டில் ராசி களின் மதிப்பு களின் [illegible] தங்களைப் பயன் படுத்திக்கணக்கிட வேண்டி உள்ள தால் இது சிறிது கடினமானதே.	இசைச் சராசரி யும் கணக்கிடு வதற்கு எளி தன்று.

பண்பு	கூட்டுச்சராசரி	இடைநிலை	முகடு	பெருக்குச்சராசரி	இசைச் சராசரி
4. நிலையான தன்மை	இதனைக்கணக்கிடும்போது கூறுகளின் கணிப்புப் பிழைகளோ ஏற்ற விறக்கப் பிழைகளே பெரிதும் பாதிப்பதில்லை.	இது அவ்வளவு நிலையானதல்ல.	கூறு பெரிதாக இருந்தாலொழிய முகடும் நிலையான தன்மை கொண்டிராது.	அவ்வளவு நிலையானதல்ல.	அவ்வளவு நிலையானதல்ல
5. கணக்கியல் வழி துறைக்கு மென்மேலும் உட்படும் தன்மை	இத்தன்மை கூட்டுசராசரிக்குப் பெரிதும் உள்ளது. n_1, n_2 என்ற அளவுகளுடைய இரு கூறுகளின் சராசரிகள் $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ என இருந்தால் $\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$ என்ற ஒரு வாய்பாட்டை மட்டுமே பயன்படுத்தி	இரு பரவல்களின் தனி இடைநிலை தெரிந்தபோதும் இரண்டும் இணைந்த பரவலின் இடைநிலையை அறிய வேண்டுமாயின் அதற்கென நேரடியாகப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடுவதற்கு வாய்பாடு	இது கணக்கியல் பண்பாடுக்கு உகந்த வாய்பாட்டை கொண்க்டதல்ல.	இரு பரவல்களின் தனித்தனி பெருக்குச்சராசரிகள் G_1, G_2 என கணக்கிடப் பட்டால் அவற்றின் இணைந்த பரவலின் பெருக்குச் சராசரி G ஆனது $\log G = \frac{n_1 \log G_1 + n_2 \log G_2}{n_1 + n_2}$	இசைச் சராசரியின் வாய்பாடு மென்மேலும் கணக்கியல் வழிமுறைகளுக்கு மிகவும் உகந்ததாக அமையவில்லை.

	இரு கூறுகளும் இணைந்த பரவலின் கூட்டுச் சராசரி காணலாம். மேலும் புள்ளியியல் முழுவதும் கூட்டுச் சராசரியின் பல்வேறு கணக்கியல் பண்புகள் பெரும் அளவில் உதவுகின்றன.	கிடையாது. மீண்டும் ஒருமுறை எல்லா ராசிகளையும் வரிசைப் படுத்தி அமைத்தல் வேண்டும்.		என்ற வாய்பாட்டால் தரப்படுகிறது. இதன் வாய்பாடு மேன்மேலும் கணக்கியல்வழி பயன்துறைக்குப் பயன்படுத்த வல்லது.	
6. உச்சமதிப்புகளால் பாதிக்கும் தன்மை.	கூட்டுச் சராசரி பரவலின் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளுக்குப் பெருமளவு முக்கியத்துவம் தருகிறது. எடுத்துக்காட்டாக 42	பரவலின் உச்ச மதிப்புகள் இடைநிலையைப் பெரிதும் பாதிப்பதில்லை. பரவலில் எதிர்பாராது புகுத்தப்படும் மீச்சிறு அல்லது	உச்ச மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை பெருமளவில் இராவிடில் முகடு இவற்றால் அதிகம் பாதிக்கப்படுவதில்லை.	ராசிகளில் ஒன்றின் மதிப்பு எதிர்பாராது சிறியதாக அமைந்துவிட்டால் பெருக்குச் சராசரி பெருமளவில் பாதிக்கப்	உச்ச மதிப்புகளால் மிகக் குறைந்த அளவில் பாதிக்கப்பட வேண்டுமாயின் கூட்டு, பெருக்கு, இசைச் சராசரி இவை மூன்றில்

பண்பு	கூட்டுச்சராசரி	இடைநிலை	முகடு	பெருக்குச்சராசரி	இசைச் சராசரி
	ரூபாயைச் சராசரி மாத வருமானமாக உள்ள 9 பேர் கொண்ட ஓர் குழுவில் 1002 ரூபாய் மாத வருமானமுள்ள ஒருவர் சேர்க்கப்பட்டால் குழுவின் கூட்டுச் சராசரி 42லிருந்து 90 ரூபாயாகத் திடீரென உயர்கிறது. எனவே உச்ச மதிப்புகள் கூட்டுச் சராசரியைப் பெரிதும் பாதிக்கின்றன.	மீப்பெரு மதிப்புகளால் வரிசைப் படுத்தப்பட்ட மதிப்புகளில் நடு மதிப்பின் இடம் தான் சிறிதுமாறுபடுமே தவிர இடைநிலையின் மதிப்பு கூட்டுச் சராசரியைப் போல் ஒரேயடியாகப் பாதிக்கப் படுவதில்லை.		படுகிறது. ஏதேனும் ஓர் ராசியின் மதிப்பு பூஜ்யம் ஆக இருந்தாலும் பெருக்குச் சராசரி மதிப்பே பூஜ்யம் ஆகி ஒரு பொருளற்ற சராசரி ஆக மாறிவிடுகிறது. எனினும், கூட்டுச் சராசரியை விட ஓரளவுகுறைந்தே உச்ச மதிப்புகளால் பாதிக்கப் படுகிறது.	இசைச்சராசரியே தேர்ந்தெடுத்தல் வேண்டும். ஏன் எனில் ராசிகளின் தலைகீழ் மதிப்புகளைப் பயன்படுத்தி இதனைக் கணக்கிடுகிறோம்
7 வரைபடங்கள் மூலம் மதிப்புகளைக் காணுதல்.	கூட்டுச் சராசரியை வரைபடம் மூலம் காணுதல் இயலாது.	இடைநிலைவளர் நிகழ்வெண்வரையில் $\frac{N}{2}$-வை y அச்சு	நிகழ்வெண் வரையில் உச்சி புள்ளியின் x அச்சுத் தூரமே	வரைபடத்தின் மூலம் காண இயலாது.	வரைபடத்தின் மூலம் காண இயலாது.

		தூரமாககொண்ட புள்ளியின் x அச்சுத் தூர மாகும்.	முகடாகும். இதனை வளர் நிகழ்வெண் வரையின் திருகு புள்ளியாகவும் காணலாம்.		
8. எளிதில் புரிந்துகொள்ளும் தன்மையும் சிறப்பாகப் பயன்படும் சூழ் நிலைகளும்.	சராசரி என்றுலே மக்கள் பெரிதும் நினைவில் கொள்வது கூட்டுச்சராசரியே. மாறியின் எல்லா மதிப்புகளையும் கூட்டி ராசிகளின் எண்ணிக்கையால் வகுப்பது எனும் கருத்து எல்லோருக்கும் எளிதில் புரியவல்லது. ராசிகளின் மொத்த மதிப்புகளும்	வரிசைப் படுத்தப்பட்ட மதிப்புகளின் மைய மதிப்பாதலால் இதன் கருத்தையும் புரிந்து கொள்வது எளிது. ராசிகளின் தனிப் பட்ட மதிப்புகள் தெரியாவிடினும், அவற்றின் தரங்கள் (ran`) மட்டும் அறியப் பெற்று நடு ராசி	சராசரிகளிலேயே மிகவும் பயனுள்ளதும் பாமர மக்களும் நன்கு புரிந்து கொள்ளத்தக்கதும் முகடே ஆகும். ஓர் ஆற்றிலைக்கடக்கும் போது அதன் ஆழத்தின் கூட்டுச் சராசரியோ இடை நிலையோ பயன் படாது.	பெருக்குச் சராசரியைக் கணக்கிட லாக்கிரதங்கள் பயன்படுத்தப்படுவதால் சாதாரண மனிதனுக்கு இதனைப் புரிந்து கொள்வது கடினம். மக்கள் தொகை கணிப்புகள், உற்பத்தி அளவுகள் விற்பனை விவரங்கள் போன்றவற்றில்	இதனைப் புரிந்து கொள்வது கடினம். ஒரு மாறியின் மாறுத அளவுடன், மற்றொரு மாறியின் மதிப்புக்களை ஒப்பிடும் போது இது மிகவும் பயன்படுகிறது. வீதங்கள், காலம், ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் சென்ற தூரம், ஒரு ரூபாய் அல்லது

பண்பு	கூட்டுச்சராசரி	இடைநிலை	முகடு	பெருக்குச்சராசரி	இசைச் சராசரி
	அவற்றின் எண்ணிக்கையும் மட்டுமே தெரிந்தாலும் இதனைக் கணக்கிடலாம். வருமானம் மதிப்பெண்கள், ஆயுட்காலம், தொழில் வளர்ச்சி, விலைவாசிகள் போன்றவற்றின் சராசரி மதிப்பைக் கணக்கிட இது பெரிதும் உதவுகிறது. பரவுகை, அளவுகள் கோட்டளவைகள், விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகள் கூறுப்பரவல்களின்கணக்கியல் பண்புகள்போன்ற பல்வேறு புள்ளியியல் துறை	யின் மதிப்பு மட்டும் அறியப்பெற்ருல் இடைநிலையைக்கணக்கிடலாம். எடுத்துக்காட்டாக,35 மாணவரின் உயரங்களின் இடைநிலை தெரிய வேண்டுமாயின் 35 மாணவர்களையும் வரிசையாக நிறுத்தி, அதில் நடு மாணவரது உயரத்தை மட்டும் அளந்தால் போதுமானது. செல்வம், லாபம், ஊதியம் இவற்றின் இடைநிலை மதிப்புகள் பரவலின் தன்மையை	ஒரு கடையில் விற்பனை ஆகும் காலணிகள், தொப்பிகள், அங்கிகள் இவற்றின் அளவுகளின் முகடே வியாபாரிக்குத் தேவை ஆனது. குழந்தைகளின் சட்டைகளின் அளவுகள் 3, 5, 6, 7 என்பதற்கும் கடையில் கூட்டுச் சராசரி அளவு 4·25க்கோ அல்லது இடைநிலை 5·5க்கோ தைத்தால் அது எந்தக் குழந்தைக்கும் சரியாக இராது. அதிகமாக	விகிதங்களைப் பயன்படுத்திச்சராசரிகளைக் காணமுற்படும் போது இது பெரிதும் உதவுகிறது. இரு காலத் தொடர் வரிசைகளிலும்பெருக்குச் சராசரி உதவியால் இணைத்து பல்வேறு பண்புகளை அறியலாம். ஃபிஷர் (Fisher) இன், குறியீட்டு எண்ணும் ஒரு பெருக்குச் சராசரியே. மாறுதலில் ஒரு நிலையான வீதம் காணப்படின் அங்குக் கூட்டுச் சராசரிக்குப் பதி	: டாலருக்கு வாங்கப்படும் அல்லது விற்கப்படும் பொருட்களின் அளவுகள் போன்றவற்றின் சராசரி காண இது பயன்படுகிறது. மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளால் மிகக் குறைந்த அளவில் பாதிக்கப்படக் கூடிய சராசரி இதுவேயாம்.

களில் இது பெரிதும் பயன்படுகிறது. எனவே, பரவல் ஓரளவு சமச்சீர்உள்ளதாகவும், மென்மேலும் கணக்கியல் வழி துறைகளுக்குப் பயன்படுத்துவதற்காகவும் முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகளைப் பிரதிபலிக்க ஒரு நம்பிக்கையான அளவை தேவைப்படும் போது இதனைப் பயன்படுத்தலாம்.	நன்கு உணர்த்த வல்லவை. கண்களின் நிறம், அழகு, புத்தி கூர்மை போன்ற எண்களால் அளக்கப்பட இயலாத பண்புகளின் சராசரி மதிப்புகளைக் காண இடைநிலை உதவுகிறது. எனவே, விரைவில் கணக்கிடவும், பரவல் பெருமளவில் சமச்சீர் அற்றுகாணப்படும் போதும், உச்ச மதிப்புகள் பாதிக்க விரும்பா நிலையிலும் இதைப்பயன்படுத்தலாம். நிகழ்வெண் வரை J	விற்பனை யாகும் அளவு 5ஆனால் அதில் பெரும்பான்மையான சட்டைகள் இருந்தால்தான் வியாபாரி இலாபம் பெற முடியும். வியாபார வணிக துறையிலிருந்து அரசியல் கொள்கைகள் வரை மக்களின் கருத்தறிதல் போன்ற பல்வேறு நிலைகளிலும் ஒவ்வொரு மனிதனும் பயன்படுத்தத்தக்க சராசரி முகடே ஆகும். எனவே, மையப்போக்கினை விரைந்து அளப்	லாக, பெருக்குச் சராசரியையே பயன்படுத்த வேண்டும். எடுத்துகாட்டாக, பத்து ஆண்டுகளில் ஒரு நகரத்தின் மக்கள் தொகை 30% அதிகரித்தால் வருடாந்திர அதிகரிப்பு 3% அல்ல. 2 7% தான் ஆகும்.

பண்பு	கூட்டுச்சராசரி	இடை நிலை	முகடு	பெருக்குச்சராசரி	இசைச் சராசரி
		வடிவிலோ, அல்லது மாறுபட்ட J வடிவிலோ அமையும் போது, எடுத்துக்காட்டாக, விலைகள், வருமானங்கள் இவற்றின் பரவலில் இடை நிலையே சிறந்தது. ஏனெனில் இவற்றிலுள்ள மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகள் கூட்டுச் சராசரியை, பாதிப்பதுபோல் இதனைப் பாதிப்பது இல்லை.	பதற்கும், பாமர மக்களின் விருப்பு வெறுப்புகளைப் புரிந்து கொள்வதற்கான பரவலினைப் பிரதிபலிக்கும் அளவை காணவும் முகடு பயன் படுகிறது. குறிப்பிடத் தக்க வகையில் மீப்பெரு நிகழ்வெண் உள்ள பரவலுக்கு இது ஏற்றது.		

எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி (Weighted Arithmetic Mean)

எளிய சராசரியைக் கணக்கிடும்போது எல்லா ராசிகளின் மதிப்புகளையும் அப்படியே கூட்டி, ராசிகளின் மொத்த எண்ணிக்கையால் வகுத்துவிடுகிறோம். ஆனால், பெரும்பாலான சமயங்களில் எல்லா ராசிகளுக்கும் ஒரே அளவு முக்கியத்துவம் தர இயலாது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு தொழிற்சாலையில் பணிபுரிவோரது சராசரி வருமானத்தைக் காணத் தலைமையதிகாரி, கணக்கர், எழுத்தர், தொழிலாளர், காவலாளி ஆகியோரது வருமானத்தைக் கூட்டி, 5 ஆல் வகுப்பது பொருளற்றதாகும். ஏனெனில், தொழிற்சாலையில் ஒரு தலைமை அதிகாரி, இருகணக்கர், 7 எழுத்தர், 2000 தொழிலாளர்கள், 10 காவலாளிகள் இருக்கலாம். எனவே ஒவ்வொரு பிரிவினரது ஊதியத்தையும், பிரிவிலுள்ள எண்ணிக்கையால்பெருக்கிக் கிடைக்கும்தொழிற்சாலையின் மொத்த ஊதியத்தைப் பணிபுரிவோரது எண்ணிக்கையால் வகுத்தால் கிடைக்கும் சராசரி, எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி (Weighted Arithmetic Mean) எனப்படும். எனவே, $x_1, x_2 \dots x_n$ என்பவை n கணிப்புகளாகவும், அவற்றிற்கான எடைகள் $w_1, w_2, w_3 \dots w_n$ ஆகவும் இருந்தால் எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி

$$= \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}.$$

ஒரு நிகழ்வெண் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியில், $x_1, x_2, \dots x_n$-க்கு முறையே $f_1, f_2, \dots f_n$-ஐ எடைகளாகத் தந்து காண்கின்றோம்.

எடையிட்ட பெருக்குச் சராசரி

$x_1, x_2, \dots x_n$ என்ற ராசிகளின் எடைகள் முறையே $w_1, w_2 \dots w_n$ ஆனால் அவற்றின் எடையிட்ட பெருக்குச் சராசரி

$$G = \left[x_1^{w_1} x_2^{w_2} \dots x_n^{w_n} \right]^{\frac{1}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}}$$ ஆகும்.

எ.கா. கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு, எடையிட்ட பெருக்குச் சராசரியைக் காண்க.

பிரிவு		குறியீட்டெண்கள்	எடை
உணவு	...	125	7
உடை	...	133	5
எரிபொருள்	...	141	4
வீட்டு வாடகை	...	173	1
இதர செலவுகள்	...	182	3.

(ஆக்ரா B. Com. 1971)

பிரிவு	குறியீட்டெண்கள் x	எடை w	$\log_{1} x$	$\omega \log_{10} x$
உணவு	125	7	2·0969	14·6783
உடை	133	5	2·1239	10·6195
எரிபொருள்	141	4	2·1492	8·5968
வீட்டு வாடகை	173	1	2·2380	2·2380
இதரசெலவுகள்	182	3	2·2601	6·7803
		20		42·9129

எடையிட்ட பெருக்குச் சராசரி

$$\log_{10} G = \frac{42{\cdot}9129}{20}$$

$$= 2{\cdot}1457$$

$$G = 139{\cdot}8.$$

செப்பனிடா, தரப்படுத்தப்பட்ட இறப்பு வீதங்கள் (Crude and Standardised Death Rates)

இரு நகரங்களின் சுகாதாரச் சூழ்நிலைகளை ஒப்பிடுவதற்கு, இறப்பு வீதங்களை இரு நகரங்களுக்கும் கணக்கிட்டு, அதில் எந்த நகரத்தில் இறப்புவீதம் குறைவாக இருக்கிறதோ, அந்நகரில் மக்கள் அதிக உடல்நலத்துடன் வாழ்வதால் சுகாதார வசதிகள் மிகுந்து காணப்படும் என்ற முடிவுக்கு வருகிறோம்.

$$\text{செப்பனிடா இறப்பு வீதம்} = \frac{\text{இறப்புக்களின் மொத்த எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த மக்கட்தொகை}} \times 1000$$

$$= \frac{N}{P} \times 1000$$

ஆனால், இந்த இறப்பு வீதம் தரும் முடிவுகள் பெரும்பான்மையான சமயங்களில் சரியாக இராது. தொழில், கல்வி கருதி நடுத்தர வயதுடையவர்கள் பலர் கிராமங்களிலிருந்து நகரங்களுக்கு வந்துவிடும்போது, கிராமங்களில் பெரும்பான்மையாக முதியவர்களும் சிறு குழந்தைகளும் இருக்க நேரிடுகிறது. நடுத்தர

வயதினரைவிட இவர்களின் இறப்பு வீதம் அதிகம். எனவே, கிராம சூழ்நிலை உடல்நலத்துக்கு உகந்ததாக இருந்தாலும், செப்பனிடா இறப்பு வீதம் அதிக மதிப்பைத் தந்து மாறுபட்ட முடிவைத் தரலாம். எனவே, மக்கட்தொகையைப் பல்வேறு வயதுப் பிரிவுகளாகப் பிரித்துக் கொண்டு, ஒவ்வொரு வயதுப் பிரிவிற்கும் இறப்பு வீதத்தைக் கணக்கிட்டு அதன் எடையிட்ட சராசரியைக் காணவேண்டும்

இரு நகரங்களின் இறப்பு வீதங்களைக் கணக்கிடும்போது, எடைகளாக அந்தந்த நகரின் பல்வேறு வயதுப் பிரிவின் மக்கட் தொகைகளைப் பயன்படுத்த இயலாது. ஏனெனில், அவை வெவ்வேறாக இருக்கும். எனவே, எந்த மாவட்டம் அல்லது மாநிலத்துக்கு உரியனவோ அந்த மாவட்டம் அல்லது மாநிலத்தின் பல்வேறு வயதுப் பிரிவினரைப் பொது எடைகளாக இரு நகரங்களுக்கும் பயன்படுத்த வேண்டும். இது தரப்படுத்தப்பட்ட மக்கட்தொகை (Standard Population) எனப்படுகிறது. இது கொடுக்கப்படாவிடில், கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு நகரங்களில் ஒன்றைத் தரப்படுத்தப்பட்ட மக்கட்தொகுதியாகக் கருதி, அதன் பல்வேறு வயதுப் பிரிவின் மக்கட்தொகுதிகளை எடைகளாக இரு நகரங்களுக்கும் கொண்டு தரப்படுத்தப்பட்ட இறப்பு வீதம் கணக்கிடலாம். எனவே,

தரப்படுத்தப்பட்ட இறப்பு வீதம் $= \frac{\Sigma wx}{\Sigma w}$. W என்பது ஒவ்வொரு வயதுப் பிரிவிலும் உள்ள தரப்படுத்தப்பட்ட மக்கட் தொகை. x ஒவ்வொரு வயதுப் பிரிவின் தனித்தனி இறப்பு வீதம்.

கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்குக் கூட்டுச் சராசரியையும் எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரிகளையும் கண்டு ஒப்பிடுக.

எண்	ராசிகள்	எடை தொகுதி (1)	எடை தொகுதி (2)	எடை தொகுதி (3)
1	5	10	3	10
2	7	10	5	8
3	8	10	4	6
4	12	10	7	3
5	26	10	9	2
6	50	10	12	1
	108	60	40	30

எண்	ராசிகள் x	எடை தொகுதி (1)	எடை தொகுதி (2)	எடை தொகுதி (3)	xw_1	xw_2	xw_3
1	5	10	3	10	50	15	50
2	7	10	5	8	70	35	56
3	8	10	4	6	80	32	48
4	12	10	7	3	120	84	36
5	26	10	9	2	260	234	52
6	50	10	12	1	500	600	50
மொத்தம்	108	60	40	30	1080	1000	292

x-ன் சாதாரண கூட்டுச் சராசரி $= \frac{\Sigma x}{n} = \frac{108}{6} = 18.$

எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி $= \frac{\Sigma xw}{\Sigma w}.$

(i) எடைத் தொகுதி (1)-ன் எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி $= \frac{1080}{60} = 18.$

(ii) எடைத் தொகுதி (2)ன் எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி $= \frac{1000}{40} = 25.$

(iii) எடைத் தொகுதி (3)-ன் எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி $= \frac{292}{30} = 9.7.$

(i) எடைத் தொகுதி (1)-ல் எல்லா ராசிகளுக்கும் எடைகள் சமமாக உள்ளன. எனவே, சாதாரண கூட்டுச்சராசரி, எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி ஒன்றுய் உள்ளன.

(ii) எடைத் தொகுதி (2)-ல் பெரிய உறுப்புக்கள் ஆகிய 50, 26 முதலியவற்றிற்கு எடைகள் 12, 9 முதலான பெரிய எண்களாக வருவதால் எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி, சாதாரண கூட்டுச் சராசரியைவிட அதிகமாக உள்ளது.

(iii) தொகுதி (3)-ல் பெரிய ராசிகளான 50, 26, 12 இவற்றிற்குச் சிறிய எடைகள் 1, 2, 3... எனத் தரப்பட்டுள்ளதால், எடையிட்ட சராசரி, சாதாரண சராசரியைவிடச் சிறியதாக உள்ளது.

கீழ்க்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து, X-என்ற நகரத்தைத் தரப் படுத்தப்பட்ட மக்கட் தொகையாகக் கொண்டு, Y-ன் தரப்படுத்தப் பட்ட இறப்பு வீதம் காண்க. இதனை இரு நகரங்களின் செப்பனிடா இறப்பு வீதத்துடன் ஒப்பிடுக.

வயதுப் பிரிவு	நகரம் X எண்ணிக்கை	இறப்புக் களின் எண்ணிக்கை	நகரம் Y எண்ணிக்கை	இறப்புக் களின் எண் ணிக்கை
0—5	140	3	400	12
5—15	510	2	1200	8
15—55	1190	12	3140	19
55-க்கு மேல்	160	12	260	21
மொத்தம்	2000	29	5000	60

நகரம் X-க்கு செப்பனிடா இறப்பு வீதம் $= \frac{29}{2000} \times 1000$
$= 14{\cdot}5$

நகரம் Y-க்கு செப்பனிடா இறப்பு வீதம் $= \frac{60}{5000} \times 1000$
$= 12.$

நகரம் X-ன் பல்வேறு வயதுப் பிரிவுகளில் உள்ள மக்கட் தொகையை எடைகளாகக் கொண்டு கணக்கிடப்படும் தரப் படுத்தப்பட்ட இறப்பு வீதம் =

$$\frac{\frac{3}{140}\times 140+\frac{2}{510}\times 510+\frac{12}{1190}\times 1190+\frac{12}{160}\times 160}{140+510+1190+160}\times 1000$$

$$=\frac{3+2+12+12}{2000}\times 1000=\frac{29\times 1000}{2000}=14{\cdot}5$$

எனவே நகரம் X-ஐயே தரப்படுத்தப்பட்ட மக்கட் தொகுதி யாகக் கொண்டு கணக்கிடப்பட்ட Y-ன் தரப்படுத்தப்பட்ட வீதம்

= அதன் செப்பனிடா வீதம் ஆகும். நகரம் X-ன் அடிப்படையில் Y-ன் தரப்படுத்தப்பட்ட வீதமானது,

$$1000 \times \left[\frac{\frac{12}{400}\times 140 + \frac{8}{1200}\times 510 + \frac{19}{3140}\times 1190 + \frac{21}{260}\times 160}{400 + 1\ 00 + 3140 + 260} \times 100 \right]$$

$$= 15{\cdot}4$$

Y-ன் தரப்படுத்தப்பட்ட இறப்பு வீதத்தைவிட X-ன் தரப் படுத்தப்பட்ட வீதம் குறைவாக உள்ளதால் X, Y-ஐவிட சுகாதார வசதிகளைப் பெருமளவில் கொண்டுள்ளது. ஆனால், செப்பனிடா வீதங்கள் மாறுபட்ட முடிவைத் தருகின்றன.

குறிப்பு

மையப் போக்களவைகளைக் கையாளும்போது, கீழ்க்காணும் கருத்துக்களைக் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

1 இரு பரவல்களை ஒப்பிடும் போது வெவ்வேறு மையப் போக்களவைகளைப் பயன்படுத்தக்கூடாது. இரண்டிற்கும் கூட்டுச் சராசரி, முகடு அல்லது இடைநிலை என ஒரே மையப் போக் களவையைக் கணக்கிட்டு ஒப்பிடல் வேண்டும்.

2. தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் சராசரி மதிப்பைப் பெறுவதாகக் கருதக்கூடாது. 40 மாணவர் கொண்ட வகுப்பின் சராசரி மதிப்பெண் 52 ஆனால், ஒவ்வொரு மாணவரும் 52 பெறுவ தாகக் கொள்ள இயலாது.

3. சிற்சில சமயங்களில், மையப் போக்களவைகளுக்குப் பதிலாக வேறு அளவுகளும் தேவைப்படலாம். ஒரு ஆற்றைக் கடக்க முற்படும்போது அதன் சராசரி ஆழம் தெரிந்து பயனில்லை. அதன் மிக அதிக ஆழம் என்னவென்று தெரிந்தால்தான் ஆற்றை அபாயமின்றிக் கடக்கலாம். இதுபோன்றே ஒரு கம்பியின் திறனை அளக்கும்போதும் அது தாங்கக்கூடிய மீப்பெரு பளுவே கணக் கிடப்படவேண்டும்; சராசரி பளு தேவையில்லை.

4. ஒவ்வொரு சூழ்நிலைக்கும் ஏற்ற சராசரியையே பயன் படுத்தவேண்டும். எடையிட்ட சராசரிகள் பயன்படுத்த வேண்டிய சூழ்நிலைகளில் எளிய சராசரிகளைப் பயன்படுத்துவது கூடாது.

கீழ்க்கண்ட நிலைகளில் பின்பற்றப்பட்ட புள்ளியியல் முறைகள் சரியாகப் பொருந்தும் தன்மையினைக் காரணங்களுடன் விளக்குக.

(*a*) ஆரம்பக் கல்வியின் வளர்ச்சியை நிரூபிக்க 10 ஆண்டுகளுக்கு முன்பு பள்ளிக்குச்சென்ற குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையை விட இப்போது பள்ளி செல்லும் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக உள்ளது எனக் காட்டப்படுகிறது.

(*b*) ஒரு நாட்டின் பொருளாதார முன்னேற்றத்தை அளப்பதற்குத் தொடர்ந்து வரும் பல ஆண்டுகளில் சராசரி ஆயுட்காலம் கணக்கிடப்படுகிறது (expectation of life).

(*c*) ஒரு நகரத்தின் வீட்டு வசதிகளைப் பற்றி ஆராய்வதற்கு அந்த நகரத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட தொகுதியிலிருந்து (ward) ஒரு சமவாய்ப்புக்கூறு எடுக்கப்படுகிறது.

(*d*) ஒரு நேர்க் கோட்டின் நீளம் 20 முறைகள் அளக்கப்படுகிறது. இவ்வளவுகளின் கூட்டுச் சராசரி அதன் உண்மையான நீளத்தைத் தருகிறது. (செ. ப. 1966)

விடை

(*a*) 10 ஆண்டுகளுக்குமுன் பள்ளி சென்ற குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையை விட இப்போது பள்ளி செல்லும் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக உள்ளது என்பதால் மட்டும் ஆரம்பக் கல்வியின் வளர்ச்சியை நிரூபிக்க முடியாது. ஏனெனில், 10 ஆண்டுகளுக்கு முன்பிருந்த குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையை விட இப்போதுள்ள குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை பன்மடங்கு பெருகியுள்ளது. எனவே, மொத்த குழந்தைகளில் பள்ளி செல்லும் குழந்தைகளின் விகிதம் 10 ஆண்டுகளுக்கு முன்பிருந்ததைவிட இப்போது அதிகரித்து உள்ளது எனக் காட்டவேண்டும்.

(*b*) நாட்டின் பொருளாதார முன்னேற்றம் மக்களின் நல்வாழ்வுக்கு அடிகோலுகிறது. எனவே, தொடர்ந்து வரும் ஆண்டுகளில், சராசரி ஆயுட்கால அதிகரிப்பு ஓரளவு நாட்டின் பொருளாதார முன்னேற்றத்தை வலியுறுத்துகிறது.

(*c*) நகரத்தின் வீட்டு வசதிகள்பற்றி ஆராய நகரின் பல்வேறு தொகுதிகளின் நிலையையும் பற்றிப் பிரதிபலிக்கத்தக்க வகையில் சமவாய்ப்புக் கூறு இருத்தல்வேண்டும். நகரினைப் பல தொகுதிகளாகப் பிரித்து, அவற்றின் பரப்பு மக்கட் தொகைக்கேற்ற வகையில், ஒவ்வொரு தொகுதியிலும் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சில உறுப்புகளைக் கொண்ட சமவாய்ப்புக் கூறே சிறந்த முடிவுகளைத் தரும்.

(a) நேர்க்கோட்டினை 20 முறைகள் அளந்து கூட்டுச் சராசரி கண்டால் அது ஒரு தோராயமான மதிப்பாகத்தான் இருக்கும். சிலபோது கூட்டுச் சராசரி நீளம் ஒரு கற்பனை நீளமாகவே இருக்கலாம். கோட்டை அளக்கும்போது பெருபான்மையான முறைகள் ஒரு குறிப்பிட்ட நீளம் கிடைத்தால் அதுவே உண்மையான நீளமாகும். எனவே, திரும்பத் திரும்ப செய்யப்படும் சோதனைகளின் விளைவுகளில் முகடின் மதிப்பே உண்மையான மதிப்பாகும்.

எ. கா. 1 கீழேயுள்ள அட்டவணை, ஒரு தேர்வில் 199 மாணவர்கள் வாங்கிய மதிப்பெண்கள் நிகழ்வெண் பரவலைத் தருகிறது.

மதிப்பெண்கள்:	0-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71 80
மாணவரின் எண்ணிக்கை :	21	19	60	42	24	18	15

இடைநிலை கண்டறிந்து, குறைந்தபட்ச மதிப்பெண்கள் 35 என இருக்கும்போது தேர்வு பெருதவர்களின் சதவீதத்தையும் காண்க. [B Com., 1967 A]

மதிப்பெண்கள் x	மாணவரின் எண்ணிக்கை f	முனை $-x$	வளர் நிகழ்வெண்
0 20	21	20·5	21
21—30	19	30·5	40
31—40	60	40·5	← 100
41—50	42	50·5	142
51—60	24	60·5	166
61—70	18	70·5	1‘4
71—80	15	80·5	199
மொத்தம் $N=$ 199			

$\frac{N}{2}=\frac{199}{2}=$ 99·5. எனவே, இடைநிலைப் பிரிவு 30·5—40·5-ல் என அமையும்.

$$\text{இடை நிலை} = l_1 + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c$$

இங்கு $l_1 = 30{\cdot}5,\ \frac{N}{2} = 99{\cdot}5,\ m = 40$

$f = 60,\ c = 10$

$$\text{இடை நிலை} = 30{\cdot}5 + \frac{99{\cdot}5-40}{60} \times 10$$

$$= 30{\cdot}5 + 9{\cdot}9$$

$$= 40{\cdot}4$$

ஒரு மாணவன் 35-க்குக் கீழ் வாங்கும்போது தேர்வு பெறுவதில்லை. 30·5—39·5 என்ற பிரிவு 60 மாணவர்களைக் கொண்டுள்ளது. எனவே, ஏறத்தாழ 30 மாணவர்கள் 35க்குக் கீழ் மதிப்பெண்கள் பெறுவர். எனவே, தேர்வு பெறாத மாணவர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை $= 21 + 19 + 30 = 70$

தேர்வு பெறாதவர்களின் சதவிகிதம் $= \frac{70}{199} \times 100 = 35.2$

(ஏறத்தாழ)

எ.கா. 2 கீழ்க்காணும் நிகழ்வெண் பரவலின் முகடைக் காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	நிகழ்வெண்
10—13	8
13—16	15
16—19	27
19—21	51
21—24	75
24—27	54
27—31	36
31—34	18
34—37	9
37—40	7

மீப்பெரு நிகழ்வெண் 75 ஆக இருப்பதால் முகட்டுப்பிரிவு 2'—24.

$f_1 = 51,\ f_2 = 54,\ c = 3.$

$$\text{(i) முகடு} = l + \frac{c\, f_2}{f_1 + f_2}$$

$$= 21 + \frac{3 \times 54}{51 + 54}$$

$$= 22.54$$

$$\text{(ii)} \quad d_1 = f - f_1 = 75 - 51 = 24$$

$$d_2 = f - f_2 = 75 - 54 = 21$$

$$\text{முகடு} = l + \frac{c\, d_2}{d_1 + d_2}$$

$$= 21 + \frac{3 \times 21}{45} = 22{\cdot}4$$

1. ஒரு சமச்சீரற்ற தொடரின் முகடு கூட்டுச்சராசரி முறையே 16 செ.மீ., 15·6 செ மீ. ஆகும். தொடரின் இடைநிலையைக் காண்க.

முகடு, கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை மூன்றையும் இணைக்கும் தொடர்பு வருமாறு.

(கூட்டுச்சராசரி—முகடு) = 3 (கூட்டுச்சராசரி — இடைநிலை)

முகடு = 16 செ.மீ.

கூட்டுச்சராசரி = 15·6 செ.மீ.

இவைகளை மேற்கூறிய தொடர்பில் ஈடுசெய்தால்,

(15·6 செ மீ. — 16 செ.மீ.) = 3 (15 6 செ.மீ. — இடைநிலை)

— 0·4 = 46·8 — 3 இடைநிலை

$$\text{இடைநிலை} = \frac{1}{3}[46{\cdot}8 + {\cdot}4] = \frac{1}{3}(47.2)$$

$$= 15{\cdot}73 \text{ செ.மீ.}$$

2. ஓர் முற்றுப் பெருத அலைவுப் பரவல் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.

மாறி :	10—20	20—30	30 - 40	40—50	50—60	60—70	70—80
அலைவெண்:	12	30	?	65	?	25	18

அலைவெண்களின் கூடுதல் 229 ; இடைநிலை = 46 எனக் கொடுக்கப்பட்டால் இடைநிலையைக் காணப்பயன் படுத்தப் படும் வாய்பாட்டைக் கொண்டு மறைக்கப்பட்ட அலைவெண்களை காண்க.

இடைநிலை = 46 என்பது 40—50 என்னும் பிரிவு இடைவெளியினுள் வருகிறது.

$$\text{இடைநிலை} = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c$$

$$\therefore \quad 46 = 40 + \frac{\frac{229}{2} - (x+42)}{65} \times 10$$

x என்பது (30—40) பிரிவு இடைவெளியின் அலைவெண்

$$\therefore \quad x = 33{\cdot}5 = 34$$

50-60க்கான அலைவெண் = 229(மற்ற அலைவெண்களின் கூடுதல்)
= 229 — 184 = 45.

1. பின்வரும் விவரத்திற்குப் பெருக்குச் சராசரி G-யைக் காண்க.

6·5, 169·0, 11·0, 112·5, 14·2, 75·5, 35·5, 215·0.

x	$\log_{10} x$
6·5	0·8129
169·0	2 2279
11·0	1·0414
112.0	2·0512
14.2	1 1523
75·5	1·8779
36·5	1·5502
215·0	2·3324
	13·0462

$$\log_{10}(G) = \frac{1}{n}\sum \log_{10} x$$

$$= \frac{13\cdot0462}{8} = 1\cdot630775 \simeq 1\cdot63078$$

∴ பெருக்குச் சராசரி $G = 42\cdot74$.

2. பின்வரும் விவரத்திற்கு இசைச் சராசரியைக் காண்க.

6·5, 169·0, 11·0, 112·5, 14·2, 75·5, 35·5, 215·0

x	$\frac{1}{x}$
6·5	0·1539
169·0	0·0059
11·0	0·0909
112·5	0·00 9
14·2	0·0704
75·5	0·0133
35·5	0 0282
215·0	0·0047
	0·3762

$$\frac{1}{\text{இசைச் சராசரி}} = \frac{\left(\sum \frac{1}{x}\right)}{n} = \frac{0\cdot3762}{8}$$

$$\therefore \text{ இசைச் சராசரி} = \frac{8}{0\cdot3762}$$

$$= 21\cdot27.$$

1. பின்வரும் கூற்றுகள் சரியானவையா என ஆராய்க.

(i) ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் விலைவீதம் முதல் வாரத்தில் ஒரு ரூபாய்க்கு 4 கிராமாகவும், இரண்டாம் வாரத்தில் ஒரு ரூபாய்க்கு 8 கிராம் ஆகவும் இருந்தது. எனவே, ஒரு ரூபாய்க்கு

சராசரி விலை $= \frac{4 + 8}{2} = 6$ கிராம்.

(ii) ஒரு கல்லூரியில் வணிக இயலில் முதலாமாண்டு படிக்கும் மாணவர்களின் வருகை பெரும்பாலும் ஒரு நாளுக்கு 40 ஆகும். எனவே, 100 வேலை செய்யும் நாட்களின் மொத்தம் வருகை 4000 ஆகும்.

(iii) x என்ற பொருளின் விலை அதிகரிப்பு 20% ஆகும்; பின்பு விலை 25% குறைந்து மறுபடியும் 15% அதிகரித்தது. எனவே, முடிவில் விலை அதிகரிப்பு 10% ஆகும்.

விடை.

(i) இல்லை; விலை வீதத்தைஒரு ரூபாய்க்குவாங்கும் அளவாகக் கொடுத்திருந்தால், சராசரி விலை கொடுக்கப்பட்ட வீதங்களின் இசைச் சராசரி ஆகும். எனவே, சரியான சராசரி விலை $\left(\frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}}{2}\right)$-ன் தலைகீழ் பின்னமாகும். அதாவது $\frac{2}{\cdot 375} = 5\frac{1}{3}$ கிராம்/ரூபாய் ஆகும்.

(ii) மாணவர்களின் பெரும்பான்மை வருகை என்பது முகட்டு வருகையைக் குறிக்கும். அதாவது 40 என்பது வருகையின் முகடு ஆகும். இங்கு 100 நாட்களின் மொத்த வருகை, முகடை 100 ஆல் பெருக்கிக் கணக்கிடப்பட்டுள்ளது. இது மொத்த வருகையைக் கொடுக்காமலும் இருக்கலாம். கூட்டுச்சராசரி, மதிப்புக்களின் எண்ணிக்கை இவற்றின் பெருக்குத் தொகை உறுதியாக மொத்த மதிப்பைக் கொடுக்கும். ஆனால் இது முகடைப் பொறுத்தவரையில் எப்போதும் உண்மையாக இருப்பதில்லை. இது கூட்டுச்சராசரி = முகடு என்னும்போதுதான் உண்மையாக இருக்கும்.

(iii) இல்லை; இங்கு மொத்த விலை அதிகரிப்பைப் பின் வருமாறு கணக்கிட்டுள்ளார்கள்.

$$20\% - 25\% + 15\% = 10\%.$$

25% விலைக் குறைப்பும், பின்பு 15% விலை அதிகரிப்பும் மூல விலையைக் குறிக்காது. அவை ஒவ்வொரு நிலையிலும் உள்ள விலையிலிருந்துதான் கணக்கிடப்படுகின்றன. மொத்த சதவீத அதிகரிப்பை இத்தகைய சதவீதங்களைக் கூட்டியோ, கழித்தோ கண்டுபிடிக்க முடியாது. எனவே இங்குக் கூறிய முடிவில் விலை அதிகரிப்பு தவறானது.

$$\text{சரியான மதிப்பு} = \frac{120 \times 75 \times 115}{100 \times 100} - 100$$
$$= 3{\cdot}5\% \text{ ஆகும்.}$$

பின்வரும் அட்டவணைக்கு இடைநிலையையும் (Median) முகட்டையும் காண்க.

வகுப்புக்கு வராத நாட்கள்	மாணவரின் எண்ணிக்கை
5-க்குக் குறைவான	29
10 ,,	224
15 ,,	465
20 ,,	582
25 ,,	634
30 ,,	644
35 ,,	650
40 ,,	653
45 ,,	655

மேற்கண்ட அளவு கீழின வளர் நிகழ்வெண் முறையில் அமைந்துள்ளது. அதனைப் பின்வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்:

பிரிவு	மாணவரின் எண்ணிக்கை	முனை-x	வளர் நிகழ்வெண்
0—5	29	5	29
5—10	195	10	224 ←
10—15	241	15	465
15—20	117	20	582
20—25	52	25	634
25—30	10	30	644
30—35	6	35	650
35—40	3	40	653
40—45	2	45	655
மொத்தம் $= N = 655$			

$\frac{N}{2} = \frac{655}{2} = 327{\cdot}5$ என இருப்பதால், நடுநிலைப் பிரிவு

10—15 ஆகும்.

$$\text{இடைநிலை} = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c$$

இங்கு $l = 10$, $m = 224$, $f = 241$

$C = 5$

$$= 10 + \frac{327{\cdot}5 - 224}{241} \times 5 = 10 + 2{\cdot}15$$

1= 2·15 நாட்கள்.

மீப்பெரு மதிப்பு 241 ஆக இருப்பதால் முகட்டுப் பிரிவு (Modal Class) 10 — 15.

$$\text{முகடு} = l + \frac{c f_2}{f_1 + f_2}$$

இங்கு $= l = 10$, $f_1 = 195$, $f_2 = 117$

$c = 5$.

$$= 10 + \frac{5 \times 117}{195 + 117} = 10 + 1{\cdot}87 = 11{\cdot}87 \text{ நாட்கள்.}$$

168	185	150	135	168	155	118	165	153	140
143	160	145	130	125	135	160	115	138	140
153	140	143	133	125	155	130	170	145	138
133	140	108	130	195	143	90	118	135	163
115	128	85	128	100	133	100	120	120	115
138	73	123	150	135	48	123	70	103	90
105	90	125	123	85	75	130	130	108	85
52	98	73	93	88	85	113	113	65	100
73	95	93	13	90	53	70	90	90	98
88	83	40	75	25	68	43	78	65	50
78	90	80	23	20	48	33	48	25	20
80	18	40	33	28	63	20	50	33	3.

மேலே தரப்பட்டுள்ள சீர்படா விவரங்களை ஒரு நிகழ்வெண் பட்டியலில் அமைத்து, இடைநிலையைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்களில் மீச்சிறு மதிப்பு 3 ; மீப்பெரு மதிப்பு 195. எனவே, வீச்சு 195 — 3 = 192. இதனை 10 பிரிவு களாகப் பிரிக்க $\frac{192}{10} = 19{\cdot}2$. முழுமையாக்கினுல் பிரிவு இடைவெளி 20 என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

எனவே, பிரிவுகள் 0 – 19, 20 — 39, 40 — 59, .. என அமைகின்றன.

பிரிவு இடைவெளி	குறியீடு	நிகழ்வெண்
0 — 19	|||	3
20 — 39	𝍸 𝍸	10
40 — 59	𝍸 𝍸	10
60 — 79	𝍸 𝍸 |||	13
80 — 99	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	22
100 — 119	𝍸 𝍸 ||||	14
120 — 139	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	25
140 — 159	𝍸 𝍸 𝍸	15
160 — 179	𝍸 ||	7
180 — 199			1
	மொத்தம்	120

இடைநிலை

மேல் எல்லை	குவிவு நிகழ்வெண்
19·5	3
39·5	13
59·5	23
79·5	36
99·5	58
	←——
119·5	72
139·5	97
159·5	112
179·5	119
199·5	120

$\frac{N}{2} = 60$ 99·5 — 119·5 என்ற பிரிவில் உள்ளது.

எனவே, இடைநிலைப் பிரிவின் கீழ் எல்லை = 99·5

$m = 58$

$f = 14$

$c = 20$

$$M = 99{\cdot}5 + \frac{60 - 58}{14} \times 20$$

$$99{\cdot}5 + 2{\cdot}85 = \mathbf{102.35.}$$

$f_1, f_2, f_3 \dots f_n$ என்ற நிகழ்வெண்களைக் கொண்ட x_1, x_2, $x_3 \dots x_n$ என்ற பரவல், $X = a\,x + b$ என்ற தொடர்பின்மூலம் (a, b இவை இரண்டும் மாறிலிகள்) அதே நிகழ்வெண்களைக் கொண்ட X_1, X_2, ... X_n என்ற பரவலாக மாற்றப்படுகிறது. புதிய பரவலின் கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை, முகடு இவை மூன்றும், முதற் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை, முகட்டிலிருந்து இதே மாற்றத்தின்மூலம் பெறப்படுகின்றன என நிறுவுக. (செப.)

$$X = ax + b.$$

$$\therefore \quad X_i = ax_i + b.$$

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i X_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i (ax_i + b)$$

$$= a \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i x_i + b \cdot \frac{1}{N} \sum f_i$$

$$= a\bar{x} + b.$$

$\bar{x}$, $\bar{X}$ என்பவை கொடுக்கப்பட்ட, மாற்றப்பட்ட பரவல்களின் கூட்டுச் சராசரி ஆகும்.

நடு உறுப்பின் மதிப்பே இடைநிலை. மாற்றப்பட்ட பரவலிலும் நடு உறுப்பின் மதிப்பு மாறுபடாததால், M என்பது கொடுக்கப் பட்ட பரவலின் இடைநிலையாக இருந்தால், மாற்றப்பட்ட பரவலின் இடைநிலை $aM + b$ என இருக்கும்.

இதேபோல, Z என்பது கொடுக்கப்பட்ட பரவலின் முகடாக இருந்தால், மாற்றப்பட்டப் பரவலின் முகடு $aZ + b$ ஆகும்.

ஒரு உஷ்ணமானியைக் கொண்டு, வெப்பநிலையின் கூட்டுச் சராசரியைக் காணும்போது, நாம் வெப்பநிலையை சென்டிகிரேட் அல்லது ஃபாரன்ஹீட் பாகைகளில் எதில் அளந்தாலும் பாதிக்கப் படுவதில்லை. ஆனால், வெப்பநிலையின் பெருக்குச் சராசரி பாதிக்கப் படுகிறது என நிறுவுக.

உஷ்ணமானியில் அளக்கப்பட்ட N அளவுகளை எடுத்துக் கொள்வோம். அவற்றை சென்டிகிரேடில் அளக்கும்போது $C_1, C_2 \ldots C_N$ எனவும், ஃபாரன்ஹீட்டில் அளக்கும்போது $F_1, F_2, F_3 \ldots F_N$ எனவும் எடுத்துக்கொள்வோம்.

சென்டிகிரேட், ஃபாரன்ஹீட் அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு,

$F = 32 + \frac{9}{5}C.$, (இங்கு F என்பது பாரன்ஹீட்டையும், C என்பது சென்டிகிரேடையும் குறிக்கிறது.)

$$F_r = 32 + \frac{9}{5} C_r,\ r = 1, 2 \ldots N.$$

சென்டிகிரேடில், N அளவுகளுக்கு

$$\text{ஆன கூட்டுச் சராசரி} = \frac{C_1 + C_2 + \ldots + C_N}{N}$$

$$= \bar{C}.$$

பாரன்ஹீட்டில், N அளவுகளுக்கு

$$\text{உரிய கூட்டுச் சராசரி} = \frac{F_1 + F_2 + \ldots + F_N}{N}$$

$$= \bar{F}.$$

$$\therefore\ \bar{F} = \frac{1}{N}(F_1\ F_2 + \ldots + F_N)$$

$$= \frac{1}{N}\left\{\left(32 + \frac{9}{5} C_1\right) + \left(32 + \frac{9}{5} C_2\right) + \left(32 + \frac{9}{5} C_N\right)\right.$$

$$= 32 + \frac{9}{5}\left(\frac{C_1 + C_2 + \ldots + C_N}{N}\right)$$

$$= 32 + \frac{9}{5}\ \bar{C}.$$

இங்கு $\bar{C}$ = சென்டிகிரேட் அளவுகளின் கூட்டுசராசரி. அடுத்து, பாரன்ஹீட் அளவுகளுக்கு பெருக்குச்சராசரி

$$= (F_1, F_2 \ldots\ldots F_N)^{\frac{1}{N}}$$

$$= \left\{\left(32 + \frac{9}{5} C_1\right)\left(32 + \frac{9}{5} C_2\right)\ldots\ldots\left(32 + \frac{9}{5} C_N\right)\right\}^{\frac{1}{N}}$$

சென்டிகிரேடில் குறிக்கப்பட்ட ... (1)

$$\text{அளவுகளுக்கு பெருக்குச் சராசரி} = \left(C_1, C_2, \ldots C_N\right)^{\frac{1}{N}}$$

செண்டிகிரேடில் உள்ள பெருக்குச் சராசரியைப் பாரன்ஹீட்டில் மாற்றினால் கிடைக்கப்பெறும் மதிப்பு

$$= 32 + \frac{9}{5} \left(C_1, C_2, \ldots C_N \right)^{\frac{1}{N}} \ldots (2)$$

(1)-ம், (2)-ம் வெவ்வேறானவை

எ.கா. ஒரு விமானம் 100 மைல் பக்கமுள்ள ஒரு சதுரமான இடத்தைச் சுற்றி வருகிறது. முதல் பக்கத்தை மணிக்கு 100 மைல் வீதமும், 2 வது பக்கத்தை மணிக்கு 200 மைல் வீதமும், 3-வது பக்கத்தை மணிக்கு 300 மைல் வீதமும் 4-வது பக்கத்தை மணிக்கு 400 மைல் வீதமும் கடக்கிறது. அச் சதுரமான இடத்தைச் சுற்றிவர விமானத்திற்கு ஆகும் சராசரி வேகம் என்ன ?

[P. U., B. Com.1968]

விமானத்தின் சராசரி வேகம் $\left.\right\} = \dfrac{400}{100\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{300} + \frac{1}{400}\right)}$

$$= \frac{4\,(1200)}{12 + 6 + 4 + 3}$$

$$= \frac{4 \times 1200}{25}$$

$= 192$ மைல்கள்

விமானத்தின் சராசரி வேகம் மணிக்கு 192 மைல்கள்.

பயிற்சி

1. ஒரு வங்கியில் ஒரு மாதத்தில் நடப்புகணக்கின் சராசரி வைப்புகளைப் பற்றிய விவரங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. இதற்கு இடைநிலை, 7-வது பத்துமானம், 85-வது நூற்றுமானம் இவற்றைக் காண்க.

வைப்பின் மதிப்பு (ரூபாயில்)	வைப்புகளின் எண்ணிக்கை
1000—க்குக் குறைவாக	500
900— ,, ,,	498
800— ,, ,,	480
600— ,, ,,	475
550— ,, ,,	440
500— ,, ,,	374
400— ,, ,,	300
250— ,, ,,	125
100— ,, ,,	25

[பம்பாய் B. Com., 1965 A]

[விடை: இடைநிலை — 357·145 D_7 — 467·57; P_{85} — 538·64.]

2. முதல் தடவையாக ஆஸ்துமாவினால் பாதிக்கப்பட்டவர்களின் எண்ணிக்கை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஏதேனும் ஒரு மையப் போக்களவையைக் கொண்டு சராசரி வயதைக் கணக்கிடுக.

முதல்தடவையாக பாதிக்கப்பட்டவர்களின் வயது	0—5	5—10	10—15	15—20	20—25
பாதிக்கப்பட்டவர்களின் எண்ணிக்கை	298	113	64	61	70

முதல்தடவையாக பாதிக்கப்பட்டவர்களின் வயது	25—30	30—35	35—40	40—45
பாதிக்கப்பட்டவர்களின் எண்ணிக்கை	81	77	64	53
	45—50	50—55	55—60	60—65
	40	35	24	20

[I. A. S. 1955]

3. ஒரு பெரும் தொழில் நிறுவனத்தில் இரு வெவ்வேறு காலப் பகுதிகளில் வழங்கப்பட்ட தொழிலாளர்களின் வருமானத்தின் நிகழ்வெண் பரவல் கீழ்க்கண்டவாறு :

வருமானம் (ரூபாயில்)	நிகழ்வெண் காலப்பகுதி I	காலப்பகுதி II
0—50	90	200
50—100	150	400
100—150	100	120
150—200	80	100
200—250	70	150
250 க்கு மேல்	10	30
மொத்தம்	500	1000

'250-க்கு மேல்' என்ற பிரிவில் காலப்பகுதி I-இல் உள்ள 10 தொழிலாளர்களின் மொத்த வருமானம் 3000 ரூபாய் எனவும், காலப்பகுதி II-இல் உள்ள 30 தொழிலாளர்களின் மொத்த வருமானம் 18,000 ரூபாய் எனவும் தரப்பட்டு இருக்கிறது. இரண்டு காலப் பகுதிகளுக்கும் கூட்டுச்சராசரி வருமானத்தையும், இடைநிலை, வருமானத்தையும் காண்க.

4. கீழ்க்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து தொழிலாளர்களின் ஊதியங்களுக்கான கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை, முகடு இவற்றைப் பெறுக.

ஊதியங்கள்		ஊதியம் பெறும் தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை
50 பைசாவுக்கு மேற்படாமல்	...	85
50 பைசாவுக்கு மேல், ஆனால் 60 பைசாவுக்கு மேற்படாமல்	...	65
60 பைசாவுக்கு மேல், ஆனால் 75 பைசாவுக்கு மேற்படாமல்	...	59
75 பைசாவுக்கு மேல், ஆனால் 85 பைசாவுக்கு மேற்படாமல்	...	50

5. பின்வரும் எண்களுக்கான கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க.

(i) சீர்படா விவரங்களுக்கு

(ii) 40—45, 45—50, 50—55...என பிரிவுகளை அமைத்து.

40	43	43	46	46	46	54	56	59	62
64	64	66	66	67	67	68	68	69	69
69	71	75	75	76	76	78	80	82	82
82	82	83	84	86	88	90	90	91	91
92	95	102	127						

[A.U., B.Sc. '55]

6. கீழ்க்கண்ட அட்டவணை ஒரு நகரத்திலுள்ள 12 குடும்பங்களின் மாத வருமானத்தைத் தருகிறது.

வரிசை எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
மாதவருமானம் (ரூபாயில்)	280	180	96	98	104	75	80	94	180	75	600	200

மேற்கண்ட வருமானங்களின் கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை, முகடு இவற்றைக் கணக்கிடுக. இவற்றில் மேற்கண்ட பரவலைப் பிரதிபலிக்க எந்த அளவை மிகச் சிறந்தது ? ஏன் ?

7. பின்கண்ட அளவுகளுக்குக் கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை முகடு இவற்றைக் காண்க.

வரிசை எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
மதிப்பெண்கள்	10	27	24	12	27	27	20	18	15	30

[அண்ணாமலை, 1970]

8. ஒரு வகுப்பிலுள்ள 150 மாணவர்களின் சராசரி எடை 60 கி. கி. இதில் ஆண்களின் சராசரி எடை 70 கி. கி. எனவும், பெண்களின் சராசரி 55 கி. கி. எனவும் இருந்தால், வகுப்பிலுள்ள ஆண்கள் எத்தனை பேர் ? பெண்கள் எத்தனை பேர் ?

9. பல்வேறு மையப் போக்களவைகளைக் கூறி, அவற்றின் பண்புகளையும், பயன்களையும் கூறுக.

கீழ்க்கண்ட நிகழ்வெண் பட்டியலிலிருந்து கூட்டுச்சராசரியைக் கணக்கிடுக.

நடுப்புள்ளிகள்	1	2	3	4	5	6	7	8	9
நிகழ்வெண்	2	60	101	152	205	155	79	40	1

10. ஒரு தேர்வில் 565 பேர் கலந்துகொண்டனர். அவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களுக்கான பரவல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது :

மதிப்பெண்கள்	நிகழ்வெண்
11—20	5
21—30	14
31 40	52
41—50	117
51—60	188
61—70	112
71—80	61
81—90	12
91—100	4

(i) தேர்வில் கலந்துகொண்டவர்களில் 40 சதவீதம் தேர்ச்சி அடையவேண்டுமானல் தேர்ச்சி அடைவதற்கு உரிய மிகக் குறைந்த மதிப்பெண் யாது ?

(ii) 35 சதவீதம் மிகக் குறைந்த மதிப்பெண்ணுகை இருந்தால், தேர்வு எழுதியவர்களில் எத்தனை சதவீதம், தேர்ந்தெடுக்கப் படுவர் ?

11. அந்தந்த எண்களையே எடைகளாகக் கொண்டு முதல் 'n' இயற்கை எண்களின் எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க.

12. ஒரு தேர்வில் 50 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

31	13	20	31	30	45	38	42	30	9
30	30	46	36	2	41	44	18	26	13
44	30	19	5	44	15	7	25	12	30
6	22	24	31	15	6	39	32	21	20
42	31	19	14	23	28	17	53	22	21

நிகழ்வெண் பட்டியலை அமைத்து கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை இவற்றைக் காண்க.

[விடை : $\bar{x} = 26{\cdot}7$, $M = 29{\cdot}4$] [சென்னை, B.Com., 1966 S]

13. ஒரு நிறுவனத்தின் விற்பனையாளர்களின் வாராந்திர ஊதியங்களுக்கான பரவலில் இருந்து இடைநிலை, சராசரி, முகடு இவற்றைப் பெறுக.

வாராந்திர ஊதியம்	விற்பனையாளர்களின் எண்ணிக்கை
30—35	2
35—40	10
40—45	18
45—50	50
50—55	70
55—60	30
60—65	18
65—70	1
70—75	1
மொத்தம்	200

[விடை $\bar{x}$ = 51·225; இடைநிலை = 51·43; முகடு = 51·875.]

14. 8 குடும்பங்களின் மாத வருமானம் ரூபாயில் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது. கூட்டுச் சராசரி (A), பெருக்கு சராசரி (G), இசைச் சராசரி (H) இவற்றைக் காண்க. $A > G > H$ என்ற தொடர்பு பொருந்துகின்றதா எனச் சரிபார்க்க.

குடும்பம் :	A	B	C	D	E	F	G	H
வருமானம் :	70	10	500	75	8	250	8	42

[விடை A = 120·37; G = 45·27; H = 19·95]

15. பின்கண்ட பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரியையும் முகடையும் காண்க.

பொருளின் அளவு :	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
நிகழ்வெண் :	1	2	4	8	11	10	7	4	2	1

16. ஒரு தேர்வில் ஒரு மாணவன் ஒவ்வொரு பாடத்திலும் வாங்கிய மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

ஆங்கிலம் —73
தமிழ் —82
கணிதம் —57
அறிவியல் —62
வரலாறு —60

பாடங்களுக்கு முறையே 4, 3, 3, 1, 1 என எடைகள் இருந்தால், அம்மாணவனது எடையிட்ட சராசரி மதிப்பெண்ணைக் காண்க.

17. பின்கண்ட விவரங்களுக்கு செப்பனிடா இறப்பு வீதம், (C.D.R.) தரப்படுத்தப்பட்ட இறப்பு வீதம் (S.D.R.) இவற்றைக் காண்க.

	நகரம் A			நகரம் B		
வயதுப்பிரிவு	மக்கட்தொகை	இறப்பவர் எண்ணிக்கை	இறப்பு வீதம்	மக்கட்தொகை	இறப்பவர் எண்ணிக்கை	இறப்பு வீதம்
0—10	4000	100	25	2000	40	20
10—40	14000	150	5	6000	60	10
40-ம் அதற்கு மேலும்	2000	50	25	4000	80	20
மொத்தம்	20000	300		12000	180	

[பம்பாய் B.Com., 1963 A]

[விடை C.D.R. (A)—15 S.D.R. (A)—13
C.D.R. (B)—15 S.D.R. B)—14]

18. இரு வெவ்வேறு மக்கட் தொகுதிகளில் வேலையற்றவர்களின் எண்ணிக்கையைப் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் கீழே தரப்பட்டு உள்ளன. இரு மக்கட் தொகுதிக்கும் வேலையற்றோரது செப்பனிடா வீதம், தரப்படுத்தப்பட்ட வீதம் இவற்றைக்

கணக்கிடுக. எந்த மக்கட் தொகுதி வேலை வாய்ப்பு வசதிகளில் மேம்பட்ட நிலையில் உள்ளது என ஆராய்க.

வயது	மக்கட்தொகுதி A		மக்கட்தொகுதி B	
	மக்கட் தொகை	வேலையற்ற வர்களின் எண்ணிக்கை	மக்கட் தொகை	வேலையற்ற வர்களின் எண்ணிக்கை
15—30	2500	125	3000	120
30—45	3500	280	3000	270
45—60	3000	360	3500	420
60—ம் அதற்கு மேலும்	1000	150	500	100

A B

[விடை : வேலையற்றோரது செப்பனிடா வீதம் —91·5 91

தரப்பட்ட வீதம் —91·5 97·5]

19. கீழ்க்காணும் விவரங்களிலிருந்து, A, B என்ற இரு நகரங்களில், எந்த நகரத்தில் மக்களின் உடல் நலம் சிறந்து விளங்குகிறது என ஆராய்க.

வயது ஆண்டு களில்	நகரம் A		நகரம் B	
	மக்கட் தொகை	இறப்பவர் எண்ணிக்கை	மக்கட் தொகை	இறப்பவர் எண்ணிக்கை
5-க்குக் கீழ்	50,000	100	1,000	21
5—14	20,000	200	25,000	275
15—44	25,000	200	30,000	270
45-ம் மேலும்	10,000	120	4,000	52

[விடை : செப்பனிடா வீதம் நகரம் A 10·33 : நகரம் B 10·30 நகரம் A-யைப் பொறுத்து B-யின் தரப்படுத்தப்பட்ட வீதம் 11·3. நகரம் A, B-யை விட மக்கள் உடல் நலத்தில் சிறந்து விளங்குகிறது.]

20. 1901—1961 வரை ஒவ்வொரு 10 ஆண்டு மக்கட் கணிப்பிலும் ஒரு மாநிலத்தின் மக்கட் தொகையைக் கீழ்க்காணும் பட்டியல் தருகிறது.

வருடம்	மக்கட் தொகை (பத்து லட்சத்தில்)
1901	31·4
1911	38·6
1921	50·2
1931	63·0
1941	76·0
1951	92·0
1961	105·7

ஒவ்வொரு பத்து ஆண்டிலும் மக்கட் தொகை அதிகரிப்பு விதம் என்ன? இதனைப் பயன்படுத்தி, 1971-ஆம் ஆண்டின் மக்கட் தொகையை மதிப்பிடுக.

21.

உணவுப் பொருட்கள்	அளவுகள் (மணங்கில்)	ஒரு மணங்கிற்கான விலை (ரூபாயில்)
மாவு	11·5	5·8
நெய்	5·6	58·4
சர்க்கரை	0.228	8·2
உருளை	0·16	2·5
எண்ணெய்	0·35	20·0

மேற்கண்ட விவரங்களிலிருந்து

(i) எடையிடப்படாத சராசரி

(ii) ஒவ்வொரு பொருளின் விலையையும் அதன் அளவோடு எடையிட்டு, அதன் எடையிட்ட சராசரியையும் கண்டு, அவை ஏன் மாறுபடுகின்றன என்பதையும் ஆராய்க.

[விடை : எடையிடப்படாத சராசரி 18·98,
எடையிட்ட சராசரி. 22·55]

22. பின்வரும் கூற்றுகள் சரியா, தவறு எனக் கூறி, அவற்றிற்கான விளக்கங்களைத் தருக.

(i) இடைநிலை உச்ச மதிப்புகளால் பாதிக்கப்படுவது இல்லை.

(ii) ஓரளவு சமச்சீரற்ற பரவலில் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு இவை மூன்றும் சமம்.

(iii) விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை எந்தப் புள்ளியில் மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறுகிறதோ அப்புள்ளியே இடைநிலையாகும்.

(iv) நிகழ்வெண் பரவலை அமைக்கும்போது, எடுக்கப்படும் பிரிவு இடைவெளி ஏதேனும் ஓர் எண்ணுகை இருக்கலாம்.

(v) முற்றுப் பெறாத இடைவெளிகளுடைய நிகழ்வெண் பரவலுக்கு இடைநிலையைக் கணக்கிட முடியாது என்பது இதன் ஒரு குறை.

23. எந்தெந்த சந்தர்ப்பங்களில் சராசரியை அளவிட

(1) கூட்டுச் சராசரியை விடப் பெருக்குச் சராசரி உகந்தது

(2) இடைநிலையை விட முகடு சிறந்தது என்பதை எடுத்துக் காட்டுகளுடன் விளக்குக. (மதுரை ப.க. 1971)

24. பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

பிரிவு இடைவெளி	நிகழ்வெண்
0—20	32
20—40	65
40—60	100
60—80	184
80—100	28[illegible]
100—120	16[illegible]
120—140	98
140—160	46
160—180	20

(மதுரை ப.க. 1972)

[விடை : கூட்டுச்சராசரி = 87·48, இடைநிலை = 88·26, முகடு = 89·82]

25. பெருக்குச் சராசரி, இசைச் சராசரி இவற்றை வரையறுக்கவும்; அவற்றின் பயன்களையும், குறைகளையும் விளக்குக.
[மதுரை பி.காம். '72]

26. ஒரு பரவலின் முகட்டளவை நிர்ணயிக்கின்ற வரைபட முறையொன்றையும், பகுமுறை ஒன்றையும் தற்கோள்களுடன் விளக்குக. (மதுரை எம்.ஏ. 1969)

27. ஒரு தொடரிலுள்ள உறுப்புக்கள் ஒவ்வொன்றையும், அவற்றின் பெருக்குச் சராசரியைக் கொண்டு வகுத்துப் பெறக் கூடிய விகிதங்களின் பெருக்கற் பலன் 1 என நிறுவுக.

28. கால்மானங்கள், பத்து மானங்கள் இவற்றின் வேறுபாடுகளை விவரிக்கவும். (மதுரை ப.க. 1972)

29. ஒரு புகைவண்டி முதல் 16 மைல் தூரத்தை மணிக்கு 25 மைல் வேகத்திலும், அடுத்து 20 மைல் தூரத்தை மணிக்கு 35 மைல் வேகத்திலும், இறுதி 24 மைல் தூரத்தை மணிக்கு 20 மைல் வேகத்திலும் கடந்து சென்றால் அதன் சராசரி வேகமென்ன ?

30. 25 மாணவர்கள் ஒரு தேர்வில் பெற்றுள்ள மதிப்பெண்கள் வருமாறு. பெருக்குச் சராசரி, இசைச் சராசரி காண்க.

மதிப்பெண்	x :	11	12	13	14	15
மாணவர் எண்ணிக்கை	f :	3	7	8	5	2

[விடை: பெருக்குச் சராசரி = 12·79; இசைச் சராசரி = 12·7]

31. பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி = 71·5 விடுபட்ட நிகழ்வெண்ணைக் காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	நிகழ்வெண்
105—100	1
100—95	2
95—90	2
90—85	1
85—80	2
80—75	?
75—70	1
70—65	1
65—60	0
60—55	2
55—50	2
50—45	2
45—40	2

32. $\bar{x}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i,\ \bar{x}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n+1} x_i,\ \bar{x}_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=3}^{n+2} x_i,$

பின் வருவனவற்றை நிறுவுக (i) $\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \frac{1}{n}(x_{n+1} - x_1)$

(ii) $\bar{x}_3 = \bar{x}_2 + \frac{1}{n}(x_{n+2} - x_2)$

33. ஒரு நிகழ்வெண் பரவலில் ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியின் மேல் எல்லைக்கும், கீழ் எல்லைக்கும் ஒரு மாறு விகிதம் உள்ளது.

பெருக்குச் சராசரி M_g என்பது, $\log M_g = x_0 + \frac{C}{N} \sum_i f_i (i-1)$

என்ற வாய்பாட்டால் தரப்படுகிறது என நிறுவுக. இங்கு x_0 என்பது, முதல் இடைவெளியின் மைய மதிப்பு, C, மேல் எல்லைக்கும் கீழ் எல்லைக்கும் உள்ள விகிதத்தின் மடக்கை.

34. புள்ளியியலில் 300 மாணவரின் சராசரி மதிப்பெண் 45. முதல் 100 மாணவரது சராசரி மதிப்பெண் 70. கடைசி 100 மாணவரது சராசரி 20 ; மீதி 100 மாணவரது சராசரி மதிப்பெண் என்ன ?

35. ஒரு வகுப்பிலுள்ள 450 மாணவர்களின் சராசரி எடை 60 கி.கி. வகுப்பிலுள்ள பையன்களின் சராசரி எடை 70 கி.கி. பெண்களின் சராசரி எடை 65 கி.கி. வகுப்பிலுள்ள பையன்கள், பெண்களின் எண்ணிக்கை யாது ?

4. பரவுகை அளவைகள்

(MEASURES OF DISPERSION)

கணிதப் பிரிவில் இளங்கலை வகுப்பில் பயிலும் மாணவர்களில், ஒவ்வொன்றிலும், 5 மாணவர்கள் கொண்ட மூன்று பிரிவுகளை எடுத்துக்கொள்வோம். புள்ளியியலில் அவர்கள் பெற்றுள்ள மதிப்பெண்கள் வருமாறு :

5,	10,	25,	75,	95	...	I
46,	45,	41,	40,	38	...	II
42,	42,	42,	42,	42	...	III

மூன்று பிரிவினருக்கும் கூட்டுச்சராசரி மதிப்பெண் 42தான். ஆனால் இவற்றை ஒரேமாதிரியான பரவல்கள் என்று கூற இயலாது. பிரிவு I-ல் இருவர் முதற் வகுப்பிற்குரியவர். மூவர் தேர்ச்சி பெறுதவர். கூட்டுச்சராசரி 42-க்கு அருகில் ஒருவர் கூட மதிப்பெண் பெறவில்லை.

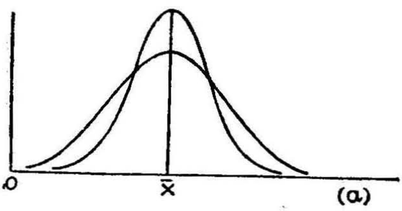
பிரிவு II-ல், மதிப்பெண்கள் கூட்டுச்சராசரியை யொட்டி நெருக்கமாகப் பரவியுள்ளன. எல்லோருமே மூன்றும் வகுப்பில் தேர்ச்சி பெற்றுள்ளனர்.

பிரிவு III-ல், ஐவரில் ஒருவர்கூடக் கூட்டுச்சராசரியினின்று வேறுபட்ட மதிப்பெண் பெறவில்லை.

இங்கு மாணவரது தனிப்பட்ட மதிப்பெண்கள் தரப்படாது, கூட்டுச்சராசரிகள் மட்டுமே தரப்பட்டு இருந்தால் மூன்று பிரிவினரையுமே நாம் ஒரே அளவு தேர்ச்சி உடையவர்களாகக் கருதியிருப்போம். முதற் பிரிவில் கூட்டுச்சராசரியிலிருந்து விலக்கத்தின் மீப்பெரு மதிப்பு 53. இரண்டாதில் 4. மூன்றுவதில் பூஜ்யமாகும். எனவே, மையப் போக்கானவைகளால் மட்டும்

பரவலின் பண்புகளை முற்றிலும் எடுத்துக்கூற இயலாது. பொருளாதார நிபுணருக்குச் சராசரி வருமானம் மட்டும் தெரிந்தால் போதாது; செல்வத்தின் பங்கீடு எவ்வளவு சமனின்மையுடன் சிதறியுள்ளது என்றும் தெரியவேண்டும். ஆசிரியர் வகுப்பிலுள்ள மாணவரது சராசரி மதிப்பெண் கொண்டு மட்டும் திருப்தி அடைய இயலாது; எல்லா மாணவரது மதிப்பெண்களும் எவ்வளவு தூரம் சராசரியை யொட்டி நெருக்கமாக அல்லது விலகிப் பரவி உள்ளன என்றும் தெரிந்துகொள்ளவேண்டும்.

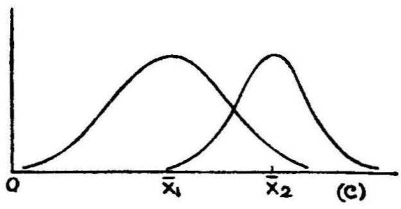
எனவே, பல்வேறு ராசிகளின் தனிப்பட்ட மதிப்புகள் பரவலில் மையப்போக்கானவையைச் சுற்றிமிக அண்மையில் நெருங்கியோ, அன்றி மிகத் தூரத்தில் பரந்தோ காணப்படுவதே சிதறல் அல்லது பரவுகை (Dispersion) எனப்படும்.



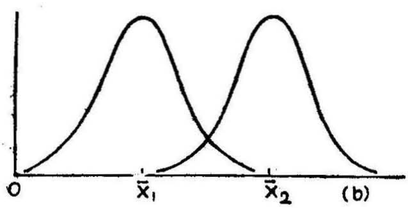
படம் 4. (a)

4. (a) படத்தில் உள்ள இருவரைகளும், ஒரே கூட்டுச்சராசரி $\bar{X}$; ஆனால் வெவ்வேறுபரவுகை அளவைகள் உடைய பரவல்களைக் குறிக்கின்றன.

4. (b) படத்தில் உள்ள இரு வரைகளும் ஒரே பரவுகை அளவையும், வெவ்வேறு கூட்டுச் சராசரிகள் $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ உடைய இரு பரவல்களைக் குறிக்கின்றன.



படம் 4. (b)



படம் 4. (c)

4. (c) படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள இருபரவல்களும், வெவ்வேறு கூட்டுச்சராசரிகளையும், பரவுகை அளவைகளையும் கொண்டவை.

பல்வேறு பரவுகை அளவுகள்

ஒரு பரவலின் சிதறலை அளக்கப் பயன்படும் அளவைகள் வருமாறு.

1. வீச்சு (Range)
2. கால்மான விலக்கம் (Quartile Deviation)
3. திட்ட விலக்கம் (Standard Deviation)
4. சராசரி விலக்கம் (Mean Deviation)

பரவுகை அளவைகளின் பயன்கள்

1. பரவுகை அளவைகள் மூலம், மையப்போக்களவைகள் எத்துணை அளவு பரவலின் பண்புகளைப் பிரதிபலிக்கும் ஆற்றல் வாய்ந்தவை எனக் கண்டறியலாம். பரவுகை அளவை சிறியதாகச் சிறியதாக கூறின் சராசரி முழுமைத் தொகுதியின் சிறந்த பிரதிநிதி எனக் கூறலாம்.

2. சிதறலின் இயல்பையும், காரணத்தையும் அறிந்து மாறுபாட்டையே கட்டுப்படுத்தவும் முடியும். பொருட்களின் தரக் கட்டுப்பாடு சோதனைகள், நோயாளியின் உடல் வெப்பநிலை, நாடித்துடிப்பு, இரத்த அழுத்தம் போன்றவற்றில் சராசரி மதிப்புகளைவிட மாறுபாட்டின் அளவும், அதனைக் குறைப்பதற்கு வழியும் காண்பது இன்றியமையாதது.

3 இரண்டு பரவல்களின் பரவுகை அளவுகளை ஒப்பிடுவதன் மூலம், அவற்றில் எது அதிக மாறுபாடின்றி நிலையான பரவலாக உள்ளது என்பதை அறியலாம்.

4. ஒட்டுறவு, கொள்கைகளைச் சோதித்தல், ஏற்ற விறக்கங்களைப் பாகுபாடு செய்தல், தரக் கட்டுப்பாடு போன்ற பல்வேறு புள்ளியியல் ஆய்வுகளில் பரவுகை அளவுகள் பெரிதும் பயன்படுகின்றன.

வீச்சு (Range)

பரவுகை அளவைகளிலேயே மிக விரைவிலும், எளிதாகவும் கணக்கிடவல்லது வீச்சாகும். பரவலின் மீப்பெரு மதிப்புக்கும், மீச்சிறு மதிப்புக்கும் உள்ள வேறுபாடே வீச்சு. 6 நபர்களின் சராசரி மாத வருமானம் முறையே ரூ. 120, ரூ. 170, ரூ. 60, ரூ. 110, ரூ. 40, ரூ. 80 எனில், வீச்சு = ரூ. 170 — ரூ. 40 = ரூ. 130 ஆகும்.

குறிப்பு : நிகழ்வெண் பரவலில் வீச்சு = கடைசி பிரிவின்மேல் எல்லை — முதற் பிரிவின் கீழ் எல்லை என வரையறுக்கப்படுகிறது.

பொருட்களின் தரக் கட்டுப்பாட்டுச் சோதனைகளில் வீச்சு பெருமளவு பயன்படுகிறது. உற்பத்தியான பொருட்களில் மீப்பெரு, மீச்சிறு அளவுகளின் வேறுபாடு ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்கு மேல் அதிகரித்தால், தொழிற்சாலையில் பின்பற்றப்படும் முறையே மாற்றத்தக்க அளவுக்குக் குறையுடையது என்ற முடிவுக்கு வரலாம். பங்குகளின் விலை நிலவரங்கள், வட்டி விகிதங்கள், பருவநிலை முன்னறிவிப்புகளில் வெப்பநிலை வேறுபாடு போன்றவற்றை அறிய இது உதவுகிறது.

கால்மான விலக்கம் (Quartile Deviation)

பரவலின் இரு முனைகளிலும் உள்ள மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளால் வீச்சு பெரிதும் பாதிக்கப்படும் குறையைக் கால்மான விலக்கம் ஓரளவு நீக்குகிறது. கால்மான விலக்கம் $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3}$. கணிப்புகளில் $\frac{1}{4}$ பகுதி Q_1-க்குக் கீழே இருப்பதால் இது முதல் கால்மானம் அல்லது கீழ்க் கால்மானம் (Lower quartile) எனப்படுகிறது. இதுபோன்றே கணிப்புகளில் $\frac{3}{4}$ பகுதி Q_3-க்குக் கீழே இருப்பதால், Q_3, மூன்றும் கால்மானம் அல்லது மேல் கால்மானம் (Upper quartile) எனப்படுகிறது.

சீர்படா விவரங்களில் ராசிகளின் எண்ணிக்கை N எனில் ராசிகளை ஏறுவரிசையில் அமைத்தபின் $\frac{N+1}{4}$ ஆவது ராசி Q_1 ஆகும். $\frac{3}{4}(N+1)$ ஆவது ராசி Q_3 ஆகும். இவற்றின் மதிப்புகளை இடைச்செருகல் முறையில் காணலாம்.

$Q_3 - Q_1$, இடைக் கால்மான வீச்சு (inter-quartile range) எனவும், $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$, அரை இடைக் கால்மான வீச்சு (semi inter-quartile range) எனவும் சொல்லப்படுகின்றன. நிகழ்வெண் பரவலில் முறையே குவிவு நிகழ்வெண்கள் $\frac{N}{4}$, $\frac{3N}{4}$-க்கு உரிய ராசிகளின் மதிப்புகளே முதல் மூன்றும் கால்மானங்களாகும்.

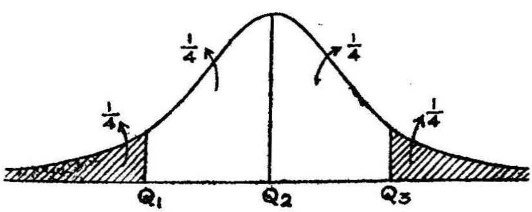
இடை நிலைக்குப் போன்றே, கீழின வளர் நிகழ்வெண் பரவலை அமைத்து

$$Q_1 = l_1 + \frac{\frac{N}{4} - m_1}{f_1} \cdot c \qquad \dots \text{ I}$$

$$Q_3 = l_3 + \frac{\frac{3N}{4} - m_3}{f_3} \cdot c \qquad \dots \text{ II}$$

என்ற வாய்பாடுகள் மூலம் இவற்றின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடுகிறோம்.

இடை நிலையில் குவிவு நிகழ்வெண் $\frac{N}{2}$ காணப்படும் பிரிவிற்குப் பதிலாக, $\frac{N}{4}$, $\frac{3N}{4}$ காணப்படும் பிரிவுகளை எடுத்துக்கொண்டு அவற்றின் கீழ் எல்லைகளை l_1, l_3 எனவும் l_1, l_3 வரை உள்ள குவிவு நிகழ்வெண்களை m_1, m_3 எனவும், அப்பிரிவு நிகழ் வெண்கள் $_1$, f_3 என்றும் கொண்டு கணக்கிடவேண்டும். c பிரிவு இடை வெளியாகும். ஒரு பரவலை, முதல் கால்மானம், இடைநிலை, மூன்றும் கால்மானம் இவை 4 சமபாகங்களாகப் பிரிக்கின்றன.



படம் 4·1

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

பின்வரும் எண்களுக்குக் கால்மான விலக்கத்தைக் காண்க.

17, 5, 29, 11, 18. 16, 3, 28, 55, 43, 38, 32,

எண்களை ஏறு வரிசையில் மாற்றி எழுதினால்,

3, 5, 11, 16, 17, 18, 28, 29, 32, 38, 43, 55

$$Q_1 = \frac{N+1}{4} \text{ ஆவது ராசி}$$

$$= \frac{12+1}{4} = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$$

$$= 3 \text{ வது ராசி} + \frac{1}{4}[4\text{வது ராசி} - 3\text{வது ராசி}]$$

$$= 11 + \frac{1}{4}[16 - 11] = 11 + \frac{5}{4}$$

$$= 11 + 1{\cdot}25$$

$$= 12{\cdot}25$$

$$Q_3 = \frac{3}{4}(N+1) \text{ ஆவது ராசி}$$

$$= \frac{3(12+1)}{4} = \frac{39}{4} = 9\frac{3}{4}$$

$$= 9 \text{ வது ராசி} + \frac{3}{4}[10\text{வது ராசி} — 9\text{வது ராசி}]$$

$$= 32 + \frac{3}{4}[38 - 32] = 32 + 3 \times \frac{6}{4}$$

$$= 32 + 4{\cdot}25 = 36{\cdot}25$$

$$\text{கால்மான விலக்கம்} = Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{36{\cdot}25 - 12{\cdot}25}{2} = 12$$

எ. கா.

கீழ்க்கண்ட பரவலுக்குக் கால்மான விலக்கத்தைக் காண்க.

அளவு (x)	4—4·2	4·2—4·4	4·4—4·6	4.6—4·8
நிகழ்வெண் (f)	1	2	18	35

அளவு (x)	4·8—5	5·0—5·2	5·2—5·4	5·4—5·6	5·6—5·8
நிகழ்வெண் (f)	45	31	24	6	1

அளவு	நிகழ்வெண்	மேல் எல்லை	வளர் நிகழ்வெண்
4—4·2	1	4·2	1
4·2—4·4	2	4·4	3
4·4—4·6	18	4·6	21
			← $\frac{N}{4}$
4·6—4·8	35	4·8	56
4·8—5·0	45	5·0	101
			← $\frac{3N}{4}$
5·0—5·2	31	5·2	132
5·2—5·4	24	5·4	156
5·4—5·6	6	5·6	162
5.6—5·8	1	5·8	163

$$N = 163$$

$$\therefore \frac{N}{4} = \frac{163}{4} = 40{\cdot}75$$

$$\frac{3N}{4} = \frac{163 \times 3}{4} = 122{\cdot}25$$

$\frac{N}{4} = 40{\cdot}75$, வளர் நிகழ்வெண்கள் 21-க்கும் 56-க்கும் இடையில் இருப்பதால் முதற் கால்மானம் Q_1 காணப்படும் பிரிவு 4·6—4·8.

$$Q_1 = l + \frac{\left(\frac{N}{4} - m\right)}{f} \times c$$

$$l = 4{\cdot}6, \quad m = 21, \quad f = 35, \quad c = {\cdot}2$$

$$Q_1 = 4{\cdot}6 + \frac{(40{\cdot}75 - 2.1)}{35} \times {\cdot}2$$

$$= 4{\cdot}6 + \frac{{\cdot}2}{35}(19{\cdot}75)$$

$$= 4{\cdot}6 + \frac{3{\cdot}95}{35}$$

$$= 4{\cdot}6 + 0{\cdot}1128 = 4.7128$$

$$Q_3 = l + \frac{\left(\frac{3N}{4} - m\right) c}{f}$$

Q_3 அடங்கியுள்ள பிரிவு 5·0 — 5·2

$l = 5{\cdot}0, \quad m = 101, \quad f = 31$

$$Q_3 = 5 + \frac{(122{\cdot}25 - 101)}{31} \times {\cdot}2$$

$$= 5 + \frac{0{\cdot}2}{31}(21{\cdot}25)$$

$$= 5 + \frac{4{\cdot}250}{31} = 5 + 0{\cdot}1371$$

$$= 5{\cdot}1371$$

∴ கால்மான விலக்கம் ∴ $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{5{\cdot}1371 - 4{\cdot}7128}{2}$$

$$= \frac{0{\cdot}4243}{2}$$

$$= 0{\cdot}2122.$$

சராசரி விலக்கம் (Mean Deviation)

பரவுகை அளவைகளில் வீச்சும், கால்மான விலக்கமும் இடத்தைப் பொறுத்த அளவைகளேயாகும் (position measures). வீச்சு முனையுறுப்புகளைப் பொறுத்துமட்டும் அமைகிறது. கால்மான விலக்கம் இரு முனைகளிலும் 25% ராசிகளை ஒதுக்கிவிட்டு, நடு

50% ராசிகளைப் பொறுத்து அமைகிறது. மேலும், Q_1, Q_3-க்கிடையே உள்ள ராசிகள் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியைச் சுற்றி நெருக்கமாகவோ, அல்லது விலகியோ பரவியிருந்தாலும், Q_1, Q_3-ன் மதிப்புகள் மாருதவரை, கால்மான விலக்கமும் அதே மதிப்பை உடையதாக இருக்கும். எனவே, பரவலின் எல்லா ராசிகளையும் பொறுத்து அமையக்கூடிய சிறந்த அளவைகளே சிதறல் தன்மையினை நன்கு அளக்கமுடியும். அவை திட்ட விலக்கமும், சராசரி விலக்கமுமாகும்.

11, 15, 25, 30, 39 என்ற எண்களை எடுத்துக் கொள்வோமானல், அவற்றின் கூட்டுச் சராசரி 24-லிருந்து இடப்பக்கமாக 13, 9, அலகுகள் தூரத்திலும், வலப்பக்கம் 1, 6, 15 அலகுகள் தூரத்திலும் பரவியுள்ளன. ராசிகளின் விலக்கங்களை அவற்றிற்குரிய குறிகளுடன் எழுதினுல் அவை முறையே—13,—9, 1,6,15 என அமையும். இவ்விலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை பூஜ்யம் ஆகிறது. எனவே, பரவலின் சிதறலை அளக்க விலக்கங்களின் குறிகளைக் கருதாது, அவற்றின் தனி மதிப்புகளைமட்டும் எடுத்துக்கொண்டு அவற்றின் சராசரி காண்பதே சராசரி விலக்கம் ஆகும்.

சீர்படா விவரங்களுக்கு, சராசரி விலக்கம் $\frac{\Sigma \mid x_r - A \mid}{n}$

இங்கு A கூட்டுச்சராசரி, முகடு அல்லது இடைநிலையாக இருக்கலாம். இதுபோன்றே நிகழ்வெண் பரவலின் சராசரி விலக்கம் $= \frac{\Sigma f_r \mid x_r - A \mid}{N}$

எ.கா. பின்வரும் எண்களுக்குச் சராசரி விலக்கம் காண்க.

9, 15, 17, 21, 18

எண்களின் கூட்டுச்சராசரி = 16 ; இடைநிலை = 17.

சராசரி விலக்கம் (கூட்டுச்சராசரியை ஒட்டி)

$$= \frac{\mid 9-16 \mid + \mid 15-16 \mid + \mid 17-16 \mid + \mid 21-16 \mid + \mid 18-16 \mid}{5}$$

$$= \frac{7+1+1+5+2}{5} = \frac{16}{5} = 3{\cdot}2$$

சராசரி விலக்கம் (இடைநிலையை ஒட்டி)

$$\frac{|9-17|+|15-17|+|17-17|+|21-17|+|18-17|}{5}$$

$$\frac{8+2+0+4+1}{5}=\frac{15}{5}=\mathbf{3}.$$

இடைநிலையை ஒட்டிய சராசரி விலக்கம் குறைவான மதிப்புடையதாகிறது.

எ. கா பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலுக்கு (i) கூட்டுச் சராசரியை ஒட்டிய, (ii) இடைநிலையை ஒட்டிய சராசரி விலக்கம் காண்க.

உயரம் (அடிகளில்)	15	25	35	45	55	65	75
மரங்களின் எண்ணிக்கை	6	12	20	40	14	6	2

(i) உயரம்

x	f	d	$f \cdot d$	$\lvert x-\bar{x} \rvert$	$f \lvert x-\bar{x} \rvert$
15	6	—3	—18	27	162
25	12	—2	—24	17	204
35	20	—1	—20	7	140
45	40	0	0	3	120
55	14	1	14	13	182
65	6	2	12	23	138
75	2	3	6	33	66
மொத்தம்	100		—30		1012

$$\bar{x}=45+\frac{-30}{100}\times 10=42$$

கூட்டுச்சராசரியை ஒட்டிய சராசரி விலகம் $=\frac{1012}{100}=10{\cdot}12.$

(ii) இடைநிலையை ஒட்டிய சராசரி விலக்கம்

உயரம் (மேல் எல்லை)	வளர் நிகழ் வெண்	உயரம் x	f	$f\mid x-M\mid = f\mid x-43\mid$
20	6	15	6	168
30	18	25	12	216
40	38	35	20	160
50	78	45	40	80
60	92	55	14	168
70	98	65	6	132
80	100	75	2	64
மொத்தம்			100	988

$$\text{இடைநிலை} = 40 + \frac{50-38}{40} \times 10 = 43 \text{ அடிகள்}$$

$$\text{இடைநிலையை ஒட்டிய சராசரி விலக்கம்} = \frac{\Sigma f\mid x-43\mid}{100}$$

$$= \frac{988}{100} = 9{\cdot}88.$$

சுருக்குவழியில் சராசரி விலக்கத்தைக் கணக்கிடுதல்

கூட்டுச்சராசரி, முகடு, இடைநிலை போன்றவை முழு எண்களாய் இராவிடில், சராசரி விலக்கத்தின் வாய்பாட்டை அப்படியே பயன்படுத்திக் கணக்கிடுவது கடினம். எனவே வேறொரு வசதியான மூலத்தை எடுத்துக்கொண்டு, அதனின்று ராசிகளின் விலக்கங்களைக் காண்கின்றோம். இதற்காகத் தேவையான திருத்தங்கள் செய்தால், சராசரியிலிருந்து எடுக்கப் படும் விலக்கங்களின் கூடுதல் கிடைக்கும்.

மையமதிப்புகள் x_r, x_{r+1} இவற்றுக்கிடையே, சராசரி A இருந்தால் அதே இடைவெளியில் B என்ற ஒரு பொருத்தமான எண்ணை மூலமாக எடுத்துக்கொள்வோம். $c > r$ ஆக இருக்கும் போது $x_i - A$ என்ற விலக்கம் நேர்க்குறி உடையதாக இருக்கும்.

(x_i, i ஆவது மையமதிப்பு) $i \leq r$ ஆக இருக்கும்போது $x_i - A$ என்பது குறைகுறி உடையதாக இருக்கும்.

குறைகுறி உடைய விலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \sum_{i=1}^{r} f_i (x_i - A)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} f_i (x_i - B + B - A)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} f_i (x_i - B) + (B - A) \sum_{i=1}^{r} f_i$$

நேர்க்குறி உடைய விலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= \sum_{i=r+1}^{n} f_i (x_y - A)$$

$$= \sum_{i=r+1}^{n} f_i (x_i - B + B - A)$$

$$= \sum_{i=r+1}^{n} f_i (x_i - B) + (B - A) \sum_{i=r+1}^{n} f_i$$

∴ விலக்கங்களின் தனி மதிப்புகளின் கூடுதல்

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i \mid x_i - A \mid$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i \mid x_i - B \mid -$$

$$(B - A) \left[\sum_{i=1}^{r} f_i - \sum_{i=r+1}^{n} f_i \right]$$

$$= \Sigma \ f_i \mid x_i - B \mid - (B - A)(N_b - N_a)$$

இங்கு N_b = முதல் r நிகழ்வெண்களின் கூடுதல்

N_a = எஞ்சியுள்ள நிகழ்வெண்களின் கூடுதல்

எ.கா. பின்வரும் பரவல் 50 மாணவரது மதிப்பெண்களைத் தருகிறது. இடைநிலையிலிருந்தும், கூட்டுச் சராசரியிலிருந்தும்

(அ) சராசரி விலக்கத்தைக் காண்க.

மதிப்பெண்	140—	150—	160—	170—	180—	190—200
நிகழ்வெண்	4	6	10	18	9	3

(அட்டவணையை பக்கம் 171-ல் பார்க்கவும்).

கூட்டுச் சராசரி ($\bar{x}$), $= A + \dfrac{\Sigma f \cdot d}{N} \times c$

$$= 175 - \frac{19}{50} \times 10$$

$$= 175 - 3{\cdot}8 = 171{\cdot}2$$

இடைநிலை (M) $= l + \dfrac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c$

$$= 170 + \frac{25 - 20}{18} \times 10$$

$$= 172{\cdot}8$$

கூட்டுச்சராசரி பற்றிய சராசரி விலக்கம் $= \dfrac{\Sigma f \mid x - \bar{x} \mid}{N}$

$$\frac{528}{50} = 10.56$$

பிரிவு இடைவெளி	f	மையய மதிப்பு	d	$f \cdot d$	குவிவு நிகழ் வெண்	d_1 $\lvert x - \bar{x} \rvert$	$f\,d_1$	d_2 $\lvert x - M \rvert$	$f\,d_2$
140—150	4	145	—3	—12	4	26·2	104.8	27.8	111·2
150—160	6	155	—2	—12	10	16·2	97·2	17·8	106·8
160—170	10	165	—1	—10	20	6·2	62·0	7·8	78·0
170—180	18	175	0	0	38	3·8	68·4	2·2	39·6
180—190	9	185	1	9	47	13·8	124·2	12.2	109·8
190—200	3	195	2	6	50	23·8	71·4	22·2	66·6
				—19			528	90.0	512

$$\text{இடைநிலையைப் பற்றிய சராசரி விலக்கம்} = \frac{\Sigma f \mid x - M \mid}{N}$$

$$= \frac{512}{50} = 10{\cdot}24$$

(ஆ) மேற்கண்ட பரவலுக்குச் சுருக்கு வழியில் சராசரி விலக்கத்தைக் காண்க.

கூட்டுச்சராசரியும், இடைநிலையும் எந்தப் பிரிவில் உள்ளனவோ, அந்தப் பிரிவின் மையப் புள்ளியையே மூலமாகக் கொள்ளலாம்.

கூட்டுச்சராசரி 171·2, மைய மதிப்புகள் 165-க்கும், 175-க்கும் இடையில் உள்ளது.

$$\Sigma\ f_i \mid x_i - 171{\cdot}2 \mid = \Sigma\ f_i \mid x_i - 175 \mid (175 - 171{\cdot}2)$$
$$[(4 + 6 + 10) - (18 + 9 + 3)]$$

[$x_r = 165$ ஆதலால், $N_b = x_r$ வரையும், அதற்கு முன்பும் வரும் நிகழ்வெண்களைக் குறிப்பதால், $N_b = 4 + 6 + 10$. N_a = மீதியுள்ள நிகழ்வெண்களின் கூட்டுத் தொகை.]

எனவே, கூட்டுச் சராசரியை ஒட்டிய சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{49 \times 10 - 3{\cdot}8\,(-10)}{50} = \frac{528}{50} = 10{\cdot}56$$

இடைநிலையைப் பற்றிய சராசரி விலக்கம்

$$\Sigma f_i \mid x_i - 172{\cdot}8 \mid = \Sigma f_i \mid x_i - 175 \mid - \mid 175 - 172{\cdot}8 \mid$$
$$[(4 + 6 + 10) - (18 + 9 + 3)$$

$$= 490 - 22 \times -10$$

$$= 512.$$

எனவே, இடைநிலையைப்பற்றிய சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{512}{50} = 10{\cdot}24$$

எ.கா. ஒரு மாதத்தில் 15 மாவட்டங்களில் பெய்துள்ள மழையளவுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. சராசரி விலக்கத்தின் மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்க.

4·9, 8·1, 8·2, 6·6, 7·2, 10·7, 8·5, 6·2, 9·8, 7·4, 5·7, 4·6, 6·5, 7·7, 11·0.

சராசரி விலக்கம் இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடப்படும் போது, மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறுகிறது.

எண்களை ஏறு வரிசையில் அமைத்தால்,

4·6, 4·9, 5·7, 6·2, 6·5, 6·6, 7·2, | 7·4 | 7·7, 8·1, 8·2, 8·5, 9·8. 10·7, 11·0,

இடைநிலை $\frac{15+1}{2}$=8 ஆவது உறுப்பான 7·4 ஆகிறது.

சராசரி விலக்கம் $= \frac{\Sigma \mid x_r - 7{\cdot}4 \mid}{15} = \frac{1}{15}[2{\cdot}8 + 2{\cdot}5 + 1{\cdot}7 + 1{\cdot}2 + {\cdot}9 + {\cdot}8 + {\cdot}2 + 0 + {\cdot}3 + {\cdot}7 + {\cdot}8 + 1{\cdot}1 + 2{\cdot}4 + 3{\cdot}3 + 3.6]$

$$= \frac{22{\cdot}3}{15} = 1{\cdot}486$$

இடைநிலையை ஒட்டிய சராசரி விலக்கம் மீச்சிறு மதிப்புடையது.

நிருபணம்

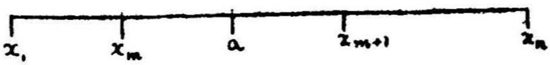
'a' என்ற புள்ளியிலிருந்து சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \mid x_i - a \mid}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{K}{N}$$

இங்கு $K = \sum_{i=1}^{n} f_i \mid x_i - a \mid, \quad N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

$$K = \sum_{i=1}^{n} f_i \mid x_i - a \mid$$ மீச்சிறு மதிப்பை உடைய

தாய் இருக்கும்போது, 'a'-யிலிருந்து எடுக்கப்படும் சராசரி விலக்கம் மீச்சிறு மதிப்பை உடையதாய் இருக்கும். a இடைநிலையாக இருக்கும்போது, K மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறும் எனக் காண்போம்.



படம் 4·2

$x_m < a < x_{m+1}$

$x_i < a \ (i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, m)$

$x_i > a \ (i = m + 1, m + 2, \ldots\ldots, n)$

அல்லது $x_i - a < 0, (i = 1, 2, \ldots\ldots m)$

$x_y - a > 0, (i = m + 1, m + 2, \ldots\ldots n).$

$$K = \sum_{i=1}^{m} f_i \mid x_i - a \mid + \sum_{i=m+1}^{n} f_i \mid x_i - a \mid$$

$$= \sum_{i=1}^{m} f_i (a - x_i) + \sum_{i=m+1}^{n} f_i (x_i - a)$$

$$= \left[-\sum_{i=1}^{m} f_i \, x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f_i \, x_i \right]$$

$$+ a \left[\sum_{i=1}^{m} f_i - \sum_{i=m+1}^{n} f_i \right]$$

$$K = L + a (M_1 - M_2)$$

$$\text{இதில் } L = \left[-\sum_{i=1}^{m} f_i x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f_i x_i \right]$$

$$M_1 = \sum_{i=1}^{m} f_i, \quad M_2 = \sum_{i=m+1}^{n} f_i$$

K, மீச்சிறு அல்லது மீப்பெரு மதிப்பைப் பெறவேண்டுமானுல்,

$$\frac{\partial K}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial K}{\partial a} = M_1 - M_2$$

$$\therefore \quad \frac{\partial K}{\partial a} = 0 \text{ என்பதால்,}$$

$$M_1 = M_2$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_i = \sum_{i=m+1}^{n} f_i$$

இதிலிருந்து 'a' இடை நிலையென்பது புலனுகிறது. மேலும், இடைநிலைக்கு வலப்புறம் அமைந்திருக்கும் a-யின் மதிப்புகளுக்கு K கூடுஞ் சார்பாகவும், இடைநிலைக்கு வலப்புறம் அமைந்திருக்கும் a-யின் மதிப்புகளுக்குக் குறையுஞ்சார்பாகவும் இருப்பதாலும், $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$ (இடை நிலையில்) என்பதாலும், இடைநிலையை ஒட்டிய சராசரி விலக்கம் மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறுகிறது என அறிகிரோம்.

எ.கா. எந்தவொரு நிகழ்வெண் பரவலிலும் இடைநிலை $\pm$ இடைநிலையை ஒட்டிய சராசரி விலக்கம் என்ற இடைவெளியில் தான் கூட்டுச் சராசரி அமையும் என நிறுவுக.

$$\text{கூட்டுச் சராசரி } \bar{x} = \frac{\Sigma f \cdot x}{\Sigma f}$$

இடைநிலையை M எனக்கொள்வோம்.

இடைநிலையிலிருந்து சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{\Sigma f \mid x - M \mid}{N}$$

$$\bar{x} = M + \frac{\Sigma f(x - M)}{N}$$

$$\frac{\Sigma f(x - M)}{N} < \frac{\Sigma f \mid x - M \mid}{N}$$

$$\frac{\Sigma f(x - M)}{N} > -\frac{\Sigma f \mid x - M \mid}{N}$$

$$-\frac{\Sigma f \mid x - M \mid}{N} < -\frac{\Sigma f(x - M)}{N}$$

$$< \frac{\Sigma f \mid x - M \mid}{N}$$

$$\therefore \quad M - \frac{\Sigma f \mid x - M \mid}{N} < M + \frac{\Sigma f(x - M)}{N}$$

$$< M + \frac{\Sigma f \mid x - M \mid}{N}$$

எனவே $M + \frac{\Sigma f(x - M)}{N}$,

$$\left[M - \frac{\Sigma f \mid x - M \mid}{N}, M + \frac{\Sigma f \mid x - M \mid}{N} \right]$$

என்ற பிரிவில் உள்ளது.

அதாவது, பரவலின் கூட்டுச்சராசரியானது இடைநிலை ∓ இடைநிலையை ஒட்டிய சராசரி விலக்கம் என்ற இடைவெளியில் உள்ளது.

எ.கா. ஒரு நிகழ்வெண் பரவலில் A என்ற மூலத்திலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கம், $\bar{x} - A + \frac{2}{N}[A\, \Sigma f_r - \Sigma f_r x_r]$ என்ற தொடர்பினால் பெறப்படும் என்பதைக் காட்டுக.

இங்கு $\bar{x}$ கூட்டுச்சராசரி ஆகும்.

எந்த நிகழ்வெண் பரவலுக்கும்,

$$\sum_{r=1}^{n} f_r = N$$

அதாவது $\sum_{x_r \leq A} f_r + \sum_{x_r > A} f_r = N$

$$\therefore \sum_{x_r > A} f_r = N - \sum_{x_r \leq A} f_r$$

மேலும் எந்த நிகழ்வெண் பரவலுக்கும்,

$$N\bar{x} = \sum_{r=1}^{n} f_r x_r$$

$$= \sum_{x_r \leq A} f_r x_r + \sum_{x_r > A} f_r x_r$$

$$\therefore \sum_{x_r > A} f_r x_r = N\bar{x} - \sum_{x_r \leq A} f_r x_r$$

A-யிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட சராசரி விலக்கம்

$$\frac{1}{N} \sum_{r=1}^{n} f_r \mid x_r - A \mid$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{x_r \leq A} f_r \; (A - x_r) \; + \; \sum_{x_r > A} f_r \; (x_r - A)$$

$$= \frac{1}{N} \left[A \sum_{x_r \leq A} f_r - \sum_{x_r \leq A} f_r \; x_r \right]$$

$$+ N\bar{x} - \sum_{x_r \leq A} f_r \; x_r - A \left[N - \sum_{x_r \leq A} f_r \right]$$

பயிற்சி

1. பின்வரும் விவரங்களுக்குக் கால்மான இடைவெளியைக் கணக்கிடுக.

பிரிவு	நிகழ்வெண்
0 — 10	4
10 — 20	15
20 — 30	28
30 — 40	16
40 — 50	7

[மதுரை ப.க., பி ஏ. 1971]

2. பின்வரும் பரவலுக்கு வீச்செல்லை, கால்மான விலக்கம் காண்க.

வாரக் கூலி (ருபாயில்)	தொழிலாளரது எண்ணிக்கை
45 — 55	42
55 — 65	68
65 — 75	90
75 — 85	115
85 — 95	50
95 — 105	15
105 — 115	15
115 — 125	5

[விடை வீச்செல்லை 80 ; கால்மான விலக்கம் 10. 08]

3. முறையே 5, 7 நபர்கள் கொண்ட இரு வருமானத் தொகுதிகளின் சராசரி விலக்கத்தைக் காண்க.

தொகுதி I (ரூபாயில்)	தொகுதி II (ரூபாயில்)
4,000	3,000
4 200	4,000
4,400	4,200
4,600	4,400
4,800	4,600
	4,800
	5,800

[விடை : இடைநிலையை ஒட்டிய சராசரி விலக்கம் : தொகுதி I—240; தொகுதி II—571·4]

4. பின்வரும் பரவலுக்கு இடைநிலையை ஒட்டிய சராசரி விலக்கம் காண்க.

வயது	நபர்களின் எண்ணிக்கை
14 — 19·5	9
20 — 25·5	16
26 — 35·5	12
36 — 40·5	26
41 — 50·5	14
51 — 55.5	12
56 — 60·5	6
61 — 70.5	5

[விடை : இடைநிலை = 38·25, சராசரி விலக்கம் : 10·605]

5. பின்வரும் எண்களின் கால்மானங்களைக் காண்க.

13, 21, 7, 5, 11·5, 21·3, 18·5. 17·1, 15, 21·4, 13·8, 29·3, 18·7, 20·5.

$$= \bar{x} - A + \frac{2}{N}\left[A \sum_{x_r \leq A} f_r - \sum_{x_r \leq A} f_r x_r\right]$$

எ.கா. பின்வரும் விவரங்களுக்கு (அ) இடைநிலையை ஒட்டிய சராசரி விலக்கம் காண்க.

பின்வரும் மதிப்பெண்களுக்குக் குறைவான	மாணவரின் எண்ணிக்கை
80	100
70	90
60	80
50	60
40	32
30	20
20	13
10	5

தீர்வு அ.

மேல் எல்லை	வளர் நிகழ்வெண்
10	5
20	13
30	20
40	32
	$\leftarrow \frac{N}{2} = 50$
50	60
60	80
70	90
80	100

$$\text{இடைநிலை} = 40 + \frac{50 - 32}{28} \times 10$$

$$= 46{\cdot}43$$

பிரிவு இடைவெளி	மைய மதிப்பு x	நிகழ்வெண் f	$d = \frac{x - 45}{10}$	$f{\cdot}d$
0 — 10	5	5	—4	—20
10 — 20	15	8	—3	—24
20 — 30	25	7	—2	—14
30 — 40	35	12	—1	—12
40 — 50	45	28	0	0
50 — 60	55	20	1	20
60 — 70	65	10	2	20
70 — 80	75	10	3	30

இடைநிலை 46·43, 45 — 55 என்ற இரு மைய மதிப்பு களிடையே உள்ளதால், $x_r = 45$.

ஏற்கெனவே நிறுவிய வாய்பாட்டின்படி,

$$\Sigma f_i \mid x_i - A \mid = \Sigma f_i \mid x_i - B \mid - (B - A)(N_b - N_a)$$

$A = 46{\cdot}43$; $B = 45$. $N_b = 5 + 8 + 7 + 12 + 28$;

$N_a = 20 + 10 + 10.$

$$\therefore \quad \Sigma f_i \mid x_i - A \mid = \Sigma f d \mid \times 10 - (45 - 46{\cdot}43)(60 - 40)$$

$$= 1400 - (-1{\cdot}43)(420) = 1400 + 28{\cdot}6$$

$$\therefore \quad \text{சராசரி விலக்கம்} = \frac{1428{\cdot}6}{100} = \mathbf{14.286}$$

திட்ட விலக்கம் (Standard Deviation)

பரவுகை அளவுகளிலேயே மிகச்சிறந்தது திட்ட விலக்கம். மையப் போக்களவைகளில் சிறந்ததாகிய கூட்டுச்சராசரியி லிருந்து, ராசிகளின் விலக்கங்களை எடுத்துக்கொண்டு, அவற்றை அப்படியே கூட்டினால் பூஜ்யமாகிறது. எனவே சராசரி விலக்கத்தைப்போல், விலக்கங்களின் குறிகளைக் கவனியாது விடாமல், அவற்றை வர்க்கப்படுத்துவதால் எல்லா விலக்கங் களுமே நேர்க்குறியைப் பெறுகின்றன. இவ்வர்க்கங்களின் சராசரி, பரவலின் சிதறல் தன்மையினை ஓரளவு எடுத்துக் கூறுகிறது. ஆனால், விலக்கங்களை வர்க்கப்படுத்தியதால், அதிகரித்துள்ள அளவுகளுக்கு ஈடுசெய்வதற்காக, வர்க்கங்களின் சராசரியின் வர்க்கமூலம் காண்கிறோம். இதுவே திட்ட விலக்கம் 'σ' (சிக்மா) ஆகும். எனவே, ராசிகளின் கூட்டுச்சராசரியிலிருந்து அடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் சராசரியின் வர்க்க மூலம் (Root Mean Square Deviation from the Mean) திட்ட விலக்கம் ஆகும்.

சராசரி விலக்கத்தைக்காணக் கூட்டுச்சராசரியைத்தவிர, இடைநிலை, முகடு, இவற்றிலிருந்தும் விலக்கங்கள் எடுத்துக் கொள்கிறோம். ஆனால், திட்ட விலக்கத்திற்குக் கூட்டுச்சராசரியி லிருந்துமட்டும் விலக்கங்களை எடுத்துக்கொள்கிறோம்.

சீர்படா விவரங்களுக்குத் திட்ட விலக்கம் கணக்கிடுதல்

(i) ராசிகளின் கூட்டுச்சராசரி $\bar{x}$-ஐக் கணக்கிடுக.

(ii) ஒவ்வொரு ராசிக்கும் $\bar{x}$-க்கும் உள்ள வேறுபாட்டைக் கணக்கிடுக. $d_r = (x_r - \bar{x})$ $(r = 1, 2, \ldots\ldots n)$

(iii) விலக்கங்களை வர்க்கப்படுத்தி, அவற்றின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

(iv) விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையை ராசிகளின் எண்ணிக்கையால் வகுத்து, வர்க்கமூலம் கண்டால் திட்ட விலக்கம் கிடைக்கும்.

எனவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ராசிகள் $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ ஆனால்,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (x_r - \bar{x})^2}{n}}$$

எ. கா. கீழ்க்காணும் பட்டியல் பத்து மாணவர்கள் ஒரு தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்களைத் தருகிறது. திட்ட விலக்கத்தைக் காண்க.

வரிசை எண் :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
மதிப்பெண் :	43	48	65	57	31	60	37	48	78	59

வரிசை எண்	மதிப்பெண்	$d = x_r - \bar{x}$ $= \bar{x} - 52.6$	$d^2 = (x_r - 5\cdot6)^2$
1	43	− 9·6	92·16
2	48	− 4·6	21·16
3	65	+12·4	153·76
4	57	+ 4·4	19·36
5	31	−21·6	466·56
6	60	+ 7·4	54·76
7	37	−15·6	243·36
8	48	− 4·6	21·16
9	78	+25·4	645·16
10	59	+ 6·4	40·96

$\Sigma x = 526$ $\qquad\qquad \Sigma d^2 = 1758\cdot40$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{526}{10} = 52\cdot6$$

$$\text{திட்ட விலக்கம் } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (x_r - \bar{x})^2}{n}}$$

$$\Sigma d_r^2 = 1758\cdot40, \quad n = 10$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{1758\cdot40}{10}} = \sqrt{175\cdot84} = 13\cdot26.$$

சுருக்குவழியில் திட்ட விலக்கம் காணுதல்

கூட்டுச்சராசரி முழு எண்ணாக இராதபோது அதிலிருந்து ராசிகளின் விலக்கங்களையும், அவற்றின் வர்க்கங்களையும் கணக்கிடுவது கடினம். எனவே, ஏதேனும் வசதியான ஒரு மூலத்தை எடுத்துக்கொண்டு அதிலிருந்து விலக்கங்களைக் கணக்கிடலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட ராசிகள் $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என இருக்கட்டும். A என்பது ஏதேனும் ஒரு வசதியான மூலமாக இருந்தால்,

$$x_r - A = x_r - \bar{x} + \bar{x} - A$$

$$\begin{aligned}\Sigma(x_r - A)^2 &= \Sigma(x_r - \bar{x} + \bar{x} - A)^2 \\ &= \Sigma(x_r - \bar{x})^2 + 2\,\Sigma(x_r - \bar{x})(\bar{x} - A) + \Sigma(\bar{x} - A)^2 \\ &= \Sigma(x_r - \bar{x})^2 + nd^2\end{aligned}$$

இருபுறமும் n ஆல் வகுக்க.

$$\frac{\Sigma(x_r - A)^2}{n} = \frac{\Sigma(x_r - \bar{x})^2}{n} + a^2$$

$$\left[d = \bar{x} - A,\ \bar{x} = A + \frac{\Sigma x_r - A}{n}\right], \text{ ஆதலால்}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_r - A)^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_r - A}{n}\right)^2}$$

எ. கா. முன்புகூறிய மதிப்பெண்களின் பரவலுக்குச் சுருக்கு வழியில் திட்ட விலக்கத்தைக் காண்க.

வரிசை எண்	மதிப்பெண்	$d_r = x_r - A$ $= x_r - 50$	d_r^2
1	43	-7	49
2	48	-2	4
3	65	$+15$	225
4	57	$+7$	49
5	31	-19	361
6	60	$+10$	100
7	37	-13	169
8	48	-2	4
9	78	$+28$	784
10	59	$+9$	81
		26	1826

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_r^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_r}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{1826}{10} - \left(\frac{26}{20}\right)^2}$$

$$= \sqrt{182{\cdot}6 - 6{\cdot}76}$$

$$= \sqrt{175{\cdot}84} = 13{\cdot}26.$$

குறிப்பு :

n, 1-லிருந்து 100-க்குள் அடங்கிய முழு எண்களாக இருந்தால் அவற்றின் வர்க்கங்களை, கணக்கிடப்பட்டுள்ள பட்டியல்களி லிருந்து நேரடியாக எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

எனவே $A = 0$ என,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(\ _r - A)^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_r - A}{n}\right)^2}$$

என்ற வாய்பாட்டில் பிரதியிட்டால்,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_r^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_r}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma x_r^2}{n} - \bar{x}^2}$$

எ. கா. 10 மனிதர்களின் உயரங்கள் பின்வருமாறு :

60", 60", 61", 62", 63", 63", 63", 64," 64", 70"

x_r	x_r^2
60	3600
60	3600
61	3721
62	3844
63	3969
63	3969
63	3969
64	4096
64	4096
70	4900
630	39,764

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_r^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_r}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{39,764}{100} - \left(\frac{630}{10}\right)^2}$$

$$= 2{\cdot}72''$$

நிகழ்வெண் பரவலுக்குத் திட்ட விலக்கம் காணுதல்

(i) மைய அளவு x_1 x_2 x_3 ...... x_n

நிகழ்வெண் f_1 f_2 f_3 ...... f_n

என்ற பரவலுக்கு,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_r (x_r - \bar{x})^2}{N}}$$ இங்கு N என்பது மொத்த நிகழ்வெண்.

(ii) $\bar{x}$-க்குப் பதிலாக வசதியான மூலம் A-யை எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_r (x_r - A)^2}{N} - \left[\frac{\Sigma f_r (x_r - A)}{N}\right]^2}$$

(iii) பிரிவு இடைவெளியின் அலகுகளில் விலக்கங்களைக் கணக்கிடலாம்.

$$\therefore \quad d_r = \frac{x_r - A}{c}$$

$$\text{எனவே } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_r d_r^2}{N} - \left[\frac{\Sigma f_r d_r}{N}\right]^2} \times c$$

எ. கா. கீழ்க்கண்ட நிகழ்வெண் பரவலுக்குத் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

வாராந்திர ஊதியம் (ரூபாயில்)	15	20	25	30	35	40	45
ஊதியம் பெறுபவரது எண்ணிக்கை	3	25	19	16	4	5	6

நடுமதிப்பு x_r	நிகழ்வெண் f_r	d_r	$f_r\, d_r$	$f_r\, d_r^2$
15	3	−3	− 9	27
20	25	−2	−50	100
25	19	−1	−19	19
30	16	0	0	0
35	4	1	4	4
40	5	2	10	20
45	6	3	18	54
மொத்தம்	78		−46	224

$A = 30$ என்க.

கூட்டுச்சராசரி $= A + \frac{\Sigma f_r d_r}{N} \cdot c$

$$= 30 - \frac{46}{78} \times 5$$

$$= 30 - 2{\cdot}95$$

$= 27{\cdot}05$ ரூபாய்

(திட்ட விலக்கம்)^2 $= \sigma^2 = \frac{\Sigma f_r d_r^2}{N} - \left[\frac{\Sigma f_r d_r}{N}\right]^2$

$$= \frac{224}{78} - \left(\frac{-46}{78}\right)^2$$

$$= 2{\cdot}87 - 0{\cdot}35$$

$= 2{\cdot}52 \times$ (பிரிவு இடைவெளிஅலகுகள்)^2

எனவே $\sigma = \sqrt{2{\cdot}52} \times 5 = 7{\cdot}95$ ரூபாய்

திட்ட விலக்கத்தின் சிறப்பியல்புகள்

(i) நிகழ்வெண் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி $\bar{x}$ ஆகவும், வசதியான ஏதேனும் ஒரு மூல எண் A ஆகவும் இருக்கட்டும்,

$$x_r - A = x_r - \bar{x} + \bar{x} - A$$

$$\therefore \quad (x_r - A)^2 = [(x_r - \bar{x}) + (\bar{x} - A)]^2$$
$$= (x_r-\bar{x})^2 + 2\,(x_r-\bar{x})\,(\bar{x}-A) + (\bar{x}-A)^2$$

$$\therefore f_r\,(x_r - A)^2 = f_r\,[(x_r - \bar{x})^2 + 2(x_r - \bar{x})(\bar{x} - A) + (\bar{x} - A)^2]$$

$$\Sigma f_r\,(x_r - A)^2 = \Sigma f_r\,(x_r-\bar{x})^2 + 2\,(\bar{x}-A)\,\Sigma f_r\,(x_r-\bar{x}) + (\bar{x} - A)^2\,\Sigma f_r]$$

$$\frac{\Sigma f_r\,(x_r - A)^2}{N} = \frac{\Sigma f_r\,(\bar{x}_r - \bar{x})^2}{N} + (\bar{x}-A)^2\,\frac{\Sigma f_r}{N}$$

[$\Sigma f_r\,(x_r - \bar{x}) = 0$. ஏனெனில், கூட்டுச்சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ராசிகளின் விலக்கங்களின் கூடுதல் பூஜ்யமாகும்.

$$S^2 = \sigma^2 + d^2 \qquad \left[\begin{array}{l} d = \bar{x} - A \\ \Sigma f_r = N \end{array}\right]$$
$$\sigma^2 = s^2 - d^2$$

$$\therefore \quad \sigma < s$$

எனவே, திட்ட விலக்கம், வேறு எந்த மூலத்திலிருந்தும் எடுக்கப்பட்ட விலக்க வர்க்கச் சராசரியின் வர்க்கமூலத்தைவிடச் சிறியது.

(ii) திட்ட விலக்கம், சராசரி விலக்கத்தைவிடப்பெரியது.

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\,\Sigma\,(x_r - \bar{x})^2 \text{ [சீர்படா விவரங்களுக்கு]}$$

$$\text{சராசரி விலக்கம்} = \frac{1}{n}\,\Sigma\,|\,x_r - \bar{x}\,|$$

$d_r = |\,x_r - \bar{x}\,|$ என்க.

இயற்கணித மூலம்,

$$\frac{\Sigma\, d_r^2}{n} > \left(\frac{\Sigma\, d_r}{n}\right) \times \left(\frac{\Sigma\, d_r}{N}\right)$$

$$> \left(\frac{\Sigma\, d_r}{n}\right)^2$$

$\therefore\ \sigma^2 >$ (சராசரி விலக்கம்)^2

$\therefore\ \sigma >$ சராசரி விலக்கம்

$x_i \mid f_i \ i = 1, 2, \ldots n$ என்ற நிகழ்வெண் பரவலுக்கு

$\sigma >$ சராசரி விலக்கம் எனக்காட்ட,

$\frac{1}{n} \Sigma f_r (x_r - \bar{x})^2 \geq \left\{ \frac{1}{n} \Sigma f_r \mid x_r - \bar{x} \mid \right\}^2$ என நிறுவ வேண்டும்.

$N \Sigma f_r\ y_r^2 \geq [\Sigma f_r \mid y_r \mid]^2\ y_r = x_r - \bar{n}$

$$(f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n)(f_1\, y_1^2 + f_2\, y_2^2 + \ldots\ldots + f_n\, y_n^2)$$
$$\geq [f_1 \mid y_1 \mid + f_2 \mid y_2 \mid + \ldots\ldots + f_n \mid y_n \mid]^2$$

$f_1 f_2 (y_1^2 + y_2^2) + \ldots\ldots \geq 2 f_1 f_2\, y_1\, y_2 + \ldots\ldots$

$f_1 f_2 (y_1 - y_2)^2 + \ldots\ldots \geq 0$ என நிறுவவேண்டும்.

$f_1, f_2 \ldots$ குறை குறியல்லாதவையாதலால் $f_1 f_2 (y_1 - y_2)^2 + \ldots\ldots \geq 0$

மாறிகளின் மதிப்புகள் சமமாயின், சமக்குறி பொருந்தும்.

(iii) *சீரான* அல்லது ஏறக்குறைய *சீரான* நிகழ்வெண் பரவலுக்குக் கீழ்க்கண்ட தொடர்புகள் தோராயமாக உண்மையாகும்.

சராசரி விலக்கம் $= \frac{4}{5}$ (திட்ட விலக்கம்)

கால்மான விலக்கம் $= \frac{2}{3}$ (திட்ட விலக்கம்)

(iv) n_1 உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு குழுவின் கூட்டுச் சராசரி, திட்டவிலக்கம் முறையே $\bar{x}_1$, σ_1 ஆகவும்,

n_2 உறுப்புகள் கொண்ட குழுவின் கூட்டுச்சராசரி, திட்ட விலக்கம் முறையே $\bar{x}_2$, σ_2 ஆகவும் இருந்தால், இவை இரண்டும் இணைந்த புதிய குழுவின் திட்டவிலக்கம் σ ஆக இருக்கும் பொழுது,

$$N\sigma^2 = n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 + n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2$$

இங்கு $N = n_1 + n_2$ $d_1 = (\bar{x}_1 - \bar{x})$; $d_2 = (\bar{x}_2 - \bar{x})$

$\bar{x}$ என்பது இணைந்த குழுவின் கூட்டுச்சராசரி.

நிறுவுதல்

$$N\sigma^2 = \sum_{1}^{N} (x_r - \bar{x})^2$$

இக் கூடுதலை இரு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம். முதல் கூடுதல் $n_1 S_1^2$. இங்கு S_1, $\bar{x}$ என்ற மூலத்தைப் பொறுத்த வர்க்கமூல சராசரி வர்க்க விலக்கம். $\bar{x}_1$ என்பது இதன் கூட்டுச்சராசரி.

$$\therefore \quad n_1 S_1^2 = n_1 (\sigma_1^2 + d_1^2)$$

இங்கு $d_1 = (\bar{x}_1 - \bar{x})$

இதேபோன்று $n_2 S_2^2 = n_2 (\sigma_2^2 + d_2^2)$

$d_r = (\bar{x}_2 - \bar{x})$

இரண்டையும் கூட்டினால்,

$$N\sigma^2 = n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2$$
$$= n_1 \sigma_1^2 + n_1 d_1^2 + n_2 \sigma_2^2 + n_2 d_2^2$$

இதேபோன்று மூன்று குழுக்களுக்கு,

$$N\sigma^2 = n_1 (\sigma_1^2 + d_1^2) + n_1 (\sigma_2^2 + d_2^2) + n_3 (\sigma_3^2 + d_3^2)$$

இங்கு $N = n_1 + n_2 + n_3$

$$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}$$
$$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}$$
$$d_3 = \bar{x}_3 - \bar{x}$$

$\bar{x}$ = மூன்று குழுக்களின் இணைந்த கூட்டுச்சராசரி. இதனையே k குழுக்களுக்கும் விரித்துக் கூறலாம்.

குறிப்பு : $N\sigma^2 = n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 + \frac{n_1 n_2}{N} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2$ எனவும் நிறுவலாம். $N\sigma^2 = n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 + n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2$ என நாம் அறிவோம்.

இங்கு $n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2 = n_1 (\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + n_2 (\bar{x}_2 - \bar{x})^2$

$$= n_1 \bar{x}_1^2 + n_2 \bar{x}_2^2 - 2\bar{x}(n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2) + (n_1 + n_2)\bar{x}^2$$

$$= n_1\bar{x}_1^2 + n_2\bar{x}_2^2 - 2\frac{[n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2]^2}{n_1 + n_2} + (n_1 + n_2)\left(\frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}\right)^2$$

$$= n_1\bar{x}_1^2 + n_2\bar{x}_2^2 - \frac{(n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{(n_1 + n_2)(n_1\bar{x}_1^2 + n_2\bar{x}_2^2) - (n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{n_1 n_2}{N}[\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - 2\bar{x}_1\bar{x}_2]$$

$$= \frac{n_1 n_2}{N}[\bar{x}_1 - \bar{x}_2]^2$$

எ.கா. 50 மாணவர் அடங்கிய ஒரு வகுப்பில், ஒரு பிற்போக்கான மாணவர் சராசரியைவிடக் குறைவாக, 36 மதிப்பெண்கள் குறைவாகப் பெறுகிறார். திட்டவிலக்கம் 5·1-ஐ விடக் குறைவாக இராது என நிறுவுக.

தீர்வு

எல்லா மாணவரது கூட்டுச்சராசரி $\bar{X}$ என்க. எனவே பிற்போக்கான மாணவரது மதிப்பெண் $= \bar{X} - 36$.

மாணவரின் எண்ணிக்கை	கூட்டுச்சராசரி	திட்டவிலக்கம்
$n_1 = 49$	$\bar{X}_1$	σ_1
$n_2 = 1$	$\bar{X}_2 = \bar{X} - 36$	$\sigma_2 = 0$

$\sigma_2 = 0$ (ஒரே ஒரு ராசியுடையதால்)

$$\bar{X} = \frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2}{n_1 + n_2} = \frac{49 \bar{X}_1 + (\bar{X} - 36)}{50}$$

$$\therefore \quad \bar{X}_1 = \frac{49 \bar{X} + 36}{49} = \bar{X} + \frac{36}{49}$$

$$\sigma^2 = \frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2}{n_1 + n_2} + \frac{n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} (\bar{x}_1 - \bar{x}\ )^2$$

இங்கு σ, 49, 1 மாணவர் அடங்கிய இரு தொகுதிகளும் இணைந்த 50 மாணவர் கொண்ட தொகுதியின் திட்டவிலக்கமாகும்.

$$\sigma^2 = \frac{49\,\sigma_1^2 + 0}{49 + 1} + \frac{49 \times 1}{(49 + 1)^2} \left[\left(\bar{X} + \frac{36}{49}\right) - (\bar{X} - 36)\right]^2$$

$$= \frac{49}{50}\sigma_1^2 + \frac{49}{2500}\left(\frac{36}{49} + 36\right)^2$$

$$= \frac{49}{50}\sigma_1^2 + 26{\cdot}45$$

$$\therefore \quad \sigma^2 \geq 26{\cdot}45$$

$$\therefore \quad \sigma \geq 5{\cdot}14$$

எனவே, 50 மாணவரது மதிப்பெண்களின் திட்டவிலக்கம் 5·1-ஐ விடக் குறைவாய் இராது. பிற்போக்கான மாணவரைத் தவிர மற்ற 49 மாணவரும், சமமதிப்பெண் பெற்றிருந்தால் $\sigma_1 = 0$

இந்நிலையிலும், $\sigma = 5{\cdot}14$. எனவே $\sigma > 5{\cdot}1$

எ.கா. 50 மாணவர்கள் அடங்கிய ஒரு குழுவிற்கு ஒரு தேர்வில் கிடைத்த மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சாரசரி 60. திட்ட விலக்கம் 8. 40 மாணவிகள் அடங்கிய மற்றொரு குழுவின் சராசரி மதிப்பெண் 54. திட்ட விலக்கம் 7 ; இவ்விரு குழுக்களின் இணைந்த தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரியையும், திட்ட விலக்கத்தையும் காண்க.

இரு குழுக்களும் இணைந்த தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி '$\bar{x}$' எனவும், திட்ட விலக்கம் 'σ' எனவும் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad \text{கூட்டுச்சராசரி} = \bar{x} = \frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2}{n_1 + n_2}$$

$n_1 = 50, \; \bar{x}_1 = 60$

$n_2 = 40, \; \bar{x}_2 = 54$

$$\bar{x} = \frac{50\,(60) + 40\,(54)}{50 + 40}$$

$$= \frac{3000 + 2160}{90} = \frac{5160}{90} = 57{\cdot}3$$

$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x} = 60 - 57{\cdot}3 = 2{\cdot}7$

$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x} = 54 - 57{\cdot}3 = -\,3{\cdot}3.$

திட்டவிலக்கம் = 'σ' காணுதல்

$N\sigma^2 = n_1\,\sigma_1^2 + n_2\,\sigma_2^2 + n_1\,d_1^2 + n_2\,d_2^2.$

$n_1 = 50, \; n_2 = 40,$

$d_1 = 2{\cdot}7, \; d_2 = -\,3{\cdot}3.$

$\sigma_1 = 8 \quad \sigma_2 = 7.$

$$90\,\sigma^2 = 50(8)^2 + 40\,(7)^2 + 50\,(2{\cdot}7)^2 + 40\,(-3{\cdot}3)^2$$

$$9\sigma^2 = 5\,(8)^2 + 4\,(49) + 5\,(2{\cdot}7)^2 + 4\,(-3{\cdot}3)^2$$

$$= 320 + 196 + 36{\cdot}45 + 43{\cdot}56$$

$$= 596{\cdot}01$$

$$\sigma^2 = \frac{596{\cdot}01}{9} = 66.22$$

$$\sigma = \sqrt{66{\cdot}22} = 8{\cdot}13$$

எ.கா. ஒரு வகுப்பில் n_1 மாணவரும், n_2 மாணவியரும் உள்ளனர். $(n_1 + n_2)$ மாணவரது கூட்டுச்சராசரி, திட்ட விலக்கம் முறையே $\bar{x}$, S. n_1 மாணவரது கூட்டுச்சராசரி, திட்ட விலக்கம் முறையே $\bar{x}_1$, S_1. அப்படியானால் மாணவியரது கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் முதலியவற்றைக் காண்க.

$(n_1 + n_2)$ மாணவரது, n_1 மாணவரது கூட்டுச்சராசரிகள் முறையே $\bar{x}$, $\bar{x}_1$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

n_2 மாணவியரது கூட்டுச்சராசரியை m எனக் கொள்வோம்.

அப்படியானல் $\bar{x} = \dfrac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 m}{n_1 + n_2}$

$$\therefore \quad m = \frac{\bar{x}(n_1 + n_2) - n_1 \bar{x}_1}{n_2}$$

$$= \frac{n_1 (\bar{x} - \bar{x}_1)}{n_2} + \bar{x}$$

$(n_1 + n_2)$ மாணவரது, n_1 மாணவரது திட்ட விலக்கங்கள் முறையே S, S_1.

n_2 மாணவரது திட்ட விலக்கம் σ எனக்கொள்வோம்.

அப்படியானல்,

$$(n_1 + n_2)\, s^2 = n_1 s_1^2 + n_2 \sigma^2 + \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \left[\bar{x}_1 - \frac{n_1 (\bar{x} - \bar{x}_1)}{n_2} + \bar{x} \right]^2$$

$$n_2 \sigma^2 = (n_1 + n_2)\, s^2 - n_1 s_1^2 - \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \times \frac{1}{n_2^2} \left[n_2 \bar{x}_1 - n_1 (\bar{x} - \bar{x}_1) + n_2 \bar{x} \right]^2$$

$$= (n_1 + n_2)\, s^2 - n_1 s_1^2 - \frac{n_1}{(n_1 + n_2)\, n_2} \left[(n_1 + n_2)\, \bar{x}_1 - \bar{x}\, (n_1 + n_2) \right]^2$$

$$= (n_1 + n_2)\, s^2 - n_1 s_1^2 - \frac{n_1}{(n_1 + n_2)\, n_2} \left[(n_1 + n_2)(\bar{x}_1 - \bar{x}) \right]^2$$

$$= (n_1 + n_2)\, s^2 - n_1 s_1^2 - \frac{n_1 (n_1 + n_2)^2}{(n_1 + n_2)\, n_2} (\bar{x}_1 - \bar{x})^2$$

$$n_2^2 \sigma^2 = n_2 (n_1 + n_2)\, s^2 - n_1 s_1^2 n_2 - n_1 (n_1 + n_2)(\bar{x}_1 - \bar{x})^2$$

$$\therefore \quad \sigma = \frac{1}{n_2}\left[n_2 (n_1 + n_2)\, s^2 - n_1 n_2 s_1^2 - n_1 (n_1 + n_2)(\bar{x}_1 - \bar{x})^2\right]^{1/2}$$

எ. கா. x என்னும் மாறியின் கூட்டுச் சராசரியும், திட்ட விலக்கமும் முறையே M, σ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. விலக்கங்கள் கூட்டுச் சராசரி மதிப்புடன் ஒப்பிடும் போது சிறியவை ஆனால், $\sqrt{x}$ -ன் கூட்டுச் சராசரி $= \sqrt{M}\left(1 - \frac{\sigma^2}{8M^2}\right)$ என நிறுவுக.

x-ஒரு மாறி ஆனால்,

$x - M = X$ என்க.

எனவே, $x = M + X = M\left(1 + \frac{X}{M}\right)$

$$\sqrt{x}\text{-ன் கூட்டுச்சராசரி} = \frac{1}{N}\sum f(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{N}\sum f\left[\sqrt{M}\left(1 + \frac{X}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \sqrt{M}\,\frac{1}{N}\sum f\left[1 + \frac{X}{2M} - \frac{X^2}{8M^2}\right]$$

$$= \sqrt{M}\left[1 - \frac{\sigma^2}{8M^2}\right].$$

$$\left[\because \sum fX = 0,\ \frac{1}{N}\sum fX^2 = \sigma^2\right]$$

பரவுகை இணை அளவை (Relative measure of dispersion)

பரவுகை அளவைகள் மாறியின் மதிப்புக்களின் அலகிலேயே அளக்கப்படுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, தொழிலாளரது வாராந்திர ஊதியங்களின் திட்ட விலக்கம் 3·5 ரூபாய் எனவும், அவர்களது வயதுகளின் பரவலின் திட்ட விலக்கம் 1·7 ஆண்டு எனவும்

கொள்வோம். இரு அளவைகளும்வெவ்வேறு அலகுகளாய் இருப்பதால் இவ்விரு பரவல்களின் சிதறலை ஒப்பிட்டுப் பார்ப்பதற்கு இயலாது. இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பரவல்களின் சிதறலை ஒப்பிடுவதற்கு அலகு இல்லாத ஒரு தனி எண் தேவை. எனவே, திட்ட விலக்கம் அல்லது ஏதேனும் ஒரு பரவுகை அளவையை அப் பரவலின் ஒரு சராசரியினுல் வகுத்தால், அது சிதறல் கெழுவாகஅமைந்து, தனி எண் ஆகிறது. சிற்சில சமயங்களில் வெறும் சிதறலை மட்டும் அறிந்தால் போதாது. எடுத்துக் காட்டாக, 86 மதிப்பெண்கள் பெறும் மாணவனது விடைத்தாளிலும், 35 மதிப்பெண்கள் பெறும் மாணவனது விடைத்தாளிலும் கூட்டும் போது ஒரு (1) மதிப்பெண் விடப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்வோம். இரண்டு தாள்களிலும் ஒரேவகையான மாறுபாடாக இருந்தாலும், அது இருவரையும் முற்றிலும் மாறுபட்ட முறையில் பாதிக்கிறது. அதாவது, 86 மதிப்பெண்களில் ஒன்று குறைந்தாலும் முதல் மாணவன் முதல் வகுப்பிலேயே தேர்வடைகிருன். ஆனுல், 2-வது மாணவனது எண் தேர்வடைந்தோர் பட்டியலில் இடமே பெருது.

இதுபோன்றே சராசரி மாதவருமானம் ரூ. 30,000, ரூ. 1,50,000 உள்ள இரு தொழிற்சாலைகளில் மின்வெட்டு காரணமாக, வருமானத்தில் ஏற்படும் குறைவு ரூ. 20,000 என்க. இந்த 20,000 ரூ. மாற்றத்தால், சராசரியோடு ஒப்பிட்டுப்பார்க்கும்போது, முதல் தொழிற்சாலையின் பொருளாதாரம் அடியோடு பாதிக்கப் படுவதைக் காண்கிருேம். எனவே, மாற்றத்தை அளவிடும் பரவுகை அளவையை மையப்போக்களவையின் அடிப்படையில் வைத்துப்பார்த்தால் பரவலின் தன்மைகள் நன்கு விளங்கும்.

வழக்கில் பெரிதும் பயன்படும் சில சிதறல் கெழுக்கள்

ஒரு பரவுகை அளவைக்கும், அதற்குரிய மையப் போக்களவைக்கும் உள்ள விகிதமே, சிதறல் கெழுவாகும். (Co-efficient of dispersion)

I. மாறுபாட்டுக்கெழு (Coefficient of Variation) (C. V.)

$$= \frac{\text{திட்ட விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச்சராசரி}} \times 100 = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

இது எப்பொழுதும் சதவீதத்திலேயே குறிப்பிடப்படுகிறது. இதன் மதிப்பு அதிகரிக்க அதிகரிக்கப் பரவலின் நிலைப்புத்தன்மை (consistency) குறைகிறது.

இது பரவுகை அளவைகளில் மிகச் சிறந்ததாகிய திட்ட விலக்கத்தையும், மையப் போக்களவையில் மிகச் சிறந்ததாகிய கூட்டுச் சராசரியையும் பயன்படுத்திக் கணக்கிடப்படுவதால், பரவுகை கெழுக்களிலேயே உயர்ந்ததாகக் கருதப்படுகிறது. சராசரி விலக்கத்தைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்கண்ட கெழுக்களும் கணக்கிடப் படுகின்றன.

II. (a) $\dfrac{\text{கூட்டுச் சராசரியைப் பற்றிய சராசரி விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}}$

(b) $\dfrac{\text{இடைநிலையைப் பற்றிய சராசரி விலக்கம்}}{\text{இடைநிலை}}$

(c) $\dfrac{\text{முகடைப் பற்றிய சராசரி விலக்கம்}}{\text{முகடு}}$

III. கால்மான பரவுகை கெழு = (Quartile Coefficient of Dispersion)

$$= \frac{\text{கால்மான விலக்கம்}}{\text{இடைநிலை}}$$

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{2M} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \text{ (தோராயமாக)}$$

IV. பரவலின் மீப்பெருமதிப்பு L ஆகவும், மீச்சிறுமதிப்பு M ஆகவும் இருந்தால், வீச்சுக் கெழு $= \dfrac{L - S}{L + S}$ ஆகும்.

ஒரு சிறந்த பரவுகை அளவையின் இயல்புகள்

மையப் போக்களவையைப் போன்றே ஒரு சிறந்த பரவுகை அளவைக்கும் சில பண்புகள் இருத்தல் வேண்டும்.

(i) நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு வாய்பாட்டால் அளவை கணக்கிடப்படவேண்டும்.

(ii) நிலையானதாக இருத்தல் வேண்டும்.

(iii) பாமர மக்களும் புரிந்து கொள்ளும் வகையில் எளிதாயும், கணக்கிடும் முறை சிக்கலற்றதாயும் இருத்தல் வேண்டும்.

(iv) எல்லா ராசிகளின் மதிப்புகளையும் கொண்டு அது கணக்கிடப் படவேண்டும்.

(v) மேன்மேலும் கணக்கியல் வழி முறைகளுக்கு (Further Algebraic manipulations) உட்பட்டு இருத்தல் வேண்டும்.

மேற்கூறிய பண்புகளின் அடிப்படையில் பல்வேறு அளவைகளின் இணைதராதரங்களைக் காண்போம் :

வீச்சு : சிறப்பியல்புகள்

(i) புரிந்துகொள்வதற்கு எளிமையானது.

(ii) விரைவில், எளிதாகக் கணக்கிடக்கூடியது.

(iii) பரவலின் பூர்த்தியான விவரங்கள் இல்லாதபோதும், பரவலின் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகள் மட்டும் தெரிந்தால்கூட வீச்சைக் கணக்கிடலாம்.

(iv) நடைமுறையில் சாதாரண மக்களாலும் பெரிதும் பயன்படுத்தப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒருவரது வருமானம் ரூ. 500 முதல் ரூ. 600 வரை இருக்கலாம், ஒரு நல்ல பேனாவின் விலை ரூ. 20 லிருந்து ரூ 100 வரை இருக்கலாம் என்பது போன்ற மதிப்பீடுகள் வீச்சளவைகளே யாகும்.

குறைகள்

(i) பரவலின் எல்லா ராசிகளின் மதிப்புகளையும் எடுத்துக் கொண்டு இது கணக்கிடப்படுவதில்லை.

(ii) பரவலில் எதிர்பாராது வரும் ஒரு உச்ச மதிப்பால் வீச்சின் மதிப்பு பெரிதும் பாதிக்கப்படுகிறது. 35, 32, 37, 33 என மதிப் பெண்கள் பெறும் நான்கு மாணவரிடையே 60 மதிப்பெண்கள் பெறும் மாணவர் சேர்க்கப்பட்டால் வீச்சு $37 - 32 = 5$-லிருந்து, $60 - 32 = 28$ ஆகத் திடீரென உயர்கிறது. எனவே, வீச்சு நிலையானது அல்ல.

(iii) இதனால் பரவலின் மொத்த சிதறலை மட்டும் அறிய முடிகின்றதே தவிர இடைப்பட்ட மதிப்புகளின் சிதறலை அறிய இயலாது.

(iv) முற்றுப் பெறாத இடைவெளிகள் இருக்கும்போது நிகழ்வெண் பரவலின் வீச்சு கணக்கிடமுடியாது.

கால்மான விலக்கம் (Quartile Deviation)

சிறப்பியல்புகள்

1. பரவலின் இரு முனைகளிலும் $\frac{1}{4}$ பகுதியைத் தள்ளி விடுவதால், முனையுறுப்புகளால் வீச்சு பாதிக்கப்படுவதைப்போல் கால்மான விலக்கம் பாதிக்கப்படுவதில்லை.

2 இதனைக் கணக்கிடுதல் எளிது.

3. முற்றுப்பெருத பிரிவுகளைக் கொண்ட பரவல்களின் கால்மான விலக்கத்தையும் கணக்கிடலாம்.

4. அளக்கமுடியாத பண்பின் அடிப்படையிலுள்ள விவரங்களிலும், தரப்படுத்தும் முறையினுல் இதனைக் கண்டறியலாம்.

5. வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தாமலேயே வளர் நிகழ்வெண் வரையிலிருந்தும் வரைபட மூலமாக அறியலாம்.

6. கணக்கியல் வழிமுறைக்கு இது உட்படாவிடினும், பரவலின் கோட்டம், தட்டை அளவை போன்ற இதர பண்புகளை அறியும் கெழுக்களிலும் இது ஓரளவு பயன்படுகிறது.

7. பாமர மக்களும் கால்மான விலக்கத்தின் கருத்தை ஓரளவு புரிந்துகொள்ளமுடியும்.

குறைகள்

1. கால்மான விலக்கம் பரவலின் சிதறல் அளவை என்பதைவிட 'பிரிக்கும் அளவை' (Partition Measure) என்று சில புள்ளியியல் அறிஞர்களால் கருதப்படுகிறது.

2. இது எந்த மையப்போக்களவையில் இருந்தும் ராசிகளின் விலக்கத்தை எடுத்துக் கூறுவதில்லை.

3. கூறுகளின் ஏற்ற விறக்கங்களினுல் இதன் மதிப்பு பெரிதும் பாதிக்கப்படுகின்றது.

4. ராசிகளின் கால்பகுதியை (25%) இரு முனைகளிலும் ஒதுக்கிவிட்டு, மீதி 50% ராசிகளைமட்டும் பயன்படுத்தி இப்பரவுகை அளவை கணக்கிடப்படுவதால், இது எல்லா ராசிகளின் மதிப்பையும் கொண்டு கணக்கிடப்படுவதில்லை.

5. இதன் வாய்பாடு இயற்கணித வழிமுறைகளுக்கு உட்படாததால், இதன் பயன் குறுகிய எல்லைக்குட்பட்டதாயுள்ளது

சராசரி விலக்கம் (Mean Deviation)

சிறப்பியல்புகள்

1. இது பரவலின் ஒவ்வொரு ராசியின் மதிப்பையும் எடுத்துக் கொண்டு கணக்கிடப்படுகின்றது.

2. இதனைப் பரவலின் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகள் திட்ட விலக்கத்தைவிடக் குறைவாகவே பாதிக்கின்றன.

3. சுருக்கு வழியைப் பயன்படுத்தி, இதனை ஓரளவு எளிதில் கணக்கிடலாம்.

4. தனி விலக்கங்களின் சராசரி என்ற முறையில் இதனை மக்கள், திட்ட விலக்கத்தைக்காட்டிலும், எளிதில் உணரமுடியும்.

5. முனையுறுப்புகளால் பாதிக்கப்பட்டாலும், திட்ட விலக்கத்தைவிடக் குறைவாகவே பாதிக்கப்படுகிறது. எனவேதான் இதன் மதிப்பு பெரும்பாலும் $\frac{4}{5}$ திட்டவிலக்கமாக இருக்கும்.

குறைகள்

1. சராசரி விலக்கத்தைக் கணக்கிடும்போது விலக்கங்களுக்கு உரிய நேர், எதிர்க்குறிகளைக் கருத்தில் கொள்ளாது தனி விலக்கங்களை மட்டும் எடுத்துக்கொள்வது பெருங்குறையாகக் கருதப்படுகின்றது.

2. இதனைக் கணக்கியல் வழிமுறைகளுக்கு உட்படுத்த இயலாது.

3. இது திட்ட விலக்கத்தைப்போல நிலையானது அல்ல.

4. இதனைப் பயன்பதித்திப் பரவலின் மற்றப் பண்புகளாகிய கோட்டம், தட்டை ஆகியவைகளைக் கணக்கிட இயலாது.

5. பொருளாதார புள்ளியியலைத்தவிர, இதர துறைகளில் இது அதிகம் பயன்படுவதில்லை.

6. இது திட்ட விலக்கத்தைப்போல அவ்வளவு நிலையானதல்ல

திட்ட விலக்கம் (Standard Deviation)

சிறப்பியல்புகள்

1. திட்ட விலக்கத்திற்கு நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட வாய்பாடு உள்ளது.

2. சிறந்த மையப்போக்களவையான கூட்டுச்சராசரியி லிருந்து இது பரவலின் சிதறலை அளப்பதால், இது சிறந்த பரவுகை அளவையாகிறது.

3. சுருக்கு வழியில், வசதியான ஓர் மூலத்தை எடுத்துக் கொண்டால், கணக்கிடுவது ஓரளவு எளிதாகவே உள்ளது.

4. இது பரவலின் எல்லா ராசிகளையும் எடுத்துக்கொண்டு கணக்கிடப்படுகிறது.

5. சராசரி விலக்கத்தைப்போல், இதில் விலக்கங்களின் குறிகள் புறக்கணிக்கப்படுவதில்லை.

6. இது மேன்மேலும் கணக்கியல் வழித்துறைகளுக்கு உகந்தது. இரு கூறுகளின் திட்ட விலக்கங்கள் கொடுக்கப்பட்டு இருக்கும்போது, இருகூறுகளுக்கும் பொதுவான திட்டவிலக்கம் σ, $(n_1 + n_2)\ \sigma^2 = n_1\ \sigma_1^2 + n_2\ \sigma_2^2 + n_1\ d_1^2 + n_2\ d_2^2$ என்ற வாய்பாட்டின்மூலம் கிடைத்துவிடுகிறது.

7. புள்ளியியல் ஆய்வுகளின் இறுதிவரை திட்ட விலக்கம், பெரிதும் பயன்படுகிறது. கோட்டளவை, தட்டை அளவை, இருமாறிகளுக்கு இடையே உள்ள உறவு (Correlation) போன்ற வற்றில் இது பெரிதும் கையாளப்படுகிறது. கூறுகளின் கொள்கைகள் (Theory of Sampling), சோதனைகளின் திட்ட அமைப்பு (Design of Experiments), பரவற்படி பகுப்பாய்வு (Analysis of Variance) போன்றவற்றிலும் திட்ட விலக்கம் பெரிதும் பயன்படுகிறது.

8. கூறெடுத்தல் முறைகளில் ஏற்படக்கூடிய சிறுமாறுபாடு களினால், திட்ட விலக்கம் பாதிக்கப்படுவதில்லை.

குறைகள்

1. 'வர்க்க மூல சராசரி வர்க்க விலக்கம்' (Root mean squared deviation) என்ற இதன் கருத்தைப் பாமர மக்கள் புரிந்து கொள்வது கடினம்.

2. இதனைக் கணக்கிடும்போது விலக்கங்களின் வர்க்கங்களை எடுத்துக்கொள்வதால், மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளுக்கு இது அதிக முக்கியத்துவம் தருகிறது.

3 மற்ற பரவுகை அளவைகளோடுள ஒப்பிடும்போது இதனைக் கணக்கிடுதல் கடினம்.

4. முனை உறுப்புகளின் மதிப்புக்கள் இதனைப் பெரிதும் பாதிக்கின்றன.

5. திறந்த முனைப் பிரிவுகளைக் கொண்ட பரவல்களின் சிதறல் தன்மையைச் சராசரி விலக்கத்தைப் போல, இதனாலும் அளக்க முடியாது.

6. இதனை வரைபடமூலம் காண இயலாது.

திட்ட விலக்கத்தின் பயன்கள்

1. பரவுகைக் கெழுக்களிலேயே சிறந்ததாகிய மாறுபாட்டுக் கெழு திட்ட விலக்கத்திலிருந்து பெறப்படுகின்றது. இது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பரவல்களின் சிதறல் தன்மையை ஒப்பிட உதவுகிறது.

2. விலைவாசிகள், வருமானம், சொத்து உற்பத்தி போன்ற பொருளாதார மாறிகளைக் கொண்ட பரவல்களின், கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எவ்வளவு அதிகமாக ராசிகள் சிதறியுள்ளன என்பதையறிய திட்ட விலக்கம் பயன்படுகிறது.

3. பரவல்களின் சமச்சீரற்ற தன்மை, தட்டை அளவை போன்றவற்றில் திட்ட விலக்கம் பயன்படுத்தப் படுகிறது.

4. இருமாறிகளின் உடன் தொடர்பை அறிய ஒட்டுறவுக்கெழு, உறவுக்கோடுகளில் காணப்படும் கெழுக்கள் இவற்றில் திட்ட விலக்கத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

5. இயல்நிலைப் பரவலின் பல சிறப்பியல்புகளும் திட்ட விலக்கத்தைச் சார்ந்து அமைந்துள்ளதால், கூறுகளின் ஏற்ற விறக்கப் பிழைகள் இதனைப் பெரிதும் பாதிக்காமையாலும், கூறு சோதனைகளில் இதன் பங்கு மகத்தானது.

6. பொருட்களின் தரக்கட்டுப்பாடு முறையில் $(\bar{x}, \sigma)$ கட்டுப்பாடு கோட்டுப்படம் பெரிதும் உதவுகிறது.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள்

கணக்கு

ஒரு நிகழ்வெண் பரவலிலிருந்து, 100 மாணவர்களின் சராசரி எடை 50 கி.கி. எனவும் திட்ட விலக்கம் 6 கி.கி. எனவும் கண்டறியப் பட்டது. பின்னர், 30 கி.கி. — 40 கி.கி-ன் நிகழ்வெண் 16க்குப் பதிலாக 20 எனவும் 40 கி.கி. — 50 கி.கி-ன் நிகழ்வெண் 22க்குப்

பதிலாக 18 எனவும் தவருக எடுத்துக்கொள்ளப் பட்டது எனக் கண்டறியப்பட்டது. எனவே சரியான கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் காண்க. [B. Com. 1967 S.]

தீர்வு

30 கி. கி — 40 கி. கி. ன் நடுப்புள்ளி 35

40 கி. கி — 50 கி. கி. ன் நடுப்புள்ளி 45

மேற்கண்ட பிரிவுகளின் சரியான நிகழ்வெண்கள் 16,22. அவற்றின் தவருன நிகழ்வெண்கள் 20, 18.

எனவே சரியான மொத்த எடை $= 50 \times 100 - 20 \times 35 + 16 \times 53 + 22 \times 45 - 18 \times 45.$

$= 5040$ கி. கி

$\therefore$ சரியான சராசரி எடை $= \frac{5040}{100} = \mathbf{50{\cdot}4}$ கி. கி.

நிகழ்வெண் பரவலுக்கான திட்ட விலக்கம்

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i (x_i - A)^2}{N} - (\bar{x} - A)^2}$$

$A = 0$ என எடுத்துகொண்டு, இருமடியாக்கிளுல்,

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f_i x_i^2}{100} - \bar{x}^2$$

ஆனுல், $\sigma = 6, \bar{x} = 50$

$$36 = \frac{\Sigma f_i x_i^2}{100} - 2500$$

$\therefore \quad \Sigma f_i x_i^2 = 253600.$

$\therefore$ சரியான $\Sigma f_i x_1^2 = 253600 - 20 \times 35^2 + 16 \times 35^2 - 18 \times 45^2 + 22 \times 45^2$

$= 256800$

$\therefore$ சரியான திட்டவிலக்கம் $= \sqrt{\frac{256800}{100} - (50{\cdot}4)^2}$

$= \sqrt{2568 - 2540.16}$

$\therefore \quad \sigma = 5{\cdot}27$ **கி.கி.**

1. n உறுப்புகள் உள்ள ஒரு கூறின் பரவற்படியும், கூட்டுச் சராசரியும் கணக்கிடப்படுகின்றன. x_1 என்ற மதிப்பில் பிழை உள்ளது எனக் கண்டுபிடிக்கப்பட்டு அது x_1' ஆக மாற்றப் படுகிறது. இந்தப் பிழையை நீக்குவதற்குப் பரவற் படியில் $\frac{1}{n}(x_{11} - x_1)\left(x_1' + x_1 - \frac{x_1' - x_1 + 2T}{n}\right)$ எனும் திருத்தம் தேவையானது எனக்காட்டுக. இங்கு T என்பது பழைய N உறுப் புகளின் மொத்த எண்ணிக்கை.

உறுப்புகளை $x_1, x_2, x_3, \ldots \ldots x_n$ எனக் கொள்க.

எனவே, $T = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots x_n$

$T - x_1 = x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_n$

பழைய கூட்டுச்சராசரி $= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_n}{n} = \frac{T}{n}$

புதிய கூட்டுச்சராசரி $= \frac{T - x_1 + x_1'}{n}$

பழைய பரவற்படி $= \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots x_n^2}{n} - \left(\frac{x_1 + x_2 \ldots x_n}{n}\right)^2$

$$= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2}{n} - \left(\frac{T}{n}\right)^2 \quad \ldots\ldots (1)$$

புதிய பரவற்படி $= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2}{n} - \left(\frac{T - x_1 + x_1'}{n}\right)^2 \ldots\ldots (2)$

திருத்தம் = புதிய பரவற்படி—பழைய பரவற்படி

$$= \frac{x_1'^2 - x_1^2}{n} + \left(\frac{T}{n}\right)^2 - \left(\frac{T - x_1 + x_1'}{n}\right)^2$$

$$= \frac{(x_1' - x_1)(x_1' + x_1)}{n}$$

$$+ \left(\frac{T}{n} - \frac{T - x_1 + x_1'}{n}\right)\left(\frac{T}{n} + \frac{T - x_1 + x_1'}{n}\right)$$

$$= \frac{(x_1' - x_1)(x_1' + x_1)}{n}$$

$$+ \left(\frac{x_1 - x_1'}{n}\right)\left(\frac{2T + x_1 - x_1'}{n}\right)$$

$$= \frac{x_1' - x_1}{n}\left[x_1' + x_1 - \frac{x_1' - x_1 + 2T}{n}\right].$$

2. x_1, x_2, $x_3 \ldots\ldots x_n$ என்ற ராசிகளின் வீச்சு k எனவும், அவற்றின் திட்டவிலக்கம்

$$S = \left\{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$ எனவும் இருந்தால்,

$$S \leq R\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு

x_1, x_2, $\ldots\ldots x_n$ இவற்றின் மீப்பெரு மதிப்பு x_r எனவும், x_1, $x_2 \ldots\ldots x_n$ இவற்றின் மீச்சிறு மதிப்பு x_k எனவும் எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\therefore \quad R = x_r - x_k$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n} \geq \frac{x_k + x_k + \ldots\ldots + x_k}{n}$$

$$= x_k$$

$$\therefore \quad (x_i - \bar{x})^2 \leq (x_i - x_k)^2$$

$$\therefore \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \leq \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_k)^2$$

$$\leq \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_r - x_k)^2 \right\}$$

$$= \frac{n_r^2}{n-1} \quad (\because \quad x_r - x_k = R)$$

$$\therefore \quad S \leq R \left\{ \frac{n}{n-1} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

3. ஒரு வாரத்தில், மீறு நிறுவனத்தில், திங்களிலிருந்து சனிக்கிழமை வரையுள்ள பங்குகளின் விலை விவரங்கள் தரப் பட்டுள்ளன. வீச்சையும் வீச்சுக் கெழுவையும் காண்க.

நாள்	விலை (ரூபாயில்)
திங்கள்	210
செவ்வாய்	200
புதன்	208
வியாழன்	160
வெள்ளி	220
சனி	280

தீர்வு

வீச்சு $=$ மீப்பெரு மதிப்பு — மீச்சிறு மதிப்பு

$= 280 - 160 = \mathbf{120}$

வீச்சுக்கெழு $= \dfrac{280-160}{280+160} = \dfrac{120}{440} = \mathbf{\cdot 27}$

4. 5 கணிப்புகளின் கூட்டுசராசரி 4·4 அவற்றின் பரவற்படி 8·24. 5 கணிப்புகளில், மூன்றின் மதிப்புகள் 1, 2, 6 என இருந்தால், மற்ற இரண்டின் மதிப்புகளைக் காண்க.

இரண்டு கணிப்புகளின் மதிப்பு x_1, x_2 என இருக்கட்டும். எனவே,

$$(4\cdot4)5 = (1 + 2 + 6) + x_1 + x_2$$
$$x_1 + x_2 = 22 - 9$$
$$= 13. \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$(8\cdot24)\,5 = (1 - 4\cdot4)^2 + (2 - 4\cdot4)^2 + (6 - 4\cdot4)^2 + (x_1 - 4\cdot4)^2 + (x_2 - 4\cdot4)^2$$

$$\therefore \quad x_1^2 + x_2^2 = 97$$

$$2\,(x_1^2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2$$
$$194 = 169 + (x_1 - x_2)^2$$

$$\therefore \quad x_1 - x_2 = 5$$ [நேர்க்குறி எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டது] ……… (2)

(1), (2) இவற்றிலிருந்து,

$$x_1 = 9, \; x_2 = 4$$

5. ஒரு தொழிலைச் செய்கின்ற, *A*, *B* என்ற இரு தொழிற்சாலைகளின் ஊழியர்களுக்குக் கொடுக்கப்பட்ட மாத வருமானத்தின் பகுப்பாய்வு கீழே உள்ளபடி :

	A	*B*
ஊதியம் பெறுவோரின் எண்ணிக்கை	586	648
சராசரி மாத வருமானம்	ரூ. 52·5	ரூ. 47·5
வருமானத்தின் பரவலின் மாறுபாடு (Vairance of dlstribution of wage)	100	121

(அ) *A*, *B* இவற்றில் எந்தத் தொழிற்சாலை அதிகமான தொகையை மாத வருமானமாகக் கொடுக்கிறது?

(ஆ) A, B இவற்றில் எந்தத் தொழிற்சாலையில் தொழில் வருமானத்தில் உயர்ந்த மாறுபாடு உள்ளது? [B. Com 1970 *S*]

தொழிற்சாலை A $52{\cdot}5 \times 586 = 30765$ ரூபாயை மொத்த மாத வருமானமாகத் தன் ஊழியர்களுக்கு கொடுக்கிறது.

தொழிற்சாலை B, $47{\cdot}5 \times 648 = 30780$ ரூபாயை மொத்த மாத வருமானமாகத் தன் ஊழியர்களுக்குக் கொடுக்கிறது.

எனவே தொழிற்சாலை B அதிக தொகையை வருமானமாக கொடுக்கிறது

$\bar{x}_1, \bar{x}_2$ என்பவை முறையே A, B இவற்றின் சராசரி வருமானங்கள் ஆகவும், σ_1, σ_2 என்பவை முறையே இவற்றின் திட்ட விலக்கங்கள் ஆகவும் இருக்கட்டும்.

$$A\text{-க்கு உரிய மாறுபாட்டுக் கெழு} = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100 = \frac{\sqrt{100}}{52{\cdot}5} \times 100$$

$$= 19{\cdot}05$$

$$B\text{-க்கு உரிய மாறுபாட்டுக் கெழு} = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100 = \frac{\sqrt{121}}{47{\cdot}5} \times 100$$

$$= \frac{11 \times 100}{47{\cdot}5} = 23{\cdot}16$$

எனவே B-யின் வருமானத்தில்தான் உயர்ந்த மாறுபாடு உள்ளது.

6. X, Y என்ற பங்குகளின் விலைகள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. அவற்றிலிருந்து எது தன் மதிப்பில் மிகவும் நிலையானது என காண்க.

X	55	54	52	53	56	58	52	51	49
Y	108	107	105	105	106	107	104	104	101

$A = 55,\quad B = 105$ எனக் எடுத்துக்கொள்வோம்.

$n = 9$

X	$X-A$	$(x-A)^2$	Y	$Y-B$	$(y-b)^2$
55	0	0	108	3	9
54	−1	1	107	2	4
52	−3	9	105	0	0
53	−2	4	105	0	0
56	1	1	106	1	1
58	3	9	107	2	4
52	−3	9	104	−1	1
51	−4	16	104	−1	1
49	−6	36	101	−4	16
	−15	85		2	36

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma(x-A)}{n} = 55 + \left(\frac{-15}{9}\right)$$
$$= 55 - 1 \cdot 67$$
$$= 53 \cdot 33$$

$$\sigma x^2 = \frac{\Sigma(X-A)^2}{n} - \left[\frac{\Sigma(X-A)}{n}\right]^2$$
$$= \frac{85}{9} - \left(\frac{-15}{9}\right)^2$$
$$= 9 \cdot 444 - 2 \cdot 778$$
$$= 6 \cdot 666$$

எனவே $\sigma_x = \sqrt{6 \cdot 666} = 2 \cdot 581$.

மேலும்,

$$\bar{y} = B + \frac{\Sigma y - B}{N}$$

$$= 105 + \frac{2}{9} = 105 + \cdot 22 = 105 \cdot 22$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\Sigma (y - B)^2}{N} - \left[\frac{\Sigma (y - B)}{N}\right]^2$$

$$= \frac{36}{9} - \left(\frac{2}{9}\right)^2$$

$$= 4 - 0 \cdot 049$$

$$= 3 \cdot 951$$

எனவே, $\sigma_y = \sqrt{3 \cdot 951} = 1 \cdot 988.$

x-ன் மாறுபாட்டுக் கெழு $= \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \times 100$

$$= \frac{2 \cdot 581}{53 \cdot 33} \times 100$$

$$= 4 \cdot 84$$

y-ன் மாறுபாட்டுக் கெழு $= \frac{\sigma_y}{\bar{y}} \times 100$

$$= \frac{1 \cdot 988}{105 \cdot 22} \times 100$$

$$= 1 \cdot 89$$

பங்குகளில் விலைகளின் மாற்றம் y-க்குத் தான் சிறியது. எனவே, பங்கு y, தன் மதிப்பில் மிகவும் நிலையானது.

எ.கா. m-ல் தொடங்கி, பொது வேறுபாடு d ஆக உள்ள ஒரு கூட்டுத் தொடரின் n எண்களின் மாறுபாட்டுக்கெழு காண்க.

$$\bar{x} = \frac{m + (n + d) + (m + 2d) + \ldots\ldots\ldots + m + (n-1)d}{n}$$

$$= \frac{nm + \frac{(n-1) \times nd}{2}}{n} = m + \frac{(n-1)\,d}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x_r - \bar{x})^2}{n}$$

$$= \frac{\left[m - m + \frac{(n-1)d}{2}\right]^2 \left[m + d - m + \frac{(n-1)d}{2}\right]^2 + \cdots\cdots + \left[m + (n-1)d - m + \frac{(n-1)d}{2}\right]^2}{n}$$

$$= \frac{d^2}{4n}\left[(1-n)^2 + (3-n)^2 + \cdots\cdots n \text{ உறுப்புகளுக்கு}\right]$$

$$= \frac{d^2}{4n}\left[\sum_{r=1}^{n} \{ n - (2r-1) \}^2\right]$$

$$= \frac{d^2}{4n}\left[\sum_{r=1}^{n} (n+1) - 2r\right]^2$$

$$= \frac{d^2}{4n}[n(n+1)^2 - 4(n+1)\Sigma r + 4\Sigma r^2$$

$$= \frac{d^2}{4n}\left[n(n+1)^2 - \frac{4(n+1)n(n+1)}{2} + \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \frac{d^2}{4n}\left[\frac{6n(n+1)^2 - 12n(n+1)^2 + 4n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \frac{d^2}{4n} \times \frac{1}{6}[n(n+1)\{6(n+1) - 12(n+1) + 4(2n+1)\}]$$

$$= \frac{d^2}{4n} \times \frac{1}{6}[n(n+1)\{-6n - 6 + 8n + 4\}]$$

$$= \frac{d^2}{4n} \times \frac{1}{6}n(n+1)(2n-2)$$

$$\sigma^2 = \frac{d^2}{4n} \times \frac{1}{6} n(n+1)\, 2(n-1)$$

$$= \frac{d^2}{12}(n^2-1)$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{n^2-1} \cdot d}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{மாறுபாட்டுக் கெழு} = \frac{100 \times d\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{3}\left[m + \frac{n-1}{2} d\right]}$$

$$= \frac{100\, d\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{3}\,[2m + (n-1)\,d]}$$

எ.கா. 100 ராசிகள் கொண்ட ஒரு கூறின் கூட்டுச் சராசரி 40, திட்டவிலக்கம் 5·1 என ஒரு மாணவர் கணக்கிடுகிருர். ஒரு ராசியின் மதிப்பு 40 என்பதற்குப் பதிலாக, 50 எனத் தவருக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டிருந்தால் சரியான கூட்டுச்சராசரியையும், திட்டவிலக்கத்தையும் காண்க.

தீர்வு

$$\text{கூட்டுச்சராசரி} = \frac{\Sigma x_r}{n} = \frac{\Sigma x_r}{100}$$

$$40 = \frac{\Sigma x_r}{100}$$

$$\therefore \quad \Sigma x_r = 40 \times 100 = 4000$$

ராசிகளின் சரியான மொத்த மதிப்பு $= 4000 - 50 + 40 = 3990$

$$\therefore \quad \text{சரியான கூட்டுச்சராசரி} = \frac{3990}{100} = 39{\cdot}9$$

$$\text{திட்டவிலக்கம்} = \sqrt{\frac{\Sigma x_r^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{\Sigma x_r^2}{100} - (40)^2}$$

$$\text{தவருன திட்டவிலக்கம் } 5{\cdot}1 = \sqrt{\frac{\Sigma x_r^2}{100} - 1600}$$

$$\therefore \quad 26{\cdot}01 = \frac{\Sigma x_r^2}{100} - 1600$$

$$\therefore \quad \Sigma x_r^2 = 162601$$

ராசிகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகையின் சரியான மதிப்பு

$$= 162601 - (50)^2 + (40)^2$$

$$= 162601 - 2500 + 1600 = 161701.$$

$\therefore$ சரியான திட்டவிலக்கம்

$$= \sqrt{\frac{\text{சரியான } \Sigma x_r^2}{n} - (\text{சரியான கூட்டுச்சராசரி})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{161701}{100} - (39{\cdot}9)^2}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$= 5{\cdot}0$$

எ.கா. பரவலின் இரு பகுதிகளில்

$n_1 = 100, \quad m_1 = 50, \quad \sigma_1 = 9$

$n_2 = 450, \quad m_2 = 70, \quad \sigma_2 = 7$

இரு பகுதிகளும் இணைந்த பரவலின் திட்டவிலக்கத்தையும், மாறுபாட்டுக் கெழுவினையும் கணக்கிடுக. (செ.ப. 69)

$n_1 = 100, \quad m_1 = 50, \quad \sigma_1 = 9$

$n_2 = 450, \quad m_2 = 70, \quad \sigma_2 = 7.$

$\bar{x}$, σ என்பவை முறையே இரு பகுதிகளும் இணைந்த பரவலின் கூட்டுச்சராசரி, திட்டவிலக்கமாகக் கொள்க.

$$\bar{x} = \frac{n_1 m_1 + n_2 m_2}{n_1 + n_2} = \frac{5000 + 31500}{550} = 66{\cdot}36$$

$$d_1 = 16{\cdot}36; \quad d_2 = 3{\cdot}64$$

$$550\,\sigma^2 = n_1 \sigma_1^2 + n_2 \sigma_2^2 + n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2$$

$$= (100 \times 81) + (450 \times 49) + (100 \times 267 \cdot 65) + (450 \times 12 \cdot 96)$$

$$= 62747$$

$$\sigma^2 = \frac{6274 \cdot 7}{55}$$

$$\sigma = 10 \cdot 68.$$

$$\text{மாறுபாட்டுக் கெழு} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{10 \cdot 68}{66 \cdot 36} \times 100$$

$$= 16 \cdot 10\%$$

எ.கா. ஒரு தொடர் மாறியின் நிகழ்வெண் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியும், திட்டவிலக்கமும், விலக்கங்களைப் பயன்படுத்திச் சுருக்கு முறையில் கணக்கிடப்பட்டபோது, முறையே, 135·3 பவு. 9·6 பவு. என்ற மதிப்புகளைத் தந்தன. பரவல் பின்வருமாறு தரப் பட்டுள்ளது. உண்மையான பிரிவு இடைவெளியைக் காண்க.

x	f
—4	2
—3	5
—2	8
—1	18
0	22
1	13
2	8
3	4

(I.A.S. '62)

தீர்வு

திட்டவிலக்கம் கணக்கிடுதல்

x	f	$f \cdot x$	$f \cdot x^2$
−4	2	−8	32
−3	5	−15	45
−2	8	−16	32
−1	18	−18	18
0	22	0	0
1	13	13	13
2	8	16	32
3	4	12	36
மொத்தம்	80	−16	208

$$\text{திட்டவிலக்கம்} = \sqrt{\frac{\Sigma f \cdot x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f \cdot x}{N}\right)^2} \times c$$

$$9 \cdot 6 = \sqrt{\frac{208}{80} - \left(\frac{-16}{80}\right)^2} \times c$$

$$9 \cdot 6 = \sqrt{2 \cdot 56}\, c = 1 \cdot 6\, c$$

$$\therefore \quad c = \frac{9 \cdot 6}{1 \cdot 6} = 6$$

$$\text{கூட்டுச்சராசரி} = A + \frac{\Sigma fx}{N} \times c$$

$$135 \cdot 3 = A + \frac{-16}{80} \times 6$$

$$= A - 1 \cdot 2$$

$$A = 135 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 136 \cdot 5$$

$x=0$ என்றுள்ள பிரிவின் மைய மதிப்பே A ஆகும். பிரிவு இடைவெளி 6 ஆதலாலும், மாறி தொடர்மாறி ஆதலாலும், இப்பிரிவு 136·5 — 3, 136·5 + 3 அதாவது 133.5 — 139·5 ஆகும்.

இதுபோன்றே மற்ற பிரிவு இடைவெளிகள் 133·5—139.5 க்கு மேலேயும், கீழேயும் படிப்படியாகக் கணக்கிட்டுச் சென்றால், 109·5 — 115·5, 115·5 — 121·5, 121·5 — 127·5, 127·5 — 133·5 139·5 — 145·5, 145·5 — 151·5, 151·5 — 157·5 எனக்கிடைக்கும்.

எ. கா. ஒவ்வொரு ராசியையும் (1) k ஆல் அதிகரித்தால், (2) k ஆல் குறைத்தால், (3) k ஆல் பெருக்கினால், திட்ட விலக்கம் எவ்வாறு மாறுபடுகிறது?

தீர்வு

ராசிகள் $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ என்க.

(i) k ஆல் அதிகரித்தால் ராசிகள் $x_1+k,\ x_2+k, \ldots\ x_n+k$ ஆகும்.

$$\text{கூட்டுச்சராசரி} = \frac{(x_1+k)+(x_2+k)+\cdots+(x_n+k)}{n}$$

$$= \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+k = \bar{x}+k$$

$$(x+k)\text{ன் திட்டவிலக்கம்} = \sqrt{\frac{\Sigma\,[(x+k)-(\bar{x}+k)]^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma\,(x-\bar{x})^2}{n}}$$

$$= x\text{-ன் திட்டவிலக்கம்}$$

(ii) இது போன்றே $\sigma_{x-k} = \sigma_x$ என நிறுவலாம்.

(iii) ஒவ்வொரு ராசியையும் k ஆல் பெருக்கினால்,

$$\text{கூட்டுச்சராசரி} = \frac{kx_1+kx_2+kx_3+\cdots+kx_n}{n}$$

$$= k\,\Sigma\frac{x}{n} = k\bar{x}$$

$$kx\text{-ன் திட்டவிலக்கம்} = \sqrt{\frac{\Sigma\,(kx-k\bar{x})^2}{n}}$$

$$= k\sqrt{\frac{\Sigma\,(x-\bar{x})^2}{n}} = k\,\sigma_x$$

எ.கா. a, b மாறிலிகள், M_x என்பது x-ன் கூட்டுச்சராசரி

(i) $M_{ax+b} = a M_x + b$
(ii) $\sigma_{ax+b} = a \sigma_n$
என நிறுவுக.

நிரூபணம்

(i) $M_{ax+b} = \dfrac{\Sigma (ax + b)}{n}$ (n உருப்படிகள் இருப்பதாகக் கொள்வோம்.)

$$= \frac{\Sigma ax}{n} + \frac{\Sigma b}{n} = \frac{a \Sigma x}{n} + \frac{bn}{n}$$

$= a M_{x+b}$ M_x — x ன் சராசரியைக் குறிக்கின்றது.

(ii) $\sigma_{ax+b} = a \sigma_x$ என நிறுவுக.

$$\sigma^2_{ax+b} = \Sigma (ax + b - M_{ax+b})^2/n$$

$$\sigma^2_{ax+b} = \frac{\Sigma [ax + b - (a M_x + b)]^2}{n}$$

$$= \frac{\Sigma a^2 (x - M_x)^2}{n} = a^2 \sigma_x^2$$

$$\therefore \quad \sigma_{ax+b} = a \sigma_x$$

எ. கா. முதல் n இயற்கை எண்களின் கூட்டுச்சராசரியினையும், திட்ட விலக்கத்தினையும் காண்க.

முதல் n இயற்கை எண்கள் 1, 2, 3, ... n ஆகும்.

கூட்டுச்சராசரி $= \dfrac{1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n}{n}$

$$= \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

S^2 (பூஜ்யத்தை ஒட்டி) $= \dfrac{1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2}{n}$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n}$$

$$\sigma^2 = s^2 - d^2 \qquad [d = \bar{x} - A = \bar{x} - 0 = \bar{x}]$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{(n+1)(2n-2)}{24} = \frac{(n+1)^2(n-1)}{12}$$

$$= \frac{n^2 - 1}{12}$$

எ. கா. ஒரு பரவலின் கூட்டுச்சராசரி 96 அவுன்சு. திட்ட விலக்கம் 16 அவுன்சு ; அளவுகளைப் பவுண்டில் கணக்கிட்டால் இவை எவ்வாறு மாறும் ?

ராசிகளின் மதிப்பு $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என இருக்கட்டும்.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_n}{n} = 96 \text{ அவு.}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_r - 96)^2}{n}} = 16 \text{ அவு.}$$

கணிப்புகளைப் பவுண்டில் கணக்கிட,

16 அவுன்ஸ் = 1 பவுண்டு.

$$\frac{\frac{x_1}{16} + \frac{n_2}{16} + \ldots\ldots \frac{x_n}{16}}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_n}{16n}$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{96}{16} = 6 \text{ பவுண்டு.}$$

$$\text{மேலும் } \sigma = \frac{16}{16} = 1 \text{ பவுண்டு.}$$

எ.கா. கீழ்க்கண்ட பரவலுக்குத் திட்டவிலக்கம், சராசரிகண்டு பிடி.

வகுப்பு	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
அலைவெண்	8	12	17	14	9	7	4

வகுப்பு பிரிவு இடை x_r	அலைவு எண் f_r	மையப் புள்ளி	$d_r\ x_r — A$	$f_r\, d$	$f_r\, d_r^2$	$\lvert d_r \rvert$	$(f_r \lvert d_r \rvert)$
0—10	8	5	—3	—24	72	3	24
10—20	12	15	—2	—24	48	2	24
20—30	17	25	—1	—17	17	1	17
30—40	14	35	0	0	0	0	0
40—50	9	45	1	9	9	1	9
50—60	7	55	2	14	28	2	14
60—70	4	65	3	12	36	3	12
	71			—30	210		100

கூட்டுச் சராசரி $= 35 + \dfrac{10\,(-30)}{71}$

$$= 35 - \frac{300}{71}$$

$$= 35 - 4{\cdot}225 = 30{\cdot}775$$

கூட்டுச் சராசரி 30—40 என்ற பிரிவு இடைவெளிக்குள் அடங்கியுள்ளது. ஆகவே, 35ஐ மூலப் புள்ளியாகக் கொள்ளலாம். 30·775, மையப்புள்ளிகள் 25க்கும் 35க்கும் இடையே உள்ளது.

$$\therefore\quad \Sigma f_i \mid x_i - 30{\cdot}775 \mid \;=\; \Sigma f_i \mid x_i - 35 \mid - (35 \quad 30{\cdot}775)$$
$$[8+12+17-(14+9+7+4\,]$$
$$= 1000 - (4{\cdot}2225)\,(37 - 34)$$
$$= 987{\cdot}325$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{ஆகவே கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து}\\ \text{எடுக்கப்பட்ட சராசரி விலக்கம்}\end{array}\right\} = \frac{987{\cdot}325}{71}$$

$$= 13.90$$

$$d = 35 - 30{\cdot}775$$
$$= 4{\cdot}225$$
$$s^2 = \frac{210}{71} \times 10^2 = \frac{21000}{71}$$
$$\sigma^2 = s^2 - d^2$$
$$= \frac{21000}{71} - (4{\cdot}225)^2$$
$$= 295{\cdot}7 - 17{\cdot}84$$
$$= 277{\cdot}86$$
$$\sigma = \sqrt{277{\cdot}86}$$
$$= 16{\cdot}67$$

எ.கா. ஒரு தனித்த மாறி 0, 1, 2, ... n என்ற மதிப்புகளைப் பெறுகிறது. அவைகளின் நிகழ்வெண்கள் nC_0, nC_1, nC_2, ... nC_n, என்பவற்றிற்கு விகித சமத்தில் உள்ளன. இதன் மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் காண்.

மாறியின் நிகழ்வெண்கள் முறையே,

$k\,nC_0$, $k\,nC_1$, knC_2, ... $kn\,C_n$.

இங்கு k விகித சம மாறிலி.

மொத்த நிகழ்வெண் $k\,[nC_0 + nC_1 + \ldots\ldots nC_n]$

$$= k\,(1+1)^n = k{\cdot}2^n$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f{\cdot}x}{\Sigma f} = \frac{\sum_{x=0}^{n} k{\cdot}n\,C_x{\cdot}x}{k{\cdot}2^n}$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\cdot x$$

$$= \frac{n}{2^n}\sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!}$$

$$= \frac{n}{2^n} \sum_{x=0}^{n} (n-1)\, C_{x-1}$$

$$= \frac{n}{2^n} [n-1\, C_0 + n - 1\, C_1 + \ldots\ldots n-1\, C_{n-1}]$$

$$= \frac{n}{2^n} [2^{n-1}] = \frac{n}{2}$$

S^2 (பூஜ்யத்தைப் பொறுத்து)

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{f \cdot x^2}{\Sigma f} = \sum_{r=0}^{n} \frac{k \cdot n\, C_x \cdot x^2}{k \cdot 2^n}$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum \frac{n!\, x^2}{x!\,(n-x)!}$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum \frac{n!\,[x\,(x-1) + x]}{x!\,(n-x)!}$$

$$= \frac{1}{2^n} \left[n\,(n-1) \sum \frac{(n-2)!}{(x-2)!\,(n-x)!} \right]$$

$$+ \frac{1}{2^n}\, n \cdot 2^{n-1} \left[\because \frac{\Sigma\,(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!} = 2^{n-1} \right]$$

$$= \frac{n\,(n-1)}{2^n} \sum_{x=2}^{n} (n-2)\, C_{x-2} + \frac{n}{2}$$

$$= \frac{n\,(n-1)\, 2^{n-2}}{2^n} + \frac{n}{2}$$

$$= \frac{n\,(n-1)}{4} + \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} - \frac{n}{4} = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{4}$$

$$\frac{n^2}{} + \frac{n}{}$$

$$\sigma^2 = s^2 - (\bar{x})^2 = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{4} - \frac{n^2}{4} = \frac{n}{4}$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{n}}{2}$$

மாறுபாட்டுக் கெழு $\frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

$$= \frac{100 \times \sqrt{n}}{2 \times n} \times 2 \quad = \frac{100}{\sqrt{n}}$$

எ. கா. பின்வரும் பரவலுக்குக் கால்மக் கெழுவைக் காண்க.

மைய மதிப்பு	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
நிகழ்வெண்	2	9	11	14	20	24	20	16	5	2

தீர்வு :

பிரிவு இடைவெளி = 1. எனவே,

பிரிவு இடைவெளிகள் 0·5—1·5, 1·5—2·5.........9·5—10·5 ஆகும்.

பிரிவுகளின் மேல் எல்லைகள்	வளர் நிகழ் வெண்
1·5	2
2·5	11
3·5	22
	$\frac{N}{4} = 30{\cdot}75$
4·5	36
5·5	56
6·5	80
7·5	100
8·5	116
9·5	121
10·5	123

Q_1-க்கு அடியில் $\frac{123}{4} = 30{\cdot}75$ ராசிகள் உள்ளன.

எனவே, Q_1 காணும் பிரிவு $3{\cdot}5 — 4{\cdot}5$

$$Q_1 = l + \frac{\frac{N}{4} - m}{f} \times c$$

$$= 3{\cdot}5 + \frac{30{\cdot}75 - 22}{14} \times 1 = 4{\cdot}1$$

இதுபோன்றே

$$Q_3 = l + \frac{\frac{3N}{4} - m}{f} \times c$$

Q_3-க்கு அடியில் $3 \times \frac{123}{4} = 92{\cdot}25$ ராசிகள் உள்ளதால் Q_3 காணும் பிரிவு $6{\cdot}5 — 7{\cdot}5$

$$\therefore \quad Q_3 = 6{\cdot}5 + \frac{92{\cdot}25 - 80}{14} \times 1 = 7{\cdot}1$$

$\therefore$ கால்மக் கோட்டக் கெழு $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$$= \frac{7.1 - 4.1}{7{\cdot}1 + 4{\cdot}1} = {\cdot}27$$

14. A, B என்ற இரு நகரங்களில் பொருட்களின் விலைகள் தரப்பட்டுள்ளன. மாறுபாட்டுக் கெழுக்களை ஒப்பிடுக.

(அ.ப.) 1971

A நகரில் விலை (x)	(x^2)	B நகரில் விலை y	y^2
20	400	10	100
22	484	20	400
19	361	18	324
23	529	12	144
16	256	15	225
100	2030	75	1193

$$\sigma^2 = s^2 - d^2$$

$$\sigma^2_x = \frac{\Sigma(x-A)^2}{n} - \left[\frac{\Sigma(x-A)}{n}\right]^2$$

Put $A = 0$.

$$\sigma^2_x = \frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2$$

$$\sigma^2_x = \frac{2030}{5} - \frac{10000}{25}$$

$$= \frac{10150 - 10000}{25} = \frac{150}{25} = 6.$$

$$\sigma^2_x = 6.$$

$$\sigma_x = \sqrt{6} = 2{\cdot}45$$

$$(\bar{x})^2 = \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2 = \frac{10000}{25}$$

$$\bar{x} = \frac{100}{5} = 20$$

$$\frac{\sigma_x}{\bar{x}} = \frac{2{\cdot}45}{20}$$

$$= \cdot 1225.$$

$$\sigma_y^2 = s_y^2 - d_y^2.$$

$$= \frac{\Sigma (y - B)^2}{n} - \left(\frac{\Sigma y - B}{n}\right)^2$$

Put $B = 0$.

$$\sigma_y^2 = \frac{\Sigma y^2}{n} - \left(\frac{\Sigma y}{n}\right)^2 = \frac{1193}{5} - \frac{5625}{25} = \frac{340}{25}$$

$$\sigma_y = 3{\cdot}688$$

$$\bar{y} = \frac{75}{5} = 15$$

$$= \frac{\sigma_y}{\bar{y}} = \frac{3{\cdot}688}{15} = {\cdot}2459$$

எனவே, நகர் B-யில் விலைவாசிகளில் மாறுபாடு அதிகம் உள்ளது.

பயிற்சி

1. ஒரு கிளை வங்கியில் வேலை செய்யும் தொழிலாளர்களின் மாதச் சம்பளம் பின்வருமாறு :

10, 17, 29, 95, 95, 100, 100, 175, 250, 750

இவற்றின் கூட்டுச் சராசரியையும், வீச்சையும், வீச்சுக் கெழுவையும் கணக்கிடுக.

2. எட்டு மாணவர்களின் மாதச் செலவுகள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. அவற்றின் வீச்சைக் காண்க.

40, 42, 45, 47, 50, 52, 55, 60

3. x, y இரண்டும் சார்பற்றவை: $u = ax + by$. u-ன் கூட்டுச் சராசரி, திட்டவிலக்கம் ஆகியவற்றை x, y ஆகியவற்றின் பண்பளவைகளில் காண்க. (செ.ப.)

4. கீழ்க்காணும் பரவலின் கூட்டுச்சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் காண்.

செலவு	திட்ட விலக்கம்
ரூ. 5 க்குக்கீழே	6
10 ,,	16
15 ,,	28
20 ,,	38
25 ,,	46

5. 200 மாணவர்கள் சரித்திரத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் [0 – 5, 5 – 10, 10—15 ...] என்ற பிரிவு இடைவெளிகளைக்கொண்ட நிகழ்வெண் பரவலின் மூலம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதனுடைய சராசரியும், திட்ட விலக்கமும் முறையே 40, 15. பிறகு 43 என்ற மதிப்பெண் 53 என்று எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டது என்று கண்டு பிடிக்கப்பட்டது. திருத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலின் திருத்தப் பட்ட சராசரியையும், திட்ட விலக்கத்தினையும் காண்க.

6. 27 இன்னிங் ஆட்டங்களில் பிராட்மென், பான்ஸ்போர்டு ஆகிய இரு புகழ்பெற்ற கிரிக்கெட் ஆட்டக்காரர்களின் ஓட்ட எண்ணிக்கை வருமாறு.

பிராட்மென் : 304, 244, 206, 160, 149, 140, 132, 94, 80, 62, 53, 48, 45, 42, 36, 35, 32 28, 25, 23, 20, 18, 16, 14, 10, 6, 3.

பான்ஸ் போர்டு : 281, 266, 229, 181, 125, 93, 83, 72, 64, 58, 52, 48, 46, 41, 36, 27, 21, 12, 10, 8, 8, 7 6, 5, 3, 0, 0. இவ்விரு ஆட்டக்காரர்களில் மிகையான நிலைப்புத் தன்மை உடையவர் யார்? (செ.ப.)

7. 300 தொழிலாளர்களின் சராசரி வருமானம் ரூ. 27—50. அதன் திட்ட விலக்கம் ரூ. 2·40. வேறு 500 தொழிலாளர்களின் சராசரி வருமானம் ரூ. 28·60; அதன் திட்ட விலக்கம் ரூ. 2·70 இந்த இரண்டு குழுவும் சேர்ந்த புதுக்குழுவின் சராசரி வருமானத்தையும் திட்ட விலக்கத்தினையும் காண்க.

8. 400 மாணவர்களின் சராசரி உயரம் 65·4 அங். அதன் திட்ட விலக்கம் 2·31 அங். வேறு 600 மாணவர்களைக்கொண்ட குழுவின் சராசரி உயரம் 66·6 அங். அதன் திட்ட விலக்கம் 2·34 அங்.

அவ்விரண்டு குழுக்களும் ஒன்று சேர்ந்தால் புதிய குழுவின் சராசரியினையும் திட்ட விலக்கத்தினையும் காண்க.

(விடை : $\bar{x} = 66{\cdot}12$; $\sigma = 2.4$) (செ.ப.க)

9. பின்வரும் பரவலின் கால்மானங்களையும் கால்ம விலக்கத்தினையும் காண்க.

வயது	அலைவெண்
0 − 5	1720
5 − 10	1331
10 − 15	1223
15 − 2	930
20 − 25	864
25 − 30	754
0 − 35	709
35 − 40	537

வயது	அலைவெண்
40 − 45	514
45 − 50	393
50 − 55	335
55 − 60	235
60 − 65	187
65 − 70	98
70க்கு மேல்	120

10. ஒரு பரவல் 200, 250, 300 என்ற நிகழ்வெண்களைக் கொண்டு மூன்று பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. அவற்றின் சராசரிகள் முறையே 25, 10, 15. அவற்றின் திட்ட விலக்கங்கள் முறையே 3, 4, 5. அவை மூன்றும் சேர்ந்த குழுவின் கூட்டுச் சராசரியினையும், திட்ட விலக்கத்தினையும் காண்க. மாறுபாட்டுக் கெழுவினையும் காண்க. (16, 7·2, 45)

11. கிரிக்கெட் ஆட்டத்தில், ஒருவன் தனித்தனியே ஒவ்வொரு ஆட்டத்திலுமெடுத்த ஓட்டங்கள் பின்வருமாறு: 47, 41, 50, 39, 45, 48, 42, 32, 60, 20.

இவ்வோட்டங்களின் வீச்சு, கூட்டுச்சராசரி, சராசரி விலக்கம், திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக. [வீச்சு — 40: கூ. ச, 42·4; ச. வீ, 7·6; தி. வி; 10·23.]

12. கீழ்க்காணும் பரவலின் திட்ட விலக்கத்தினைக் காண்க.

x :	0	10	20	30	40	50	60	70	80
f :	150	140	100	80	80	70	30	14	0

(1961 ஆ. ப)

13. X, Y என்ற இரண்டு மாணவர்கள் 10 தேர்வுகளில் பெற்ற மதிப்பெண்களின் விவரம் வருமாறு :

X : 58, 59, 60, 54, 65, 66, 52, 75, 69, 52

Y : 56, 87, 89, 7 , 71, 73, 84, 65, 66, 46

இவர்கள் இருவரில் எவர் அதிக நிலைப்புத் தன்மையைப் பெற்றவர்கள். (விடை : X)

14. முதல் n இயற்கை எண்களின் திட்ட விலக்கத்தினைக் காண்க.

15. கீழ்க்கண்ட பரவலுக்கு இடைநிலையையும், இடைக்கால் மான வீச்சையும் காண்க.

பிரிவு இடை வெளி :	30—34	35—39	40—44	45—49	50—54	55-59	60-64
நிகழ்வெண்	3	5	8	10	7	5	2

16. பின்வரும் விவரங்களுக்கு (i) இடைநிலைப் பரவுகைக் கெழு (ii) கூட்டுச்சராசரி பரவுகைக் கெழு இவைற்றைக் காண்க.

வயதுப் பிரிவு	நபர்களின் எண்ணிக்கை
15—20	5
20—25	9
25—30	82
30—35	58
35—40	49
40—45	28
45—50	6
50—55	3

[விடை 0·17, 0·16]

17. பின்வரும் பரவலுக்குக் கால்ம விலக்கம், சராசரி விலக்கம், திட்ட விலக்கம் காண்க. இவற்றுக்கிடையே உள்ள தொடர்புகள் இப்பரவலுக்குப் பொருந்துகின்றனவா என ஆராய்க.

பிரிவு இடைவெளி	நிகழ்வெண்
7·5—12·5	3
12·5—17·5	8
17.5—22·5	12
22.5—27·5	9
27·5—32·5	6
32.5—37·5	2
மொத்தம்	40

[விடை : திட்ட விலக்கம் 6·46, கால்ம விலக்கம் 4·76; சராசரி விலக்கம் 1·87]

18. பின்வரும் பரவலுக்குப் பொருத்தமான பரவுகைக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

வாரசம்பளம் (ரூபாயில்)	தொழிலாளரது எண்ணிக்கை.
35 ரூக்குக் குறைவாக.	14
35—37	62
38—40	99
41—43	18
43 ரூ.க்கு மேலாக	7

[விடை கால்மக் கெழு = 0·046]

19. 20 ராசிகளின் கூட்டுச்சராசரி 10 ; திட்ட விலக்கம் 2 ; மறுபடியும் சரிபார்க்கும்போது, 8 என்ற ஒரு ராசி தவருனதாக இருந்தது.

(i) தவருன ராசியை நீக்கிவிட்டு

(ii) தவருன ராசிக்குப் பதிலாக 12-ஐப் பிரதியிட்டு சராசரியையும், திட்டவிலக்கத்தையும் காண்க.

20. 25 ராசிகள் கொண்ட ஒரு தொகுதியில் கூட்டுச்சராசரி, திட்டவிலக்கம் முறையே 18, 3. 8 என்ற ஒரு ராசி தவருனது எனக் கண்டுபிடிக்கப்பட்டு அது நீக்கப்பட்டுவிட்டது. அதை நீக்கிய பிறகு தொகுதியில் கூட்டுச்சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் காண்க. தவருன ராசியின் மதிப்பு, சரியான மதிப்புடைய வேருெரு ராசியால் மாற்றப்பட்டவுடன் சரியான கூட்டுச்சராசரியும், திட்டவிலக்கமும் முறையே 20, $\sqrt{65}$ எனின் தவருன ராசிக்குப் பதிலாகப் பிரதியிடப்பட்ட சரியான ராசியின் மதிப்பைப் பெறுக.

21. ஒரு வசதியான மூலத்திலிருந்து பெறப்படும் விலக்கங்களைப் பயன்படுத்தி, ஒரு தொடர்மாறி நிகழ்வெண் பரவலின் கூட்டுச்சராசரியும், திட்டவிலக்கமும் முறையே 40·604 பவுண்டு, 7.92 பவுண்டு. உண்மையான பிரிவு இடைவெளிகளைக் காண்க.

x	f
—3	3
—2	15
—1	45
0	57
1	50
2	36
3	25
4	9

22. பின்வரும் பரவலுக்குக் கால்மான விலக்கத்தையும் திட்ட விலக்கத்தையும் கணக்கிட்டு, அவற்றிடையே உள்ள தோராயத் தொடர்பு பொருந்துகின்றதா என ஆராய்க.

IQ	குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை
55—64	3
65—74	21
75—84	78
85—94	182
95—104	305
105—114	209
115—124	81
125—134	21
155—144	5

[விடை : 8·735, 13·06]

5. விலக்கப் பெருக்குத்தொகை கோட்ட அளவைகள், தட்டை அளவைகள்

விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்
(MOMENTS)

ஓர் அலைவுப் பரவலுக்கு ஏதேனும் ஒரு மூலப்புள்ளி A-யி லிருந்து கணக்கிடப்பட்ட k-வது விலக்கப் பெருக்குத்தொகை

$$\mu_k' = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{n} f_r (x_r - A)^k,$$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

இதில் n என்பது பிரிவு இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கை. N என்பது மொத்த நிகழ்வெண்.

$K = 2$ என இருக்கும்போது, $\mu_2' = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{n} f_r \ (x_r - A)^k$

இதைநாம் s^2 என்று கூறுகிறோம்.

மூலப்புள்ளி A-யைப் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி $\bar{x}$ ஆக வைத்துக் கொண்டோமானல், கூட்டுச் சராசரியை மூலப்புள்ளி யாகக்கொண்ட விலக்கம் பெருக்குத் தொகைகள் அல்லது மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் (Central moments) கிடைக்கும். கூட்டுச்சராசரியை மூலப்புள்ளியாகக் கொண்ட K-ஆவது

விலக்கப் பெருக்குத் தொகை, ... தட்டை அளவைகள்

$$\text{விலக்கப் பெருக்குத் தொகை } \mu_k = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{n} f_r (x_r - \bar{x})^k$$

குறிப்பாக, $K = 1$ ஆக இருந்தால்,

$$\mu_1 = \frac{1}{N} \sum f_r (x_r - \bar{x}) = 0 \quad [\because \Sigma f_r (x_r - \bar{x}) = 0]$$

$$\mu_2 = \frac{1}{N} \sum f_r (x_r - \bar{x})^2$$

$$= \sigma^2 = \text{திட்ட விலக்கம்.}$$

தேற்றம்

ஒரு நிகழ்வெண் பரவலுக்கு,

$$\mu_k = \mu_k' - Kc_1 \mu'_{k-1} d + Kc_2 \cdot \mu'_{k-2} d^2 - Kc_3 \mu'_{k-3} d^3 + \ldots\ldots + (-1)^k \cdot d^k$$

இதில் μ_k என்பது கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$ லிருந்து எடுக்கப்பட்ட K-ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை ஆகும். μ_k' என்பது A என்ற மூலப்புள்ளியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட K ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை ஆகும்.

நிறுவுதல்

$$\mu_k = \frac{1}{N} \sum f_r (x_r - \bar{x})^k.$$

$$= \frac{1}{N} \sum f_r [(x_r - A) - (\bar{x} - A)]^k.$$

$d = \bar{x} - A$ ஆதலால்,

$$\mu_k = \frac{1}{N} \sum f_r [(x_r - A) - d]^k.$$

$$= \frac{1}{N} \sum f_r [(x_r - A)^k - Kc_1 (x_r - A)^{k-1} \cdot d + Kc_2 (x_r - A)^{k-2} d^2 \ldots\ldots + (-1)^k \cdot d^k.]$$

$$= \frac{1}{N} \sum f_r (x_r - A)^k - \frac{1}{N} \sum f_r (x_r - A)^{k-1} \cdot d$$

$$+ \frac{1}{N} \sum f_r (x_r - A)^{k-2} d^2 - \ldots\ldots + (-1)^k \frac{1}{N} \sum f_r d^k.$$

$$= \mu_k' - Kc_1 \mu'_{k-1} \cdot d + Kc_2 \mu'_{k-2} \cdot d^2$$
$$- Kc_3 \cdot \mu'_{k-3} \cdot d^3 + \ldots\ldots + (-1)^k d^k$$

$$\therefore \quad \mu_k = \mu_k' - Kc_1 \mu'_{k-1} \cdot d + Kc_2 \mu'_{k-2} \cdot d^2$$
$$- Kc_3 \cdot \mu'_{k-3} \cdot d^3 + \ldots\ldots + (-1)^k d^k$$

மேற்கண்ட தொடர்பில்,

$K = 1$ ஆனால், $\mu_1 = \mu_1' - d = 0$

$$\therefore \quad \mu_1' = d.$$

$K = 2$ ஆனால், $\mu_2 = \mu_2' - 2 \mu_1' \cdot d + d^2$

$$= \mu_2' - 2 d^2 + d^2 \qquad [\because \quad \mu_1' = d]$$
$$= \mu_2' - d^2$$

$K = 3$ ஆனால், $\mu_3 = \mu_3' - 3 \mu_2' d + 3 \mu_1' \cdot d^2 - d^3$

$$= \mu_3' - 3 \mu_2' d + 3 d^3 - d^3$$
$$= \mu_3' - 3 c_1 \mu_2' d + 2 d^3$$

$K = 4$ ஆனால், $\mu_4 = \mu_4' - 4 c_1 \mu_3' \cdot d + 4 c_2 \cdot \mu_2' \cdot d^2 - 4 c_3 \mu_1' \cdot d^3 + d^4$

$$= \mu_4' - 4 c_1 \mu_3' \cdot d + 4 c_2 \cdot \mu_2' \cdot d^2 - 4 d^4 + d^4$$

$$= \mu_4' - 4 \mu_3 \cdot d + 6 \mu_2 \cdot d^2 - 3 d^4.$$

குறிப்பு

பொதுத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தாமலேயே இந்நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளை நேரடியாகவும் காணலாம்.

$$\mu_1 = \frac{1}{N}\sum f_r\,(x_r - \bar{x})$$

$$= \frac{1}{N}\sum f_r\,[\,(x_r - A)-(x - A)\,]$$

$$= \frac{1}{N}\sum f_r\,(x_r - A) - \frac{1}{N}\sum f_r\,(\bar{x} - A)$$

$$= \mu_1' - d \qquad \left[\because \begin{array}{r} \Sigma f_r = N \\ \bar{x} - A = d \end{array}\right]$$

ஆனால் $\mu_1 = 0$

$\therefore \quad \mu_1' = d.$

$$\mu_2 = \frac{1}{N}\sum f_r\,(x_r - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum f_r\,[(x_r - A) - (\bar{x} - A)]^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum f_r\,(x_r - A)^2$$

$$- 2\,\frac{1}{N}\sum f_r\,(x_r - A)\,(\bar{x} - A) + \frac{1}{N}\sum f_r\,(\bar{x} - A)^2$$

$$\mu_2 = \mu_2' - 2\,\mu_1'.d + d^2$$

$$= \mu_2' - 2\,a^2 + d^2$$

$$= \mu_2' - d^2 \quad [\because \;\; \mu_1' = d]$$

$$\mu_3 = \frac{1}{N}\sum f_r\,[(x_r - \bar{x})^3$$

$$= \frac{1}{N}\sum f_r\,[(x_r - A) - (\bar{x} - A)]^3$$

$$= \frac{1}{N}\sum f_r [(x_r - A)^3$$

$$- 3\frac{1}{N}\sum f_r (x_r - A)^2 \cdot (\bar{x} - A)$$

$$+ 3 \cdot \frac{1}{N}\sum f_r (x_r - A)(\bar{x} - A)^2$$

$$- \frac{1}{N}\sum f_r (x - A)^3$$

$$= \mu_3' - 3\mu_2' d + 3\mu_1' d^2 - d^3.$$

$$= \mu_3' - 3\mu_2' d + 2 d^3. \qquad [\because \mu_1' = d]$$

$$\mu_4 = \frac{1}{N}\sum f_r (x_r - \bar{x})^4$$

$$= \frac{1}{N}\sum f_r [(x_r - A) - (\bar{x} - A)]^4.$$

$$= \frac{1}{N}\sum f_r [(x_r - A)^4$$

$$- 4\frac{1}{N}\sum f_r (x_r - A)^3 (\bar{x} - A)$$

$$+ 6\frac{1}{N}\sum f_r (x_r - A)^2 (\bar{x} - A)^2$$

$$- 4\frac{1}{N}\sum f_r (x_r - A)(\bar{x} - A)^3$$

$$+ \frac{1}{N}\sum f_r (\bar{x} - A)^4$$

$$= \mu_4' - 4\mu_3' d + 6\mu_2' d^2 - 4\mu_1' d^3 + d^4$$

$$= \mu_4' - 4\mu_3' d + 6\mu_2' d^2 - 4 d^4 + d^4$$

$$[\because \mu_1' = d]$$

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_3' d + 6\mu_2' d^2 - 3 d^4.$$

குறிப்பு : $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்ற சீர்படா விவரங்களுக்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகை காணல்.

$f_r = 1\ (r = 1, 2, \ldots\ldots n)$ என μ'_k, μ_k-க்கான வாய்பாடுகளில் பிரதியிட்டால்,

$$\mu'_k = \frac{\Sigma (x_r - A)^k}{n}$$

$$\mu_k = \frac{\Sigma (x_r - \bar{x})^k}{n}$$ என வரும்.

சார்லியரின் சரிபார்க்கும் முறை (Charlier's Check)

இந்த நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் காணும் போது, கணக்கிடுதல் மிகவும் சிக்கலாக இருப்பதால், தவறுகள் ஏற்படலாம். எனவே, நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளையும் நாம் சரியாகக் கணக்கிட்டிருக்கிறோமா என்பதை அறிய சார்லியரது சரிபார்க்கும் முறை உதவுகிறது.

$$\begin{aligned}\Sigma f_r (d_r + 1)^4 &= \Sigma f_r [d_r^4 + 4 d_r^3 + 6 d_r^2 + 4 d_r + 1] \\ &= \Sigma f_r d_r^4 + 4 \Sigma f_r d_r^3 + 6 \Sigma f_r d_r^2 \\ &\quad + 4 \Sigma f_r d_r + \Sigma f_r.\end{aligned}$$

இதில் வலப்புறத்திலுள்ள உறுப்புகள் ஏற்கெனவே கணக்கிடப்பட்டவை. எனவே, இடது புறத்தில் $\Sigma f_r (d_r + 1)^4$-ஐ மட்டும் கணக்கிடவேண்டும். மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் கணக்கிட்டவற்றைப் பிரதியிட்டு இருபுறமும் சரியாகப் பொருந்துகின்றனவா என ஆராய வேண்டும்.

நாம் கணக்கிடும் திட்ட விலக்கத்தையும்,

$$\Sigma f_r (d_r + 1)^2 = \Sigma f_r d_r^2 + 2 \Sigma f_r d_r + \Sigma f_r$$

என்ற சமன்பாடு கொண்டு சரிபார்க்கலாம்.

விவரங்களைத் தொகுப்பதால் ஏற்படும் பிழைகளுக்கு ஷெப்பர்டின் திருத்தம் (Sheppard's Corrections for Grouping)

விவரங்களை நிகழ்வெண் பரவலாகத் தொகுக்கும்பொழுதும், திட்ட விலக்கம் கண்டு பிடிக்கும் பொழுதும், ஒவ்வொரு பிரிவின் நிகழ்வெண்ணும் பிரிவு மையப் புள்ளியைச் சார்ந்து செறிந்திருப்பதாக எடுத்துக்கொள்கிறோம். அலைவுப் பரவலின் அமைப்பு சற்றேறக்குறைய சமச்சீராக இருக்குமானால் ஒற்றைப்பட விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளான μ_1, μ_3, μ_1',

μ_3 என்பவைகளைக் கணக்கிடுவதில், சராசரியின் இரு புறங்களிலும் இருந்து எடுக்கப்படும் விலக்கங்கள் நேர்ப்பிழைகளையும் (Positive errors), எதிர்ப்பிழைகளையும் (Negative errors) ஏறக்குறைய சரி சமமாகக் கொண்டு, ஒன்றையொன்று ஈடு செய்துவிடும். ஆகையால் விவரங்களைத் தொகுப்பதில் ஏற்படும் பிழைகளால் ஒற்றைப்பட விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் பாதிக்கப்படுவதில்லை ஆனால், இரட்டைப்படை விலக்கப்பெருக்குத் தொகைகளில், விலக்கங்களின் படிகள் இரட்டைப் படைகளாக இருப்பதனால் எல்லாப் பிழைகளும் நேர்ப்பிழைகளாக ஆகிவிடுகின்றன.

ஆகையால் இரட்டைப்படை விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் பிழைகளால் மிகவும் பாதிக்கப்படுகின்றன. மேலும், தொகுப்பட்ட விவரங்களுக்குகந்த இரட்டைப் படை விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள், தொகுக்கப்படாத விவரங்களிலிருந்து கணக்கிடப் பட்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளின் மதிப்புகளைவிடப் பெரியதாக இருக்கும். எனவே, தொகுப்பினால் ஏற்படும் பிழைகளைத் தவிர்ப்பதற்கு, இரட்டைப் படை விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளில் திருத்தம் செய்யப்பட வேண்டும்.

(i) நிகழ்வெண் பரவல் தொடர்பரவலாக இருக்கும்போதும்;

(ii) இரு பக்கங்களிலும் நிகழ்வெண் பூஜ்யத்தை அணுகும் போதும்,

விவரங்களைத் தொகுப்பதால் பிரிவு இடைவெளியின் மையப் புள்ளிகளில் ஏற்படும் மாற்றங்களுக்குத் திருத்தங்கள், கீழ்க் காணும் வகையில், ஷெப்பர்ட் என்பவர் தந்துள்ளார்.

$$\mu_2 \text{ (திருத்தப்பட்டது)} = \mu_2 \text{ (கணக்கிடப்பட்டது)} - \frac{1}{12} c^2$$

$$\mu_4 \text{ (திருத்தப்பட்டது)} =$$

$$\mu_4 \text{ (கணக்கிடப்பட்டது)} - \frac{1}{2} c^2 \mu_2 + \frac{7}{240} c^4$$

மொத்த நிகழ்வெண் 1000 அன்றி அதற்கும் மேற்பட்டு இருக்கும்போதும், அல்லது பிரிவு இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கை 20-க்கும் குறைவாக இருக்கும்போதும் மணி வடிவ அல்லது சிறிதளவே சமச்சீரற்ற பரவல்களுக்கும் மட்டுமே இத்திருத்தங்களைச் செய்தல் வேண்டும்.

1. பின்வரும் எண்களுக்கு, கூட்டுச் சராசரியைப் பற்றிய முதல் 4 விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் காண்க.

2, 3, 6, 9, 10.

கூட்டுச்சராசரி $= \frac{\Sigma x}{N} = \frac{2+3+6+9+10}{5} = \frac{30}{5} = 6.$

$$\mu_1 = \frac{\Sigma (x - \bar{x})}{N}$$

$$= \frac{(2-6)+(3-6)+(6-6)+(9-6)+(10-6)}{5}$$

$$= 0.$$

$$\mu_2 = \frac{\Sigma (x - \bar{x})^2}{N}$$

$$= \frac{(2-6)^2+(3-6)^2+(9-6)^2+(10-6)^2}{5}$$

$$= \frac{16+9+9+16}{5} = \frac{50}{5} = 10.$$

$$\mu_3 = \frac{\Sigma (x - \bar{x})^3}{N}$$

$$= \frac{(2-6)^3+(3-6)^3+(9-6)^3+(10-6)^3}{N}$$

$$= \frac{64-27+27-+64}{N} = 0.$$

$$\mu_4 = \frac{\Sigma (x - \bar{x})^4}{N}$$

$$= \frac{(2-6)^4+(3-6)^4+(9-6)^4+(10-6)^4}{5}$$

$$= \frac{256+81+81+256}{5}$$

$$= \frac{674}{5}$$

$$= 134{\cdot}8.$$

2. மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டிற்கு, 4-ஐ மூலமாகக் கொண்ட முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் காண்க.

$$\mu_1' = \frac{\Sigma (x - 4)}{5}$$

$$= \frac{(2 - 4) + (3 - 4) + (6 - 4) + (9 - 4) + (10 - 4)}{5}$$

$$= \frac{-2 - 1 + 2 + 5 + 6}{5} = \frac{10}{5} = 2.$$

$$\mu_2' = \frac{\Sigma (x - 4)^2}{5}$$

$$= \frac{(2 - 4)^2 + (3 - 4)^2 + (6 - 4)^2 + (9 - 4)^2 + (10 - 4)^2}{5}$$

$$= \frac{4 + 1 + 4 + 25 + 36}{5} = \frac{70}{5} = 14.$$

$$\mu_3' = \frac{\Sigma (x - 4)^3}{N}$$

$$= \frac{(2-4)^3 + (3 - 4)^3 + (6 - 4)^3 + (9 - 4)^3 + (10-4)^3}{5}$$

$$= \frac{-8 - 1 + 8 + 125 + 216}{5}$$

$$= \frac{340}{5} = 68.$$

$$\mu_4' = \frac{\Sigma (x - 4)^4}{N}$$

$$= \frac{(2-4)^4 + (3-4)^4 + (6 - 4)^4 + (9-4)^4 + (10-4)^4}{5}$$

$$= \frac{16 + 1 + 16 + 625 + 1296}{5}$$

$$= \frac{1954}{5} = 390{\cdot}8.$$

3. எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள் (1), (2) இவற்றை உபயோகித்து, விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பைச் சரிபார்க்க.

(i) $\mu_2 = \mu_2' - d^2$ (ii) $\mu_3 = \mu_3' - 3\,\mu_2\, d + 2\,d^3$

(iii) $\mu_4 = \mu_4' - 4\,\mu_3'\,d + 6\,\mu_2'\,d^2 - 3\,d^4$

எடுத்துக்காட்டு 2-லிருந்து

$d = \mu_1' = 2, \quad \mu_2' = 14, \quad \mu_3' = 68, \quad \mu_4' = 390{\cdot}8.$

$$\mu_2 = 14 - 4 = 10.$$

$$\begin{aligned}\mu_3 &= 68 - 3\,(14)\,(2) + 2\,(2)^3\\ &= 68 - 84 + 16\\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_4 &= 390{\cdot}8 - 4\,(68)\,(2) + 6\,(14)\,(4) - 3\,(16)\\ &= 390{\cdot}8 - 544 + 336 - 48\\ &= 726{\cdot}8 - 592\\ &= 134{\cdot}8.\end{aligned}$$

எ.கா. கீழ்க்கண்ட பரவலுக்கு முதல் 4 விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் காண்க.

அளவு	0—5	5—10	10—15	15—20	20—25
நிகழ்வெண்	1	2	6	7	4

மைய மதிப்பு x	f_r	$d_r = \frac{(x_r - A)}{c}$	$f_r\,d_r$	$f_r\,d_r^2$	$f_r\,d_r^3$	$f_r\,d_r^4$
2·5	1	−2	−2	4	−8	16
7·5	2	−1	−2	2	−2	2
$A \rightarrow$ 12·5	6	0	0	0	0	0
17·5	7	1	7	7	7	7
22·5	4	2	8	16	32	64
மொத்தம்	20		11	29	29	89

$$\mu_1' = \frac{\Sigma f_r d_r}{N} = \frac{11}{20} = 0{\cdot}55$$

$$\mu_2' = \frac{\Sigma f_r d_r^2}{N} = \frac{29}{20} = 1{\cdot}45$$

$$\mu_3' = \Sigma f_r d_r^3 = \frac{29}{20} = 1{\cdot}45$$

$$\mu_4' = \Sigma f_r d_r^4 = \frac{89}{20} = 4{\cdot}45$$

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2$$
$$= 1{\cdot}45 - (0{\cdot}55)^2$$
$$= 1{\cdot}45 - 0{\cdot}3025$$
$$= 1{\cdot}1475$$ (பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில்.)

$$\therefore \quad \mu_2 = 1{\cdot}1475 \times 5^2$$
$$= 1{\cdot}1475 \times 25$$
$$= 28{\cdot}6875$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\,\mu_1' + 2\,(\mu_1')^3$$
$$= 1{\cdot}45 - 3\,(1{\cdot}45)\,(0{\cdot}55) + 2\,(0{\cdot}55)^3$$
$$= 1{\cdot}45 - 2{\cdot}3925 + 0{\cdot}33275$$
$$= 0{\cdot}875250$$ (பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில்).

$$\therefore \quad \mu_3 = 0{\cdot}875250 \times 5^3$$
$$= 0{\cdot}875250 \times 125$$
$$= 109{\cdot}40625$$

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_3'\,\mu_1' + 6\mu_2'\,(\mu_1')^2 - 3(\mu_1')^4$$
$$= 4.45 - 4\,(1{\cdot}45)\,(0{\cdot}55) + 6\,(1{\cdot}45)\,(0{\cdot}55)^2 - 3\,(0{\cdot}55)^4$$
$$= 4{\cdot}45 - 3{\cdot}19 + 2{\cdot}63175 - 0{\cdot}27451875$$
$$= 3{\cdot}6172$$ (பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில்)

$$\mu_4 = 3 \cdot 6172 \times 5^4$$
$$= 3 \cdot 6172 \times 625$$
$$= 2260 \cdot 75.$$

எ. கா. கீழ்க்கண்ட அட்டவணை ஒரு பள்ளியில் படிக்கும் 480 மாணவர்களின் அறிவுக் கூர்மைக் கெழுவைத் தருகிறது.

பிரிவு மதிப்பெண் X	70	74	78	82	86	90	94	98
நிகழ்வெண்	4	9	16	28	45	66	85	72

பிரிவு மதிப்பெண் X	102	106	110	114	118	122	126
நிகழ்வெண் f	54	38	27	18	11	5	2

இதற்கு முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் காண்க. சார்லியரின் சரிபார்க்கும் முறையைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடுதலைச் சரிபார்க்கவும்.

X	d_r	f_r	$f_r d_r$	$f_r d_r^2$	$f_r d_r^3$	$f_r d_r^4$	$(d_r+1)^4$	$f_r (d_r+1)^4$
70	−6	4	−24	144	−864	5184	625	2500
74	−5	9	−45	225	−1125	5625	256	2304
78	−4	16	−64	256	−1024	4096	81	1296
82	−3	28	−84	252	−756	2268	16	448
86	−2	45	−90	180	−360	720	1	45
92	−1	66	−66	66	−66	66	0	0
$A \rightarrow 94$	0	85	0	0	0	0	1	85
9	1	72	72	72	72	72	16	1152
102	2	54	108	216	432	864	81	4374
106	3	38	114	342	1026	3078	256	9728
110	4	27	108	432	1728	6912	625	16875
114	5	18	90	450	2250	11250	1296	23328
118	6	11	66	396	2376	14256	2401	26411
122	7	5	35	245	1715	12005	4096	20480
126	8	2	16	128	1024	8192	6561	13122
மொத்தம்		480	236	3404	6428	74588		122148

$$\mu'_1 = c \cdot \frac{\Sigma f_r d_r}{N} = 4 \cdot \frac{236}{480} = 1 \cdot 9667$$

$$\mu_2' = c^2 \frac{\Sigma f_r d_r^2}{N} = 4^2 \left(\frac{3404}{480}\right) = 113 \cdot 4667$$

$$\mu_3' = c^3 \frac{\Sigma f_r d_r^3}{N} = 4^3 \left(\frac{6528}{480}\right) = 857 \cdot 0667$$

$$\mu_4' = c^4 \frac{\Sigma f_r d_r^4}{N} = 4 \left(\frac{74588}{480}\right) = 39780 \cdot 2667$$

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$$

$$= 113 \cdot 4667 - (1 \cdot 9667)^2$$

$$= 109 \cdot 5988$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2' \mu_1' + 2\mu_1'^3$$

$$= 857 \cdot 0667 - 3\,(113 \cdot 4667)\,(1 \cdot 9667) + 2\,(1 \cdot 9667)^3$$

$$= 202 \cdot 8158$$

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_3' \mu_1' + 6\mu_2' \cdot \mu_1'^2 - 3\mu_1'^4$$

$$= 39780 \cdot 2667 - 4\,(857 \cdot 0667)\,(1 \cdot 9667)$$

$$+ 6\,(113 \cdot 4667)\,(1 \cdot 9667)^2 - 3\,(1 \cdot 9667)^4$$

$$= 35,\ 627 \cdot 2853.$$

சார்லியரது சரிபார்க்கும் முறை :

$$\Sigma f_r (d + 1)^4 = \Sigma f_r d_r^4 + 4 \Sigma f_r d_r^3 + 6 \Sigma f_r d_r^2 + 4 \Sigma f_r d_r + N$$

வலது பக்கம் $= 74{,}588 + 4\,(6428) + 6\,(3404) + 4\,(236) + 480$

$$= 74{,}588 + 25{,}712 + 20{,}424 + 944 + 480$$

$$= 122148$$

$$= f_r (d_r + 1)$$

எ.கா. ஒரு தொகுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலின் பிரிவு இடைவெளி, கணக்கிடப்பட்ட திட்டவிலக்கத்தைவிட $\frac{1}{3}$ பகுதி குறைவாயுள்ளது. ஷெப்பர்டின் திருத்தம், திட்ட விலக்கத்தின் மதிப்பீட்டில் $\frac{1}{2}$ %-க்குக் குறைவான வேறுபாட்டை ஏற்படுத்துகிறது எனக் காட்டுக.

ஷெப்பர்டின் திருத்தத்திலிருந்து

μ_2 (திருத்தப்பட்டது) $= \mu_2 - \frac{h^2}{12}$

μ_2 (திருத்தப்பட்டது) $= \sigma_1^2$,

$\mu_2 = \sigma_1^2$ எனவும், பிரிவு இடைவெளி h எனவும் எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\sigma_1 = \left(\sigma^2 - \frac{h^2}{12}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sigma\left(1 - \frac{h^2}{12\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sigma\left(1 - \frac{h^2}{24\sigma^2} + \dots\right)$$

$$\therefore \quad \sigma_1 - \sigma = -\frac{h^2}{24\sigma^2}$$

$$h < \frac{1}{3}\sigma$$

$$\sigma - \sigma_1 < \frac{\sigma}{216} < \frac{\sigma}{200}$$

$$\therefore \quad \frac{\sigma - \sigma_1}{\sigma} < \frac{1}{200} = \frac{1}{2}\,\%$$

எ.கா. கூட்டுச்சராசரியை மூலமாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் மூலத்தைப் பொறுத்து மாறுவதில்லை.

ஆனால் அளவுத் திட்டத்தைப் பொறுத்து மாறுகின்றன என நிறுவுக.

$$u = \frac{x - a}{h}$$

$$x = a + uh$$

$$\bar{x} = a + \bar{u}\, h$$

$\bar{x}$, $\bar{u}$ என்பவை கூட்டுச்சராசரிகள்.

$$\left.\begin{array}{r} x_i \text{ மாறியின் } r \text{ ஆவது விலக்கப்} \\ \text{பெருக்குத் தொகை} \end{array}\right\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^r$$

$$= h^r \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i (u_i - \bar{u})^r$$

$= h^r \mu_r = h^r$ [u மாறியின் r ஆவது விலக்குப் பெருக்குத் தொகை]

எ.கா.

நிறுவுக

$$(அ) \quad \mu_r' = \sum_{j=0}^{r} rc_j \, \mu_{r-j}' \, \mu_1'^{\,j}$$

$$(ஆ) \quad \mu_r = \sum_{j=0}^{r} rc_j \, \mu'_{r-j} (-\mu_1')^j$$

தீர்வு

$x_i \;\; f_i \;\; i = 1, 2, \ldots\ldots n$ என்ற நிகழ்வெண் பரவலுக்கு,

$\mu_r'(a) = x = a$ என்ற மூலத்தை ஒட்டிய r-ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை.

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - a)^r$$

$$(x_i - a)^r = [(x_i - b) - (a - b)]^r$$
$$= [(x_i - b) - c]^r, \quad c = a - b.$$
$$= [x_i - b]^r - rc_1 [x_i - b]^{r-1} c + rc_2 (x_i - b)^{r-2} c^2 + \cdots\cdots + (-)^r c^r$$

$$= \sum_{j=0}^{r} rc_j (x_i - b)^{r-j} (-c)^j$$

$$\therefore \quad \mu_r'(a) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} \left[f_i \sum_{j=0}^{r} rc_j (x - b)^{r-j} (-c)^j \right]$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{r} rc_j (-c) j \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - b)^{r-j} \right\} \right]$$

$$\mu_r'(a) = \sum_{j=0}^{r} rc_j \, \mu'_{r-j} \, b \, (-c)^j \quad \cdots\cdots\cdots \quad I$$

$x = a$ என்ற மூலத்தை ஒட்டிய r-ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை, $x = b$ என்ற மூலத்தை ஒட்டிய r-ஆவது, அதற்குக் குறைவான விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் மூலம் தரப்படுகிறது.

குறிப்பாக $a = 0$, $b = \mu'$, $c = a - b = -\mu_1 j$

எனவே, $\mu_r' = \sum_{j=0}^{r} rc_j \, \mu'_{r-j} \, \mu_1'^j$

(ஆ) சமன்பாடு 1-ல் $a = \mu_1'$ (ஆதியை ஒட்டி) = கூட்டுச் சராசரி

$b = 0$ எனப் பிரதியிட்டால்

$$\mu_r = \sum_{j=0}^{r} rc_j \, \mu'_{r-j} (-\mu_1')^j.$$

காரணீய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் (Factorial Moments)

$x_i \mid f_i\; i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots n$ என்ற நிகழ்வெண் பரவலுக்கு. ஆதியை மூலமாகக் கொண்ட r ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

$$\mu_{(r)}' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i\, x_i^{(r)}$$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

இங்கு $x^{(r)} = x(x-1)(x-2) \ldots\ldots\ldots (x-r+1)$

$$N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

எனவே $x = a$ என்ற மூலத்தை ஒட்டிய r-ஆவது காரணீய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

$$\mu_{(r)}' = \frac{1}{N} \sum_{i} f_i\,(x_i - a)^{(r)}$$

இங்கு $(x-a)^{(r)} = (x-a)(x-a-1)\ldots\ldots(x-a-r+1)$

குறிப்பாக,

$$\mu_{(1)}' = \frac{1}{N} \Sigma f_i\, x_i = \mu_1' \text{ (ஆதியை ஒட்டி) } = \bar{x}$$

$$\mu_{(2)}' = \frac{1}{N} \sum_{i} f_i\, x_i^{(2)} = \frac{1}{N} \Sigma f_i\, x_i\,(x_i - 1)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i} f_i\, x_i^2 - \frac{1}{N} \sum_{i} f_i\, x_i$$

$$= \mu_2' - \mu_1'$$

$$\mu_{(3)}' = \frac{1}{N} \Sigma f_i\, x_i^{(3)} = \frac{1}{N} \sum_{i} f_i\, x_i\,(x_i - 1)\,(x_i - 2)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_i f_i x_i^3 - 3\frac{1}{N}\sum_i f_i x_i^2 + 2\frac{1}{N}\sum_i f_i x_i$$

$$= \mu_3' - 3\mu_2' + 2\mu_1'$$

$$\mu_{(4)}' = \frac{1}{N}\sum_i f_i x_i^{(4} = \frac{1}{N}\sum_i f_i x_i (x_i-1)(x_i-2)(x_i-3)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_i f_i x_i (x_i^3 - 6x_i^2 + 11x_i - 6)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_i f_i x_i^4 - 6\cdot\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^3 + 11\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^2 - 6\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i$$

$$= \mu_4' - 6\mu_3' + 11\mu_2' - 6\mu_1'$$

இதனை மாற்றி எழுதும்போது

$$\mu_1' = \mu_{(1)}'$$

$$\mu_2' = \mu_{(2)}'$$

$$\mu_3' = \mu_{(3)}' + 3\mu_{(2)}' + \mu_{(1)}'$$

$$\mu_4' = \mu_{(4)}' + 6\mu_{(3)}' + 7\mu_{(2)}' + \mu_{(1)},$$

தனி விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் (Absolute Moments)

$x_i \mid f_i$, $i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots n$ என்ற நிகழ்வெண் பரவலில், ஆதியை ஒட்டிய r ஆவது தனி விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

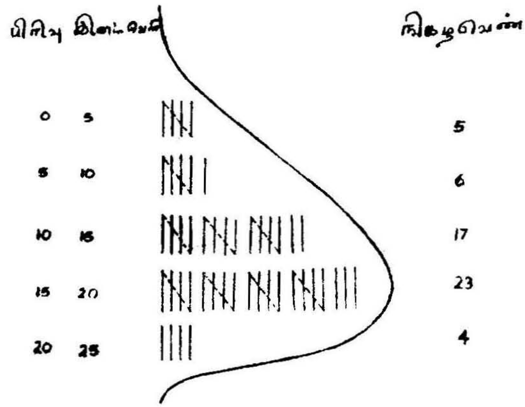
$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i \mid x_i^r \mid, \; N = \Sigma f_i$$

இங்கு $\mid x_i^r \mid$, x_i^r— தனி மதிப்பைக் குறிக்கிறது. கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$-ஐ ஒட்டிய r-ஆவது தனி விலக்கப் பெருக்குத் தொகை,

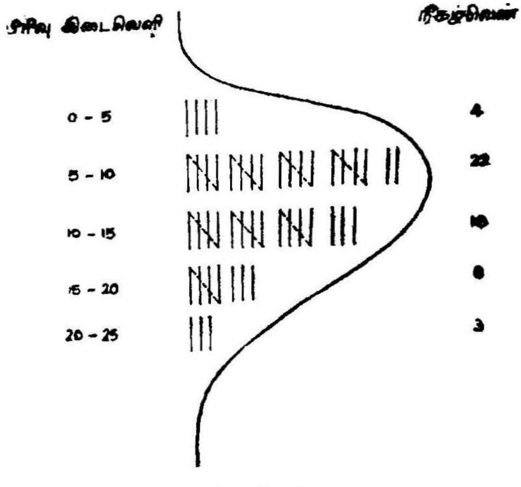
$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i \mid x_i - \bar{x} \mid^r$ என்பதனால் தரப்படுகிறது.

கோட்டம் (Skewness)

சராசரிகள் பரவலின் மையப் போக்கினையும், பரவுகை அளவைகள், மையப்போக்களவைச்சுற்றி ராசிகள் எவ்வளவு அண்மையில் அல்லது விலகிப் பரவியுள்ளன என்பதையும்



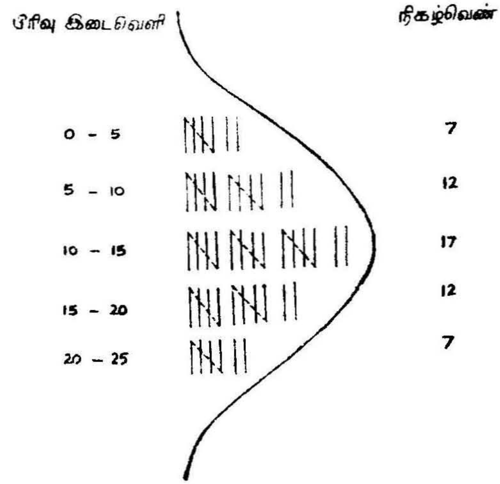
படம் 5 (அ)



படம் 5 (ஆ)

கூறுகின்றன. ராசிகள் சராசரியின் இருமருங்கிலும் சமச்சீராகப் பரவி உள்ளனவா என்பதையறிய இவை போதாது. இதனையறிய கோட்டளவைகள் (Measures of skewness) பயன்படுகின்றன.

நிகழ்வெண் பரவலின் சீரின்மையே கோட்டம் ஆகும். அப் பரவலில் ராசிகள் மீப்பெரு நிலைத்தூரத்தின் ஒரு பக்கம் மற்றொரு பக்கத்தைவிட அதிகம் சிதறியிருக்கும். ஒரே சீராக அமையும்

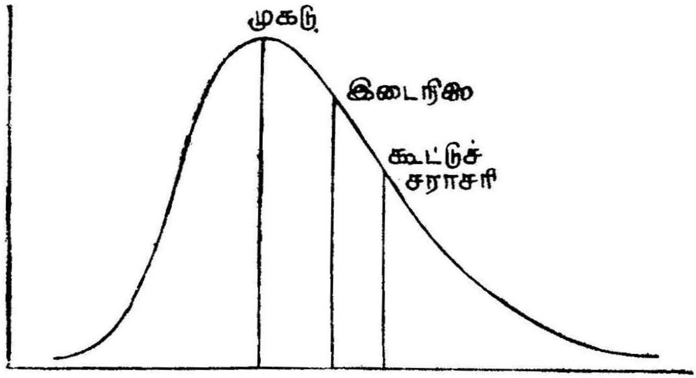


படம் 5 (இ)

நிகழ்வெண் பரவலின் வளைகோடு, உச்சிப்புள்ளியின் வழியாக வரையும் நிலைக்கோட்டின் இரு புறங்களிலும் ஒரே மாதிரியான அமைப்பைப் பெற்றிருக்கும். இதில் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகிய இம்மூன்றும் ஒன்றிய நிலையில் அமைந்திருக்கும். சமச்சீரற்ற நிகழ்வெண் வரையில் முகட்டிலிருந்து கூட்டுச் சராசரியும், இடை நிலையும் விலகி இருக்கும்.

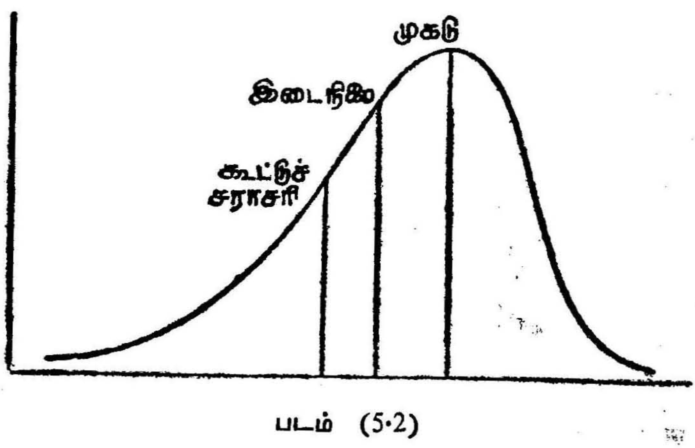
முகட்டின் வலப்புறம் ராசிகள் அதிகம் இருந்தால் அப்பொழுது அப்பரவல் நேர்க்கோட்டத்தை உடையது என்கிறோம். வலப்புறத்திலுள்ள முனை உறுப்புகள் கூட்டுச் சராசரியினை, இழுக்கும் சக்தியைப் பெற்றிருப்பதால், கூட்டுச் சராசரி முகடின் வலப் புறத்திற்கு நகர்கிறது. கூட்டுச்சராசரி பரவலின் புவிஈர்ப்புத் தானம் ஆகும். முனையுறுப்புக்கள் சிறியதாக இருந்தாலும் அவற்றின் ஈர்ப்புச் சக்தி அதிகமாகும். ஆனால், இடை நிலை தன் இருபுறம் உள்ள உறுப்புக்களின் மதிப்புகளால் கணக்கிடப்படாததால் அது அவற்றால் பாதிக்கப்படுவதில்லை. அதுதன் இருபுறம் உள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையால்தான் நிர்ணயிக்கப் படுகிறது. ஆகவே, முகட்டின் வலப்புறத்திலே அதிக உறுப்

புக்கள் இருப்பதால் இடைநிலை முகட்டிற்குச் சற்று வலப் புறம் நகர்ந்து நடுப்புள்ளி ஆகிறது. ஆகவே, நேர்க்கோட்டத்தை உடைய பரவலில், மையப் போக்களவைகள், முகடு, இடைநிலை, கூட்டுச் சராசரி என்ற வரிசையில் அமைந்திருக்கும். (படம் 5.1)



படம் (5·1)

முகட்டின் இடப்புறம் அதிக ராசிகள் இருந்தால் அப்பரவல் எதிர்க் கோட்டத்தை உடையது. இப்பரவலில் முகடு, இடைநிலை, கூட்டுச் சராசரி இவைகளின் இடங்கள் மாறுபட்டு இருக்கும்.



படம் (5·2)

அதாவது கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு என்ற வரிசையில் அவை அமைந்திருக்கும். (படம் 5.2)

கோட்டளவைகள்

பியர்சனின் கோட்டக்கெழு (Pearson's Co-efficient of Skewness)

ஒரு சமச்சீருள்ள பரவலில் கூட்டுச் சராசரி முகடு = இடைநிலை என அமைந்து இருக்கும். கோட்டத்தை அளவிடுவதற்கு (கூட்டு சராசரி—முகடு) அல்லது (கூட்டுச் சராசரி—இடைநிலை) என்ற அளவைப் பயன்படுத்தலாம். இது நேர்க்கோட்டமுள்ள பரவலுக்கு நேர்க்குறியை உடையதாகவும், எதிர்க்கோட்டமுடைய பரவலுக்கு எதிர்க்குறியை உடையதாகவும், ஒரே சீராக, அமையும் பரவலுக்கு பூஜ்யம் ஆகவும் இருக்கும். இக்கோட்டளவைகள், அளவுகளின் அலகுகளில் இருப்பதால் இரு பரவல்களின் கோட்டத்தை ஒப்பிட இது பயன்படாது இதற்கு ஒரு தனி எண் தேவை. எனவே,

$\frac{\text{கூட்டுச் சராசரி} - \text{முகடு}}{\text{திட்டவிலக்கம்}}$ என்பதை ஒரு பரவலின் கோட்டத்தை அளவிடுவதற்கு உபயோகிக்கலாம். இது பியர்சனின் கோட்டக் கெழுவாகும். வெவ்வேறு முறைகளைப் பயன்படுத்தும்போது, முகடு நமக்கு வெவ்வேறு மதிப்புகளைத் தருகிறது. எனவே,

$$\text{பியர்சனின் கோட்டக் கெழுவை, } P = \frac{\text{கூட்டுச் சராசரி} - \text{முகடு}}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$$

அல்லது $\frac{3\,(\text{கூட்டுச் சராசரி} - \text{இடை நிலை})}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$ என்றும் வரையறுக்கலாம். $P > 0$ ஆனால் பரவல் நேர்க்கோட்டம் உடையதாகவும், $P < 0$ ஆனால் பரவல், எதிர்க்கோட்டம் உடையதாகவும், அமைகிறது. ஒரே சீராக அமையும் நிகழ்வெண் பரவலில் கூட்டுச் சராசரியும், இடைநிலையும், முகடும் ஒன்றுகின்றன. எனவே, கோட்டக்கெழு P பூஜ்யம் ஆகிறது. இது ஒரு தனி எண்ணாக இருப்பதால் இந்தக் கோட்டக் கெழுவின் துணையால் நாம் இரு பரவல்களின் தன்மைகளை ஒப்பிட முடிகிறது.

பௌலியின் கால்மக் கோட்டளவை Bowley's Quartile Co-efficient of Skewness).

ஒரே சீராக அமையும் நிகழ்வெண் பரவலில் கால்மானங்கள் Q_1, Q_3 இரண்டும், இடைநிலை M-லிருந்து இருபுறமும் சம தூரத்திலுள்ளன. சமச்சீரற்ற பரவலில் $Q_3 - M \neq M - Q_1$ எனவே $(Q_3 - M) - (M - Q_1)$ என்பதை ஒரு கோட்டளவையாகக் கொள்ளலாம். இதை அலகில்லாத ஒரு தனி எண்ணாக்க,

பௌலியின் கால்மக்கோட்டக்கெழு $B = \dfrac{(Q_3 - M) - (M - Q_1)}{(Q_3 - M) + (M - Q_1)}$

$= \dfrac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$ என வரையறுக்கலாம்.

(i) சமச்சீராக அமையும் நிகழ்வெண் பரவலில்
$Q_3 - M = M - Q_1$.

$\therefore \quad B = 0$.

(ii) நேர்க்கோட்டம் உடைய பரவலில் $Q_3 - M > M - Q_1$.

$\therefore \quad B > 0$.

(iii) எதிர்க்கோட்டமுடைய பரவலில் $Q_3 - M < M - Q_1$

$\therefore \quad B \quad 0$.

மேலும் பரவல், முற்றிலும் எதிர்க்கோட்டம் பெற்றிருக்கும் போது, $Q_3 = M$ எனவே, கால்மக் கோட்டளவை,

$$B = \frac{-(M - Q_1)}{M - Q_1} = -1.$$

பரவல் முற்றிலும் நேர்க்கோட்டம் பெற்றிருக்கும் போது,
$Q_1 = M$. எனவே கால்மக் கோட்டளவை $= \dfrac{Q_3 - M}{Q_3 - M} = -1$.

$\therefore$ கால்மக்கோட்டக்கெழு -1-க்கும் $+1$-க்கும் இடையில் அமைந்துள்ளது.

மேற்கண்ட கால்மக் கோட்டளவை முனையுறுப்புகளால் பாதிக்கப்படுவதில்லை. முனையுறுப்புக்களும் ஒரு பரவலின் கோட்டத்தைப் பாதிக்கின்றன. முனையுறுப்புக்களுக்கு முக்கியத்துவம் கொடுக்கவேண்டுமானால் இந்த அளவை பயன் தராது. ஆனால், இது கணக்கிடுவதற்கு எளிமையானது.

β, γ கெழுக்கள்

விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைப் பயன்படுத்தி புள்ளியியலில் சில மாறிலிகள் வரையறுக்கப்படுகிறன. அவை,

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}; \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

$$\gamma_1 = +\sqrt{\beta_1} = \sqrt{\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}} = \left| \frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}} \right|$$

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{\mu_2^2}$$

ஒரு பரவலுக்கு $\gamma_1 > 0$ ஆக இருந்தால் நேர்க்கோட்ட மாகவும், $\gamma_1 < 0$ ஆனால் எதிர்க்கோட்டமாகவும், $\gamma_1 = 0$ என இருந்தால் கோட்ட மற்றதாகவும், பரவல் அமையும்.

இவற்றில் பகுதியும் தொகுதியும் அலகுகளின் ஒரே மாதிரியான அளவுகளைப் பெற்றிருப்பதால், இவை தனி எண்கள் ஆகும். எனவே பரவல்களை ஒப்பிட இவை பெரிதும் உதவுகின்றன.

ஓரளவே சமச்சீரற்ற பரவலுக்குப் பியர்சனின் கோட்டக் கெழுவைத் தழுவி மற்ருெரு கோட்டக்கெழு வரையறுக்கப் படுகிறது.

$$\frac{\sqrt{\beta_1} \cdot (\beta_2 + 3)}{2(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)}$$

இது கணக்கிடுவதற்குச் சிறிது கடினமாக இருப்பதால் இதை நாம் பொதுவாகப் பயன்படுத்துவதில்லை.

கோட்டத்தைக் கணக்கிடக் கூட்டுச்சராசரியில் இருந்து எடுக்கப்பட்ட நேர்எதிர் விலக்கங்களின் வேறுபாடுகளையும் கருதலாம். ஆகவே, எல்லா ஒற்றைப்பட விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளையும் ($\mu_1 = 0$, ஆதலால் இதைமட்டும் விடுத்து) கோட்ட அளவைகளாகக் கொள்ளலாம். ஆகவே $\sqrt[3]{\frac{\mu_3}{\sigma^3}} = \alpha_3$

என்பது ஒரு முழுமையான கோட்டளவையாகும். இது கால்மக் கோட்டளவையைவிட, முனையுறுப்புகளால் மிகவும் பாதிக்கப் படுகிறது.

ஓரளவு சமச்சீரற்ற பரவலில்

$$\alpha = \frac{2\,(\text{கூட்டுச்சராசரி} - \text{முகடு})}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$$

$$= 2\,(\text{பியர்சனின் கோட்ட அளவு})$$

பரவலின் சமச்சீரற்ற தன்மையை அளப்பதோடு, முகடை நிர்ணயிக்கவும் இது சில சமயங்களில் பயன்படுகிறது.

இரு நிகழ்வெண் பரவல்களின் சமச்சீரற்ற தன்மையை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவேண்டுமானுல், ஒரே மாதிரியான கோட்ட அளவையையே இரு பரவல்களுக்கும் பயன்படுத்தவேண்டும்.

கெல்லியின் கோட்டக் கெழு (Kelly's Coefficient of Skewness)

பௌலியின் கால்மக் கோட்டளவைவிட முனையுறுப்புகளுக்கு ஓரளவு முக்கியத்துவங் கொடுத்து கெல்லி (Kelly) என்பவர் கோட்டத்தை அளவிட, கீழ்க்காணும் கெழுவை வரையறுத்துள்ளார்.

$$K = \text{50-வது நூற்றுமானம்} - \left[\frac{\text{90-ஆவது நூற்றுமானம்} - \text{10-வது நூற்றுமானம்}}{2}\right]$$

அல்லது,

$$K = \text{5-வது பத்துமானம்} - \left[\frac{\text{9-வது பத்துமானம்} - \text{1-வது பத்துமானம்}}{2}\right]$$

பத்துமானங்கள், அல்லது நூற்றுமானங்கள் இவற்றைப் பயன்படுத்திக் கோட்டத்தை அளவிட இது உதவுகிறது. இருப்பினும் இது பியர்சனின் கெழுவைப்போல், நடைமுறையில் அதிகம் பயன்படுவதில்லை.

எ.கா. ஒரு சமச்சீரான பரவலில், கூட்டுச் சராசரியை ஒட்டிய எல்லா ஒற்றைப்படை விலக்கப் பெருக்குத் தொகைளும் பூஜ்யம் என நிறுவுக.

தீர்வு

ஒரு சமச்சீரான பரவலில், கூட்டுச்சராசரிக்கு இருபக்கத்திலும் நிகழ்வெண்கள் சமச்சீராகப் பரவியுள்ளன. அதாவது, கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து, சமதூரத்திலுள்ள மதிப்புகளுக்குச் சம நிகழ்வெண்கள் இருக்கும்.

x மாறியைக் குறிக்கட்டும்; $\bar{x}$ கூட்டுச்சராசரி.

$$y = x - \bar{x}$$

x_1, x_2 என்பவை $\bar{x}$ லிருந்து சமதூரத்தில் உள்ள x-ன் மதிப்புகள்.

$x_1 - \bar{x}$, $x_2 - \bar{x}$ என்பவை எண்ணளவையில் சமமாக, ஆனால் குறிகளில் மாறுபட்டவையாக உள்ளன.

இவற்றை y_1, $-y_1$ என்போம்.

பரவல் சமச்சீரானதால், y-ன் மதிப்புக்களாகிய $-y$, y_1 இவற்றிற்குச் சம நிகழ்வெண்களாக f_1 இருக்கும்.

இதுபோன்றே y-ன் மற்ற மதிப்புகள் $-y_2$, y_2, $-y_3$, y_3 ... ஆக இருக்கும.

மொத்த நிகழ்வெண் N என்க.

வரையறையின்படி,

$$\mu_{2r+1} = \frac{1}{N} \sum f (x - \bar{x})^{2r+1}$$

$$= \frac{1}{N} \sum f y^{2r+1}$$

$$= \frac{1}{N} \left\{ f_1 (y_1^{2r+1} - y_1^{2r+1}) + f_2 (y_2^{2r+1} - y_2^{2r+1}) + \ldots\ldots \right\}$$

$$= 0$$

எ.கா. ஒரு பரவலின் முதல் மூன்று விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் முறையே 1, 4, 10. மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் காண்க. பரவலின் தன்மையினை ஆராய்க.

$$\mu_1' = 1$$

$$\mu_2' = 4$$

$$\mu_3' = 10$$

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = (\mu_2') - (\mu_1')^2$$

$$= 4 - 1 = 3$$

$$\mu_3 = (\mu_3') - 3(\mu_2')(\mu_1') + 2(\mu_1')^3$$

$$= 10 - 12 + 2$$

$$= 0.$$

$\therefore \quad \beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = 0$ எனவே பரவல் சமச்சீருடையது.

(இயல்நிலைப் பரவல்).

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

(அ) திட்ட விலக்கம் 3·5 எனவும், $N = 10$, $\Sigma x = 145$ எனவும் இருக்கும்போது, மாறுபாட்டுக் கெழுவின் மதிப்பைக் காண்க.

(ஆ) கால்மானங்களுக்கு இடையுள்ள வேறுபாடு = 8

கால்மானங்களின் கூட்டுத்தொகை = 22

இடைநிலை = 10·5

இதிலிருந்து கோட்டக் கெழுவினைக் காண்க.

(இ) ஒரு தொடருக்கான சராசரி விலக்கத்தின் மதிப்பு 15. கால்மான விலக்கத்தின், தோராய மதிப்பினைக் காண்க.

தீர்வு

(அ) $\bar{x}$ என்பது கூட்டுச் சராசரியாகக் கொள்வோம்.

எனவே, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{145}{10} = 14{\cdot}5$

$$\therefore \quad \text{மாறுபாட்டுக் கெழு} = \left(\frac{\text{திட்ட விலக்கம்}}{\text{கூட்டுசராசரி}} \right) \times 100$$

$$= \frac{3{\cdot}5}{14{\cdot}5} \times 100$$

$$= \frac{3500}{145} = 24{\cdot}14\%$$

(ஆ) $Q_3 - Q_1 = 8.$

$Q_3 + Q_1 = 22.$

இடைநிலை = 10.5.

$$\therefore \quad \text{கோட்டக் கெழு} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2\,(\text{இடைநிலை})}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{22 - 21}{8} = \frac{1}{8} = 0{\cdot}125$$

(இ) திட்ட விலக்கம் σ என எடுத்துக்கொள்ளுவோம்.

எனவே சராசரி விலக்கம் $= \frac{4}{5}\sigma$

கால்மான விலக்கம் $= \frac{2}{3}\sigma$

$$\therefore \quad \frac{\text{சராசரி விலக்கம்}}{\text{கால்மான விலக்கம்}} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

$$\therefore \quad \text{கால்மான விலக்கம்} = \frac{5}{6} \times \text{சராசரி விலக்கம்} = \frac{5}{6} \times 15$$

$$= 12{\cdot}5$$

எ.கா. கீழ்க்காணும் பரவலுக்குப் பியர்ஸனின் கோட்டக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

x	3.0—3·9	4·0—4·9	5.0—5·9	6·0—6·9	7·0—7·9	8·0—8·9	9·0—9·9	10·0—10·9	11·0—11·9
f	1	7	28	78	84	45	28	7	2

x பிரிவு இடைவெளி	x_r பிரிவு நடுமதிப்பு	f_r	$x_r - A$	$f_r(\bar{x}_r - A)$	$f_r(x_r - A)^2$	வளர் நிகழ் வெண்
2·95—3·95	3·45	1	—4	—4	16	1
3·95—4·95	4·45	7	—3	—21	63	8
4·95—5·95	5·45	28	—2	—56	112	36
5·95—6·95	6·45	78	—1	—78	78	114
					← $\frac{N}{2}$	
6·95—7·95	7·45 = A	84	0	0	0	198
7·95—8·95	8·45	45	1	45	45	243
8·95—9·95	9·45	28	2	56	112	271
9·95—10·95	10·45	7	3	21	63	278
10·95—11·95	11·45	2	4	8	32	280
		280		—29	521	

$$\text{கூட்டுச்சராசரி} = A + \frac{\Sigma f_r (x_r - A)}{N} \times C$$

$$= 7{\cdot}45 - \frac{29}{280}$$

$$= 7{\cdot}3465.$$

$$\text{இடைநிலை } (M) = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \cdot C$$

$$= 6{\cdot}95 + \frac{14) - 114}{84} \times 1.$$

$$= 7{\cdot}2595$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f_r (x_r - A)^2}{N} - \left[\frac{\Sigma f_r (x_r - A)}{N}\right]^2$$

$$= \frac{521}{280} - \left(\frac{29}{280}\right)^2 = 1{\cdot}861 - {\cdot}01073$$

$$= 1{\cdot}8503$$

$$\sigma = \sqrt{1{\cdot}8503} = 1{\cdot}374$$

பியர்ஸனின் கோட்டக் கெழு

$$= \frac{3\,(\text{கூட்டுச்சராசரி} - \text{இடைநிலை})}{\text{திட்டவிலக்கம்}}$$

$$= \frac{3(7{\cdot}3465 - 7{\cdot}2595)}{1{\cdot}37}$$

$$= \frac{3\,({\cdot}0870)}{1{\cdot}37}$$

$$= {\cdot}\mathbf{1905}.$$

எ.கா. பின்வரும் பரவலுக்குக் கால்மக் கோட்டளவையைக் காண்க.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
0—10	4
10—20	8
20—30	11
30—40	15
40—50	12
50—60	6
60—70	3

மதிப்பெண்களின் மேல் எல்லை	வளர் நிகழ்வெண்
10	4
20	12
30	23
	←
40	38
50	50
60	56
70	59

$\frac{N}{2} = \frac{59}{2} = 29 \cdot 5;$

எனவே, இடைநிலைப் பிரிவு 30 — 40 ஆகும்.

$$\text{இடைநிலை} = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times C$$

$$= 30 + \frac{29 \cdot 5 - 23}{15} \times 10$$

$$= 30 + \frac{6 \cdot 5}{15} \times 10$$

$$= 34 \cdot 33.$$

$\frac{N}{4} = \frac{59}{4} = 14 \cdot 75$

$\therefore$ Q_1 காணப்படும் பிரிவு 20 — 30 ஆகும்.

$$\therefore \quad Q_1 = l + \frac{\frac{N}{4} - m}{f} \times C$$

$l = 20 : m = 12 : f = 11$

$$\therefore \quad Q_1 = 20 + \frac{14{\cdot}75 - 12}{11} \times 10$$

$$= 22{\cdot}5$$

இதுபோன்றே, $Q_3 = 40 + \dfrac{44{\cdot}25 - 38}{12} \times 10 = 45{\cdot}2$

கால்மக் கோட்டக் கெழு $= \dfrac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$

$$= \frac{45{\cdot}2 + 22{\cdot}5 - 2 \times 34{\cdot}3}{45{\cdot}2 - 22{\cdot}5}$$

$$= -\frac{{\cdot}9}{22{\cdot}7}$$

$$= -{\cdot}0397.$$

எ·கா. பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலுக்குக் கோட்டளவையைக் காண்க.

x	f
5—10	9
10—15	14
15—20	21
20—25	17
25—30	8
30—35	2
35—40	1
	72

(செ. ப. 1966)

தீர்வு

பிரிவு இடைவெளி	மைய மதிப்பு x	நிகழ் வெண் f	d	$f \cdot d$	fd^2	வளர் நிகழ் வெண்
5—10	7·5	9	—3	—27	81	9
10 15	12·5	14	—2	—28	56	23
15—20	17·5	21	—1	—21	21	44
20—25	22·5	17	0	0	0	61
25—30	27·5	8	1	8	8	69
30—35	32·5	2	2	4	8	71
35—40	37·5	1	3	3	9	72
				—61	183	

$$\text{கூட்டுச்சராசரி} = 22{\cdot}5 + \frac{5\,(-61)}{72} = 18{\cdot}264$$

$$\sigma^2 = \left[\frac{\Sigma f d^2}{N} - \left(\frac{\Sigma \cdot d}{N}\right)^2\right] \times c^2$$

$$= \left\{\frac{183}{72} - \left(\frac{(-61)}{72}\right)^2\right\} 25$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = 6{\cdot}75$

இடை நிலைப்பிரிவு = 15 —20

$$\therefore \quad \text{இடைநிலை} = 15 + \frac{5 \;\; 36 - 23)}{21}$$

$$= 15 + 3{\cdot}09 - 18{\cdot}09$$

$$\text{பியர்சன் கோட்டக்கெழு} = \frac{3\,(\text{கூட்டுச்சராசரி} - \text{இடைநிலை})}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$$

$$\frac{3\,(18{\cdot}26 - 1\;\cdot09)}{6{\cdot}75}$$

$$= {\cdot}08676$$

எ. கா. ஒரு தொழில் தகராறுக்கு முன்பும், பின்பும், ஒரு தொழிற்சாலையின் ஊதிய நிலவரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. நிர்வாகத் தரப்பிலும் தொழிலாளர் தரப்பிலும் ஏற்பட்டிருக்கக் கூடிய லாப நட்டங்களைப் பற்றி ஆராய்க. (மைசூர், 1970)

	முந்தைய நிலை	பிந்தைய நிலை
தொழிலாளரின் எண்ணிக்கை	2,400	2,350
சராசரி ஊதியங்கள் (ரூ.)	45·5	47·5
இடைநிலை ஊதியங்கள் (ரூ.)	48·0	45·0
திட்ட விலக்கம் (ரூ.)	12·0	10·0

தீர்வு:

(i) தொழில் தகராறுக்கு முன்பு தரப்பட்ட மொத்த ஊதியம் $= 2400 \times 45{\cdot}5 =$ ரூ. 1,09,200

தொழிற் தகராறுக்குப் பின்பு தரப்பட்ட மொத்த ஊதியம் $= 2350 \times 47{\cdot}5 =$ ரூ. 1,11,625

எனவே, மொத்த தொழிலாளரின் எண்ணிக்கை 2,400 லிருந்து 2350 ஆகக் குறைந்த போதிலும், மொத்த ஊதியமும், அதனால் சராசரி ஊதியமும் அதிகரித்துள்ளது; தொழிலாளர் தரப்பில் இலாபத்தைத் தருகிறது.

(ii) தகராறுக்கு முன்பு இடைநிலை ரூ. 48. பிறகு ரூ. 45. எனவே, முன்பு 50% தொழிலாளர் ரூ 48 க்குமேல் ஊதியம் பெற்று வந்தார்கள். இப்போது ரூ. 45 க்கு மேல்தான் 50% தொழிலாளர்கள் ஊதியம் பெறுகிறார்கள்.

(iii) தொழில் தகராறுக்கு முன்பு மாறுபாட்டுக் கெழு

$$C \cdot V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

$$= \frac{12}{45{\cdot}5} \times 100$$

$$= 26{\cdot}4$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{தொழில் தகராறுக்குப் பின்பு}\\ \text{மாறுபாட்டுக் கெழு}\end{array}\right\} = \frac{10}{47{\cdot}5} \times 100$$

$$= 21{\cdot}05$$

மாறுபாட்டுக் கெழுவின் மதிப்பு குறைந்துள்ளதால், ஊதியங்களின் பரவலில், காணப்படும் ஏற்றத்தாழ்வு பெரிதும் குறைந்து, ஒரே சீரான தன்மை அதிகம் காணப்படுகிறது.

(iv) தொழில் தகராறுக்கு முன்பு கோட்டளவை $= \dfrac{3\,(45{\cdot}5 - 48)}{12}$

$$= -{\cdot}625$$

தொழில் தகராறுக்குப் பின்பு கோட்டளவை $= \dfrac{3\,(47{\cdot}5 - 45)}{10}$

$$= \frac{7{\cdot}5}{10}$$

$$= {\cdot}75$$

எனவே, தகராறு தீர்ந்தபின், பரவல் நேர்க்கோட்டமுடையதாக உள்ளது. தகராறுக்கு முன்பு எதிர்க்கோட்ட முடையதாக இருந்தது. எனவே, இப்போது குறைந்த ஊதியங்கள் பெறும் தொழிலாளரது எண்ணிக்கை குறிப்பிடும் அளவு அதிகரித்திருப்பதையும், அதிக ஊதியங்கள் பெறும் தொழிலாளரது எண்ணிக்கை குறைந்திருப்பதையும் காண்கின்றோம்.

எ. கா. 51 கிலோ கிராமை ஆதியாகக் கொண்டு, 25 கல்லூரி மாணவரது எடைகளைக் கணக்கிட்டதில், $\mu_1' = -0{\cdot}4$ கி. கி. $\sqrt{\mu_2'} = 1{\cdot}2$ கி.கி., $(\mu_3')^{\frac{1}{3}} = -2{\cdot}5$ கி. கி. கூட்டுச் சராசரி, திட்டவிலக்கம், β கோட்டக் கெழு, இவற்றைக் காண்க.

(செ. ப. 1967)

$$A = 51 \text{ கி.கி.}, \qquad n = 25$$

$$\mu_1' = \frac{1}{n}\Sigma\,(x - A) = -0{\cdot}4$$

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma\,x - A}{n} = 51 + (-{\cdot}4) = \mathbf{50{\cdot}6}.$$

$$\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2$$

$$= \mu_2' - d^2 \qquad \sqrt{\mu_2'} = 1{\cdot}2$$

$$= 1{\cdot}44 - {\cdot}16 \qquad \mu_2' = 1{\cdot}44$$

$$= 1{\cdot}28 \qquad d = -{\cdot}4$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\,\mu_2\,(\mu_1') + 2\,(\mu_1')^3$$

$$= \mu_3' - 3\,\mu_2'\,d + 2d^3$$

$$= -15{\cdot}625 - 3 \times 1{\cdot}44 \times -{\cdot}4 + 2 \times -{\cdot}064$$

$$\left[\because\ (\mu_3')^{\frac{1}{3}} = -2{\cdot}5,\ \mu_3' = (-2{\cdot}5)^3 = -15{\cdot}625\right]$$

$$\mu_3 = -14{\cdot}025$$

$(\text{திட்ட விலக்கம்})^2 = \mu_2 = 1{\cdot}28$

$\therefore$ திட்ட விலக்கம் $= \mathbf{1{\cdot}132}$

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{196{\cdot}8}{2{\cdot}097} = \mathbf{93{\cdot}87}$$

எ. கா. பின்வரும் பரவலுக்கான திட்ட விலக்கத்தையும், கோட்டக் கெழுவினையும் காண்க.

மாறி	நிகழ்வெண்
0— 5	2
5—10	5
10—15	7
15—20	13
20—25	21
25—30	16
30—35	8
35—40	3
	75

இனம்	நடு மதிப்பு — x	f	d	fd	fd^2
0— 5	2·5	2	—4	—8	32
5—10	7·5	5	—3	—15	45
10—15	12·5	7	—2	—14	28
15—20	17·5	$13 = f_1$	—1	—13	13
20—25	$22{\cdot}5 = A$	21	0	0	0
25—30	27·5	$16 = f_2$	1	16	16
30—35	32·5	8	2	16	32
35—40	37·5	3	3	9	27
	மொத்தம் N	= 75		$\Sigma fd = -9$	$\Sigma fd^2 = 193$

கூட்டுச் சராசரி $= A + \dfrac{\Sigma fd}{N} \times C.$

$$= 22{\cdot}5 - \frac{9}{75} \times 5 = 22{\cdot}5 - 0{\cdot}6$$

$$= 21{\cdot}9.$$

மீப்பெரு நிகழ்வெண், 20 — 25 என்ற பிரிவினிடையில் இருப்பதால், அதுவே முகட்டுப் பிரிவாகும்.

$$\text{முகடு} = l + \frac{Cf_2}{f_1 + f_2} = 20 + \frac{5 \times 16}{13 + 16} = 20 + 2{\cdot}76$$

$$= 22{\cdot}76$$

பிரிவு அலகில் σ என்பது திட்ட விலக்கமாக இருக்குமாயின்,

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2 = \frac{193}{75} - \left(\frac{-9}{75}\right)^2$$

$= 2 \cdot 573 - 0 \cdot 014$

$= 2 \cdot 559$ (பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில்)

எனவே $\sigma = \sqrt{2 \cdot 559} \times 5 = 8$ அலகுகள்.

கார்ல் பியர்சனின் கோட்டக் கெழு $= \dfrac{\text{கூட்டுச்சராசரி} - \text{முகடு}}{\sigma}$

$$= \frac{21 \cdot 9 - 22 \cdot 76}{8} = -\frac{0 \cdot 86}{8} = -0 \cdot 11$$

எ.கா. கீழ்வரும் விவரங்கள் இரு தொகுதிகளின் பண்பளவை கணித்துத் தருகின்றன. இரு தொகுதிகளின் கோட்டளவையை ஒப்பிடுக.

	இடை நிலை	கீழ்க்கால்மானம்	மேல் கால்மானம்
தொகுதி I	24·65	18·38	30·12
தொகுதி II	29·51	20·76	42·26

(மதுரை '69)

$Q_1 = 18 \cdot 38$ $\qquad Q_3 = 30 \cdot 12$

$M = 24 \cdot 65$

தொகுதி I-ன் கால்மக் கோட்டளவை

$$= \frac{Q_1 + Q_3 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{18 \cdot 38 + 30 \cdot 12 - 2 \times 24 \cdot 65}{30 \cdot 12 - 18 \cdot 38}$$

$$= \frac{- \cdot 8}{11 \cdot 74}$$

$$= - \cdot 06813.$$

தொகுதி II-ன் கால்மக் கோட்டளவை

$$= \frac{20{\cdot}76 + 42{\cdot}26 - 2 \times 29{\cdot}51}{42{\cdot}26 - 20{\cdot}76}$$

$$= \frac{4}{21.5}$$

$$= \cdot 1861$$

தொகுதி II-க்கான பரவல் அதிகக் கோட்டமுடையது.

எ.கா. (அ) ஒரு பரவலுக்கு, கார்ல் பியர்ஸனின் கோட்டக் கெழு 0·32. அதன் திட்ட விலக்கம் 6·5. கூட்டுச்சராசரி 29·6. அப்பரவலின் இடைநிலையையும், முகடையும் காண்க.

(ஆ) மேற்கூறிய பரவலின் முகடு 24·8 ஆக இருந்தால் அதன் திட்ட விலக்கம் யாது ? [D.U.B. Com., 1960]

(அ) கார்ல் பியர்ஸனின் கோட்டக் கெழு $= \frac{\text{சராசரி} - \text{முகடு}}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$

$$0{\cdot}32 = \frac{29{\cdot}6 - \text{முகடு}}{6{\cdot}5}$$

$$\therefore \quad \text{முகடு} = -({\cdot}32)(6{\cdot}5) + 29.6$$

$$= 27{\cdot}52.$$

கார்ல் பியர்ஸனின் கோட்டக் கெழு $= \frac{3\,(\text{சராசரி} - \text{இடைநிலை})}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$

$$\therefore \quad 0{\cdot}32 = \frac{3\,(29{\cdot}6 - \text{இடைநிலை})}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$$

$$\therefore \quad \text{இடைநிலை} = 29{\cdot}6 - \frac{1}{3}(0{\cdot}32)\,(6{\cdot}5)$$

$$= 29{\cdot}6 - 0{\cdot}69 = 28{\cdot}91$$

(ஆ) கூட்டுசராசரி 29·6. முகடு = 24·8.

கார்ல்பியர்ஸனின் கோட்டக் கெழு = 0·32.

∴ திட்ட விலக்கம் பின்வருமாறு காணலாம்:

$$0{\cdot}32 = \frac{29{\cdot}6 - 24{\cdot}8}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$$

$$\text{திட்ட விலக்கம்} = \frac{4{\cdot}8}{{\cdot}32} = \frac{480}{32} = \frac{60}{4} = 15$$

எ.கா. ஷெப்பர்டின் திருத்தங்களைச் செய்தபிறகு கிடைக்கக்கூடிய γ -ன் மதிப்பைப் பின்வரும் பரவலுக்குக் காண்க.

மதிப்பெண்கள்	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70	70—80
நபர்களின் எண்ணிக்கை	15	23	35	49	32	28	12	6

மையமதிப்பு x	நிகழ்வெண் f	d	$f \cdot d$	$f \cdot d^2$	fd^3
5	15	−3	−45	135	−405
15	23	−2	−46	92	−184
25	35	−1	−35	35	−35
35	49	0	0	0	0
45	32	1	32	32	32
55	28	2	56	112	224
65	12	3	36	108	324
75	6	4	24	96	384
	200		22	610	340

$$\mu_1' = \frac{\Sigma fd}{N} \times C = \frac{22}{200} \times 10 = 1{\cdot}1$$

$$\mu_2' = \frac{\Sigma fd^2}{N} \times C^2 = \frac{610}{200} \times 100 = 305$$

$$\mu_3' = \frac{\Sigma fd^3}{N} \times C^3 = \frac{340}{200} \times 1000 = 1700$$

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = 305 - (1{\cdot}1)^2$$

$$= 303{\cdot}79$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3(\mu_2')(\mu_1') + 2(\mu_1')$$

$$= 1700 - 3(305)(1{\cdot}1) + 2(1{\cdot}1)$$

$$= 696{\cdot}162.$$

ஷெப்பர்டின் திருத்தம் செய்தபிறகு,

$$\mu_2 = \mu_2' - \frac{c^2}{12}$$

$$= 303{\cdot}79 - \frac{10^2}{12}$$

$$= 295{\cdot}46.$$

μ_3-க்குத் திருத்தம் தேவையில்லை

$$\therefore \gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = \sqrt{\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}} = \sqrt{0{\cdot}0188} = 0{\cdot}137.$$

எ.கா. 250 உயரங்களைக் கொண்ட பரவலில் கூட்டுச்சராசரி, திட்ட விலக்கம், β_1, β_2 களைக் கணக்கிட்டதில் அவை முறையே 54′, 3″, 0″, 3″ ஆகும். சரிபார்க்கும்போது மூல விவரத்திலுள்ள 64, 50 என்னும் மதிப்புகளுக்குப் பதிலாக 62, 52 எனத்தவறாக எழுதப்பட்டிருப்பது கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. சரியான பண்பளவைகளைக் கணக்கிடுக.

மாறியை x என்க.

ராசிகளின் எண்ணிக்கை $n = 250$

$$\bar{x} = 54 = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{\Sigma x}{250}$$

$$\Sigma x = 250 \times 54$$

$\therefore$ Σx-ன் சரியான மதிப்பு $= 250 \times 54 - 64 - 50 + 62 + 52$

$$= 250 \times 54$$

சரியான கூட்டுச்சராசரி $= 54$

பரவற்படி $= 9$

அதாவது $\frac{1}{N} \sum (x - \bar{x})^2 = 9$

$$\therefore \quad \Sigma (x - \bar{x})^2 = 250 \times 9$$

$$= 2250$$

திருத்தப்பட்ட $\Sigma (x - \bar{x})^2 = 2250 - (64 - 54)^2 - (50 - 54)^2 + (62 - 54)^2 + (52 - 54)^2$

$$= 2250 - 100 - 16 + 64 + 4$$

$$= 2202.$$

$\therefore$ திருத்தப்பட்ட பரவற்படி

$$= \frac{220}{250}$$

$$= \mathbf{8{\cdot}808.}$$

$$\beta_1 = 0 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$

$$\therefore \quad \mu_3 = 0$$

அதாவது $\Sigma (x - \bar{x})^3 = 0$

$\therefore$ சரியான $\Sigma (x - x)^3 = 0 - (64 - 54)^3 - (50 - 54)^3 + (62 - 54)^3 + (52 - 54)^3$

$$= 0 - 1000 + 64 + 512 - 8$$

$$= -432.$$

$$\therefore \text{ சரியான } \mu_3 = \frac{-432}{250} = -1{\cdot}728$$

$$\therefore \text{ சரியான } \beta_1 = \frac{(\text{சரியான } \mu_3)^2}{(\text{சரியான } \mu_2)^3} = \frac{(-1{\cdot}728)^2}{(8{\cdot}808)^3} = 0{\cdot}004$$

$$\beta_2 = 3 = \frac{\mu_4}{\mu_2{}^2} = \frac{\mu_4}{(9)^2}$$

$$\therefore \mu_4 = 243$$

$$\Sigma (x - \bar{x})^4 = 243 \times 250 = 60750$$

$$\therefore \text{ சரியான } \Sigma (x - \bar{x})^4 = 60750 - (64-54)^4 - (50-54)^4 + (62-54)^4 + (52-54)^4$$

$$= 60750 - 10000 - 256 + 4096 + 16$$

$$= 54606.$$

$$\therefore \text{ சரியான } \mu_4 = \frac{54606}{250} = 218{\cdot}424$$

$$\therefore \text{ சரியான } \beta_2 = \frac{\text{சரியான } \mu_4}{(\text{சரியான } \mu_2)^2} = \frac{218{\cdot}424}{(8{\cdot}808)^2}$$

$$= 2{\cdot}815$$

எனவே, சரியான கூட்டுச்சராசரி, பரவற்படி β_1, β_2 முறையே 54, 8·808, 0·004, 2·815 ஆகும்.

தட்டையளவை (Kurtosis)

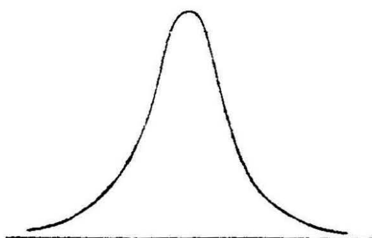
இயல்நிலை வரையோடு ஒப்பிடும்போது ஒரு நிகழ்வெண் வரையின் உச்சியின் வளைவுத் தன்மை எவ்வாறு உள்ளது என்பதைக் காண்பதே தட்டையளவை ஆகும். முகட்டிற்கு,

அருகே அமைந்துள்ள ராசிகளின் மதிப்பைப் பொறுத்து இவ் வளைவுத் தன்மை அமைகிறது. நிகழ்வெண் வரையின் படத்தை மட்டுமே பார்த்து தட்டை அளவைக் கணக்கிடுதல் இயலாது. இரு அச்சுகளிலும் அளவுத் திட்டத்தை மாற்றியமைத்து உண்மையிலேயே ஒரு தட்டையான வரையை, உச்சியில் கூரியதாகக் கூட, மாற்றிக் காட்ட இயலும். எனவே, தட்டையளவையை, கணக்கிட ஒரு தனி அளவை தேவை.

தட்டை அளவை அமைத்தல்

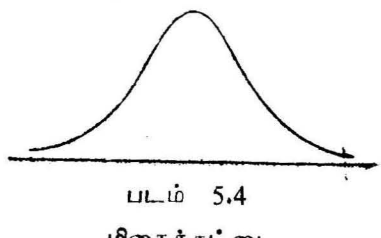
β_2-ஐ வளைவுத் தன்மையை அளப்பதற்கு உபயோகிக்கலாம். ஒரு இயல்நிலைப் பரவலில், $\beta_2 = 3$, $\beta_2 > 3$ ஆக இருந்தால், அப்பரவல் குறைத் தட்டை உடையது(leptokurtic)ஆகும். இதுஒரு இயல் நிலைப் பரவலின் வளைவைவிட மிகவும் வளைந்திருக்கும். $\beta_2 < 3$ ஆக இருந்தால், அப்பரவல் மிகைத் தட்டை (platykurtic) எனப் படும். $\gamma_2 = \beta_2 - 3$ என்பதையும், ஒரு பரவலின் வளைவுத் தன்மையை அளக்கப் பயன் படுத்தலாம். $\beta_2 - 3 = \gamma_2 > 0$. இதுகுறைத் தட்டையாக இருக்கும் பரவலுக்கு நேராகவும், மிகைத்தட்டையாக இருக்கும் பரவலுக்கு எதிராகவும், இயல்நிலைப்பரவலுக்குப் பூஜ்யமாகவும் இருக்கும். β_2 முனையுறுப்புக்கள் உட்பட எல்லா ராசிகளாலும், பாதிக்கப்படுகிறது. ஆனால்,ஒரு பரவலின் வளைவுத் தன்மை முனையுறுப்புக்களைத் தழுவாமல், உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையைச் சார்ந்தும் இருக்கவேண்டும்.

குறைத்தட்டை



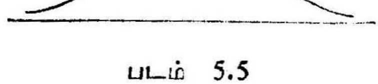
படம் 5.3

இயல் தட்டை



படம் 5.4

மிகைத்தட்டை



படம் 5.5

கால்மானத் தட்டையளவு

நூற்றுமான வீச்சைக் கால் விலக்கத்தால் வகுத்து வரும் எண்ணையும், தட்டையளவையை அளக்கப் பயன்படுத்தலாம்.

இதற்குக் கால்மத் தட்டையளவு எனலாம். இது β_2, γ_2 கெழுக்களைப் போல முனையுறுப்புக்களால் பாதிக்கப்படுவதில்லை.

$$\text{கால்மத் தட்டையளவு} = \frac{\text{நூற்றுமான வீச்சு}}{\text{கால்ம விலக்கம்}}$$

ஒரு இயல்நிலைப் பரவலில், கால்மத் தட்டையளவு 3·8 ஆகும். தட்டையளவு 3·8 ஐ விடப் பெரிதாக இருந்தால் அப்பரவல் குறைத் தட்டை ஆகும். தட்டை அளவு 3·8-ஐவிடச் சிறியதாக இருந்தால்அப்பரவல் மிகைத்தட்டையாகும். தட்டையளவையைச் சரியாக மதிப்பிட முகட்டிற்கு அருகிலும் ராசிகளின் பரவல் தன்மையையும் நாம் அறியவேண்டும். ஆனால், கால்மத் தட்டை அளவையைக் கணக்கிடும்போது இதனைக் கருதுவதில்லை. பொதுவாக, வழக்கில் இதனைப் பெருவாரியாகப் பயன்படுத்து வதில்லை.

எ. கா. பின்வரும் விவரங்கள் ஒரு கூறு அளவெடுப்பில் 250 நபர்களின் வயதுப் பரவலைத் தருகிறது. (அ) பல்வேறு கோட்டளவைகளைக் காண்க. (ஆ) பல்வேறு தட்டை அளவைகளைக் காண்க.

குறிப்பிட்ட வயதிற்குக் குறைவாக	10	20	30	40	50	60	70	80	90
நபர்களின் எண்ணிக்கை	15	35	60	84	96	127	188	200	250

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்கள் வளர் நிகழ்வெண் பரவலாக உள்ளது. முதலில் இதனை நிகழ்வெண் பரவலாக மாற்றி அமைக்கவேண்டும்.

(அ) கோட்டத்தைக் கணக்கிடப் பல்வேறு அளவைகள் பின்வருவன.

1. $\dfrac{\text{கூட்டுச்சராசரி} - \text{முகடு}}{\text{திட்டவிலக்கம்}}$

2. $\dfrac{3\,(\text{கூட்டுச் சராசரி} - \text{இடைநிலை})}{\text{திட்டவிலக்கம்}}$

3. $\dfrac{(Q_3 + Q_1 - 2\ \text{இடைநிலை})}{Q_3 - Q_1}$

4. γ_1

5. $\dfrac{\sqrt{\beta_1}\,(\beta_2 + 3)}{2\,[5\beta_2 - 6\beta_1 - 9]}$

முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் கணக்கிடுதல்.

வயது	வளர் நிகழ் வெண்	நிகழ் வெண் (f)	மைய மதிப்பு x	d	$f \cdot d$	$f d^2$	$f d^3$	$f d^4$
0—10	15	15	5	—4	—60	240	—960	3840
10—20	35	20	15	—3	—60	180	—540	1620
20—30	60	25	25	—2	—50	100	—200	400
30—40	84	24	35	—1	—24	24	— 24	24
40—50	96	12	45	0	0	0	0	0
50—60	127	31	55	1	31	31	31	31
60—70	188	61	65	2	122	244	488	976
70—80	200	12	75	3	36	108	324	972
80—90	250	50	85	4	200	800	3200	12800
மொத்தம்		250			195	1727	2319	20663

$$\mu_1' = \frac{\Sigma f d}{N} \times c = \frac{195}{200} \times 10 = 7{\cdot}8$$

$$\mu_2' = \frac{\Sigma f d^2}{N} \times c^2 = \frac{1727}{250} \times 10^2 = 690{\cdot}8$$

$$\mu_3' = \frac{\Sigma f d^3}{N} \times c^3 = \frac{2319}{250} \times 10^3 = 9276$$

$$\mu_4' = \frac{\Sigma f d^4}{N} \times c^4 = \frac{20663}{502} \times 10 = 826520$$

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = 690{\cdot}8 - (7{\cdot}8)^2 = 690{\cdot}8 - 60{\cdot}84$$
$$= \mathbf{629{\cdot}96}$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\,\mu_2'\,\mu_1' + 2\,(\mu_1')^3$$
$$= 9276 - 3\,(690{\cdot}8)\,(7{\cdot}8) + 2\,(7{\cdot}8)^3$$
$$= -\,\mathbf{5939{\cdot}616}$$

$$\mu_4 = \mu'_4 - 4\,\mu_3'\,\mu_1' + 6\,\mu_2'\,(\mu_1')^2 - 3\,(\mu_1')^4$$
$$= 826520 - 289411{\cdot}2 + 252169{\cdot}631 - 11104{\cdot}52$$
$$= \mathbf{778173{\cdot}9.}$$

கூட்டுச்சராசரி $= A + \frac{\Sigma fd}{N} \times C$

$$= 45 + \frac{195}{250} \times 10$$

$$= \mathbf{52{\cdot}8.}$$

திட்டவிலக்கம் $\sigma = \sqrt{\mu_2} = \mathbf{25{\cdot}1}$

இடைநிலைப் பிரிவு 50 — 60 (வளர் நிகழ்வெண் 125, இதில் உள்ளதால்)

இடைநிலை $= l + \dfrac{\frac{N}{2} - m}{f} \times C$

$$= 50 + \frac{125 - 36}{31} \times 10$$

$$= \mathbf{59{\cdot}35}$$

இதுபோன்றே, $Q_1 = 30 + \frac{62{\cdot}5 - 60}{24} \times 10$

$= 31{\cdot}04$

$Q_3 = 60 + \frac{1{\cdot}7{\cdot}5 - 127}{61} \times 10$

$= 69{\cdot}92$

முகட்டுப் பிரிவு 60 — 70 ; (இதில் மீப்பெரு நிகழ்வெண் காணப்படுவதால்)

$$\text{முகடு} = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times C$$

$$= 60 + \frac{61 - 31}{122 - 31 - 12} \times 10 = \mathbf{63{\cdot}8}$$

$$\beta_1 = \frac{(\mu_3)^2}{(\mu_2)^3} = \frac{(-5939{\cdot}616)^2}{(629{\cdot}96)^3}$$

$$= 0{\cdot}1411$$

$\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = \mathbf{0{\cdot}3756}$ $\left[\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}, \mu_3 \text{ எதிர்க்குறி உடையது} \right]$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{77{\cdot}173{\cdot}9}{(629{\cdot}96)^2} = 1{\cdot}961$$

கோட்ட அளவைகள்

(i) $\frac{\text{கூட்டுச்சராசரி} - \text{முகடு}}{\text{திட்டவிலக்கம்}}$

$$= \frac{52{\cdot}8 - 63{\cdot}8}{25{\cdot}1} = -0{\cdot}438$$

(ii) $\frac{3\,(\text{கூட்டுச்சராசரி} - \text{இடைநிலை})}{\text{திட்டவிலக்கம்}}$

$$= \frac{3\,(52{\cdot}\,0 - 59{\cdot}35)}{25{\cdot}1} = \frac{-19{\cdot}65}{25{\cdot}1} = -0{\cdot}783$$

(iii) $\dfrac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$

$$= \frac{69{\cdot}92 + 31{\cdot}04 - 2(59{\cdot}35)}{69{\cdot}92 - 31{\cdot}04} = -0{\cdot}456$$

(iv) $\gamma_1 = -0{\cdot}376.$

(v) $\dfrac{\sqrt{\beta_1}(\beta_2 + 3)}{2(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)} = \dfrac{0{\cdot}376(1{\cdot}961 + 3)}{2[5 \times 1{\cdot}961 - 6 \times 0{\cdot}1411 - 9]}$

$= -20{\cdot}2$

கோட்ட அளவை (v), மற்ற வழிகளில் கணக்கிடப்பட்ட அளவைகளைவிட மிகவும் வேறுபடுகிறது. இவ்வளவையைச் சிறிதளவே சமச்சீரற்ற பரவல்களுக்கே பயன்படுத்தல்வேண்டும்.

(ஆ) தட்டை அளவைகள்

(i) $\gamma_2 = \beta_2 - 3 = 1{\cdot}961 - 3 < 0$

பரவல் மிகைத்தட்டையுடையது.

(ii) நூற்றுமானத் தட்டை அளவை அல்லது கால்மானத் தட்டை அளவை

$$= \frac{P_{90} - P_{10}}{\text{கால்மான விலக்கம்}}$$

(P_{90} = 90 ஆவது நூற்றுமானம் ;
P_{10} = 10 ஆவது நூற்றுமானம்)

$$P_{10} = l + \frac{\frac{10N}{100} - m}{f} \times C$$

$$= 10 + \left[\frac{\frac{10 \times 250}{100} - 15}{20} \times 10\right]$$

$= 15$

$$P_{90} = l + \frac{\frac{90N}{100} - m}{f} \times C$$

$$= 80 + \frac{225 - 200}{50} \times 10$$

$$= \mathbf{85}$$

$$\therefore \text{ தட்டை அளவை } = \frac{85 - 15}{\frac{Q_3 - Q_1}{2}} = \frac{85 - 15}{\frac{69{\cdot}92 - 31{\cdot}04}{2}}$$

$$= \frac{70}{\frac{38{\cdot}88}{2}}$$

$$= \frac{70}{19{\cdot}44} = 3{\cdot}6 \qquad < 3$$

பரவல் மிகைத் தட்டை உடையது.

எ கா. ஒரு குறிப்பிட்ட பரவலுக்கு மூலப்புள்ளி 4 லிருந்து எடுக்கப்பட்ட முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகள் வருமாறு : — 1·5, 17, – 30, 108. இதிலிருந்து கூட்டுச்சராசரி, பரவற்படி, β_1, β_2 இவற்றைக் காண்க. இதன் தட்டை அளவைப் பற்றியும் கூறுக.

$$\mu'_1 = -1{\cdot}5 = \bar{x} - A$$

$$A = 4$$

$$-1{\cdot}5 = \bar{x} - 4$$

$$\therefore \bar{x} = \mathbf{2{\cdot}5}$$

$$\sigma^2 = \mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2$$

$$= 17 - (-1{\cdot}5)^2 = 14{\cdot}75$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{14{\cdot}75} = 3{\cdot}841.$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\,\mu_1'\,\mu_2' + 2\,\mu_1'^3$$

$$= -30 - 3\,(-1{\cdot}5)\,(17) + 2\,(-1{\cdot}5)^3$$

$$= -30 + 76{\cdot}5 - 6{\cdot}75$$

$$= 39{\cdot}75.$$

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_1'\,\mu_3' + 6\mu_1'^2\,\mu_2' - 3\mu_1'^4.$$

$$= 108 - 4\,(-1{\cdot}5)\,(-30) + 6\,(-1{\cdot}5)^2 \cdot 17 - 3\,(-1{\cdot}5)^4.$$

$= 108 - 180 + 229{\cdot}5 \quad 115{\cdot}1875$

$= 141{\cdot}3125.$

$$\text{தட்டை அளவு} = \frac{141{\cdot}3125}{(14{\cdot}75)^2} = \frac{141{\cdot}3125}{207{\cdot}5625}$$

$$= \frac{141{\cdot}3525}{207{\cdot}5625} < 3.$$

ஆகவே இப்பரவல் மிகைத்தட்டைப் பரவல் ஆகும்.

எ. கா. தொடர்பற்ற பரவல்களில் $\beta_2 > 1$ எனக் காட்டுக.

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu^2_2}$$

$\beta_2 > 1$ எனின், $\mu_4 > \mu_2^2$

$$\text{அதாவது } \frac{1}{N} \Sigma f\ (x - \bar{x})^4 > \left[\frac{1}{N} \Sigma f (x - \bar{x})^2\right]$$

$x - \bar{x} = y$ என்க.

$$\frac{1}{N} \Sigma f y^4 > \left[\frac{1}{N} \Sigma f y^2 \right]^2$$

$$N \Sigma f y^4 > [\Sigma f y^2]$$

$$(f_1 + f_2 + \dots\dots + f_n)[f_1 y_1^4 + f_2 y_2^4 + \dots\dots + f_n y_n^4] > (f_1 y_1^2 + f_2 y_2^2 + \dots\dots f_n y_n^2]^2$$

$$= \Sigma f_1^2 y_1^4 + f_1 f_2 (y_2^4 + y_1^4) + \dots\dots > \Sigma f_1^2 y_1^4 + 2 \Sigma f_1 f_2 y_1^2 y_2^2$$

$$= f_1 f_2 [y_1^2 - y_2^2]^2 + f_1 f_3 [y_1^2 - y_3^2]^2 + \dots\dots > 0.$$

எனக் காட்டவேண்டும்.

$f_1, f_2, \dots\dots f_n$ யாவும் நேர்க்குறி உடையவையாதலால், இடது பக்கத்திலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் நேர்க்குறி உடையது.

எனவே $\beta_2 > 1$.

எ. கா. 5 ஐ மூலமாகக் கொண்டு, ஒரு மாறியின் முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் 2, 20, 40, 50, கொடுக்

கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து, பரவலின் பல்வேறு தன்மைகளைப் பற்றிய பண்பளவைகளைக் காண்க.

கூட்டுச் சராசரியைப் பற்றிய 4 விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2 = 20 - 4 = 16.$$

$\mu_2 = \sigma^2$ பரவலின் சிதறல் தன்மையினை எடுத்துக் கூறுகிறது.

$$\mu_3 = \mu^{3\prime} - 3\,\mu_2'\,\mu_1' + 2\,\mu_1'^3.$$

$$= 40 - 3\,(20)\,(2) + 2\,(2)^3$$

$$= 40 - 120 + 16$$

$$= -64$$

μ_3 எதிர்க்குறி உடையதாதலால், பரவல் எதிர்க்கோட்டம் உடையது.

$$\mu_4 = \mu_4 - 4\mu_3'\,\mu_1' + 6\,\mu_2'\,\mu_1'^2 - 3\mu_1'^4.$$

$$= 50 - 4\,(40)\,(2) + 6\,(20)\,(2)^2 - 3\,(2)^4$$

$$= 50 - 320 + 480 - 48$$

$$= 530 - 368$$

$$= 162.$$

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{(-64)^2}{(16)^3} \quad 1.$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{162}{16^2} = \frac{81}{128} = 0{\cdot}63$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = 1$$

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = 0{\cdot}63 - 3 = -2{\cdot}37.$$

$\gamma_2 < 3$ எனவே பரவல் மிகைத்தட்டையுடையது.

பயிற்சி

1. ஒரு நிகழ்வெண் பரவலின் கோட்டம் என்பதனை விவரி. அதை அளவிடக் கூடிய இரு கெழுக்களைக் கூறுக. (மதுரை 1971)

2. பல்வேறு கோட்ட அளவுகளைத் தெளிவாக விளக்குக. (செ. ப. க. 1967)

3. கோட்டம் பரவுகை இவற்றின் வேறுபாடுகளைக் கூறுக. இவற்றின் பயன்கள் யாவை? (செ. ப. க. 1966)

4. (அ) குறிப்பிட்ட ஒரு மூலத்திலிருந்து கணிக்கப்பட்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் கொண்டு, கூட்டுச்சராசரியை ஆதியாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் கணக்கிடக்கூடிய வாய்பாட்டினைப் பெறுக.

(ஆ) கூட்டுச்சராசரியை ஆதியாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் முதல் நான்கினைக் கொண்டு, ஒரு பரவலின் பண்புகளை அளவிடக்கூடிய முறைகளை விளக்குக. (மதுரை 1970)

5. β_1, β_2 என்பன அலகு சார்பற்ற தனி எண்கள் எனக் காட்டுக. (செ. ப. க. 1967)

6. சிறு குறிப்பு வரைக.

(அ) கோட்டம் (மதுரை '71)

(ஆ) தட்டை அளவு (சென்னை '67)

(இ) கால்மக் கோட்டக்கெழு (சென்னை '69)

(ஈ) சீரான பரவல்கள் (மதுரை பி.எஸ்.ஸி. 1971)

7. $\beta_2 > 1$ என நிறுவுக. எப்போது $\beta_2 = 1$ ஆகும்?

8. x என்ற மாறி சமச்சீர் பரவலை உருவாக்குமானால், x^2 நேர்க்கோட்டமுடைய பரவலை உருவாக்குமென நிறுவுக.

9. ஆதியோடு இணைந்த முதல் 3 விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் வருமாறு :

$$\mu_1' = \frac{n+1}{2}, \quad \mu_2' = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$\mu_3' = \dfrac{n(n+1)^2}{4}$ எனில் புள்ளி விவரத்தின் கோட்டத்தினை ஆராய்க.

10. பின்வரும் பரவலுக்குப் பியர்ஸனின் கோட்டளவையைக் காண்க.

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
f	150	140	100	80	80	70	30	14	0

[விடை : 0·75]

11. பின்வரும் எண்களுக்கு முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் காண்க.

4, 7, 5, 9, 8, 3, 6 [விடை : 6, 40, 28, 2188]

12. $a, a+d, a+2d \ldots a+(n-1)d$ எனக் கூட்டுத் தொடரில் அமைந்திருக்கும் எண்களுக்கு $\mu_1 = 0$,
$\mu_2 = \frac{1}{12}(n^2-1)d^2$, $\mu_3 = 0$, $\mu_4 = \frac{1}{240}(n^2-1)(3n^2-7)d^4$
என நிறுவுக.

13. 3—ஐ மூலப் புள்ளியாகக் கொண்டு கணக்கிடப்பட்ட முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் —2, 10, —25, 50

(i) கூட்டுச்சராசரியை (ii) 5—ஐ (iii) பூஜ்யத்தை மூலமாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் யாவை?

[விடை : (i) 0, 6, 19, 42

(ii) −4, 22, 117, 560

(iii) 1, 7, 38, 74]

14. பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலுக்கு முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் காண்க.

x	12	14	16	18	20	22
f	1	4	6	10	7	2

[விடை : $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 5{\cdot}773$,

$\mu_3 = -{\cdot}5920$, $\mu_4 = 87{\cdot}3125$]

15. பின்வரும் பரவலுக்கு, பியர்ஸனின் கோட்டக் கெழுவைக் காண்க.

x	f
300— 400	14
400— 500	46
500— 600	58
600— 700	76
700— 800	68
800— 900	62
900—1000	48
1000—1100	22
1100—1200	6

(விடை : 0·61)

16. கீழ்க்காணும் பரவலின் கால்மக் கோட்டளவையைக் காண்க.

மையமதிப்பு	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
நிகழ்வெண்	2	9	11	14	20	24	20	16	5	2

(விடை : 0·7)

17. பின்வரும் விவரங்களுக்குக் கால்மக் கோட்டளவையைக் காண்க.

மையமதிப்பு	நிகழ்வெண்
8	4
12	8
16	10
20	6
24	4
28	2
33	8

[விடை: 3.3]

18. பின்வரும் விவரங்களுக்குக் கோட்டளவையைக் காண்க.

குறிப்பிட்ட மதிப்பெண்களுக்கு மேலே	0	10	20	30	40	50	60	70	80
நிகழ்வெண்	150	140	100	80	80	70	30	14	0

[விடை : ·36]

19. பின்வரும் பரவலின் நூற்றுமானத் தட்டையளவைக் காண்க,

x	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40
f	2	5	7	13	21	16	8	3

[விடை : 4·06]

20. நகரம் A-யிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்பட்ட 101 நபர்களின் வாராந்திர சம்பளங்களின் சராசரி ரூ. 100 திட்ட விலக்கம் ரூ. 30.

மற்றொரு நகரம் B-யிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட வாராந்திர சம்பளங்களின் பரவல் வருமாறு :

வருமானம் (ரூபாயில்)	நபர்களின் எண்ணிக்கை
40—50	7
50—60	9
60—70	10
70—80	30
80—90	20
90—100	6

(அ) எந்த நகரத்தில் வருமானங்களின் பரவல் அதிக மாறுபாடு உடையது ?

(ஆ) கோட்டம் எத்தகையது ?

21. ஒரு பரவலுக்கு, 2-லிருந்து எடுக்கப்பட்ட முதல் மூன்று விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் 1, 16, — 40. இதிலிருந்து

கூட்டுச்சராசரி = 3, பரவற்படி = 15, μ_3 = − 86 எனக்காட்டு. மேலும், x = 0 விலிருந்து, எடுக்கப்பட்ட முதல் மூன்று விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் 3, 24, 76 எனக் காட்டுக.

22. 5-லிருந்து எடுக்கப்பட்ட முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் 2, 20, 40, 50 ஆகும். இதிலிருந்து கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக.

கூட்டுச்சராசரி = 7, பரவற்படி = 16, μ_3 = − 64, μ_4 = 162

23. 1000 மாணவர்களின் உயரங்களுக்கான பரவலின் கூட்டுச்சராசரி 60. கூட்டுச்சராசரியோடு இணைந்த இரண்டாவது, மூன்றுவது, நான்காவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் முறையே 10, 32, 195 ஆகும். தேவையான கெழுக்களைக் கணக்கிட்டு, பரவலின் முக்கியத்தன்மைகளை விளக்குக.

24. பின்வரும் பரவலின் கால்மக் கோட்டக் கெழுவையும், நூற்றுமானத் தட்டையளவையையும் கணக்கிடுக.

உயரம் (செ.மீ.-ல்)	65	66	67	68	69	70	71	72	73
செடிகளின் எண்ணிக்கை	1	4	5	7	11	10	6	4	2

[விடை : கால்மக் கோட்டக் கெழு — 0·057
நூற்றுமானத் தட்டையளவு = 4·05]

25. பின்வரும் பரவலுக்குக் கூட்டுச்சராசரியை மூலமாகக் கொண்ட முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளையும், β_1, β_2 இவற்றையும் கணக்கிடுக.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f	1	6	13	25	30	22	9	5	2

[விடை : $\mu_1' = 0{\cdot}09$, $\mu_2 = 2{\cdot}49$, $\mu_3 = 0{\cdot}7$;
$\mu_4 = 18{\cdot}33$ $\beta_1 = 0{\cdot}03$, $\beta_2 = 3$]

26. 100 ராசிகள் கொண்ட ஒரு நிகழ்வெண் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் கணக்கிடும்போது பின்வரும் முடிவுகள் கிடைத்தன:

கூட்டுச்சராசரி = 9, பரவற்படி = 19, $\beta_1 = 0{\cdot}7$,

β_2 = 4 கணக்கிடுதலைச் சரிபார்த்தபோது, 12 என்ற ராசி,

21 எனத் தவறுதலாக எழுதப்பட்டது எனத் தெரிந்தது. முதல் நான்கு மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளின் சரியான மதிப்பு களைக் கணக்கிடுக.

[விடை : சரியான கூட்டுச்சராசரி = 8·91, μ = 17·64, μ_3 = 57·05 μ_4 = 1257·15 β_1 = 0·59 β_2 = 4·04.]

27. ஒரு பரவலின் கூட்டுச்சராசரி 10; பரவற்படி 16; $\gamma_1 = +1$ $\beta_2 = 4$. ஆதியை மூலமாகக் கொண்ட முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் காண்க.

28. ஒரு பரவலில் 5-ஐ மூலமாகக் கொண்ட முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் − 0·55, 4·46, − 0·43 68·52 β_1, β_2 வைக் கணக்கிடுக. [செ.ப. 1971]

[விடை : $\mu_2 = 4{\cdot}1575$

$\mu_3 = 6.5962$ $\beta_1 = {\cdot}6055$

$\mu_4 = 75{\cdot}3944$ $\beta_2 = 4{\cdot}3619$]

29. γ_n என்பது r ஆவது தனி விலக்கப் பெருக்குத் தொகை ஆனால்,

$$\gamma_n^{2n} \le \gamma_{n-1}^{n} \gamma_{n+1}^{n}$$ என நிறுவுக.

[தீர்வு

எல்லா நிகழ்வெண்களும் நேர்க்குறி உடையனவாதலால்,

$$\frac{1}{N}\sum f\left[a\,|x|^{\frac{n-1}{2}} + b\,|x|^{\frac{n+1}{2}}\right]^2$$

எப்பொழுதும் நேர்க்குறி உடையது.

அதாவது,

$$\frac{1}{N}\sum f[a^2\,|x|^{n-1} + 2ab\,|x|^{n} + b^2\,|x|^{n+1}] \ge 0$$

$$a^2\,\frac{1}{N}\sum f\,|x|^{n-1} + 2ab\,\frac{1}{N}\sum f\,|x|^{n}$$

$$+ b^2\,\frac{1}{N}\sum f\,|x|^{n+1} \ge 0$$

அதாவது $a^2 \gamma_{n-1} + 2ah\,\gamma_n + b^2 \gamma_{n+1} \geq 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

எனவே, இதற்கான நிபந்தனை,

$$\gamma_{n-1}\,\gamma_{n+1} - \gamma_n^2 \geq 0$$

$$\gamma_{n-1}\,\gamma_{n+1} \geq \gamma_n^2.]$$

30. μ_j, δ_j என்பவை முறையே மாறி x-ன் j-ஆவது மைய, தனி விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் குறித்தால்,

(i) $(\mu_{2j+1})^2 \leq \mu_{2j}\,\mu_{2j+2}$

(ii) $\left(\delta_j\right)^{\frac{1}{j}} \leq \left(\delta_{j+1}\right)^{\frac{1}{j+1}}$ எனக் காட்டுக.

31. தனி விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளையும், காரணீய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளையும் வரையறுக்கவும்.

λ, μ நேர் முழு எண்களாயின், $\lambda < \mu$ எனும்போது,

$(\beta_\lambda)^{\frac{1}{\lambda}} \leq (\beta_\mu)^{\frac{1}{\mu}}$ எனக் காட்டுக. இங்கு β_k என்பது பரவலின் k-ஆவது தனி விலக்கப் பெருக்குத் தொகையைக் குறிக்கிறது. (I. A. S. '62)

32. β_1, β_2 என்பவை கோட்டக் கெழுவினையும், தட்டைக் கெழுவினையும் குறிப்பிட்டால், $\beta_2 > \beta_1 + 1$ என நிறுவுக.
(டெல்லி 1971)

33. ஒரே மாதிரியான பொருளால் ஆகிய கோள வடிவமுள்ள பந்துகளின் விட்டங்களின் பரவல் சமச்சீரானது எனின், அவற்றின் எடைகளின் பரவல் நேர்க்கோட்டமுடையதெனக் காட்டுக. (செ. ப. 63)

[தீர்வு

கோளவடிவமுடைய பந்துகளின் விட்டத்தை x எனக் குறிப்போம்.

பந்தின் எடை = கன அளவு × அடர்த்தி.

எல்லா பந்துகளும் ஒரே வகையான பொருளால் ஆனமையால், அடர்த்தி ρ மாறிலியாகும்.

$$\text{கன அளவு} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^3$$

$$\therefore \quad \text{எடை} = \frac{4}{3} \times \frac{\pi x^3}{8} \times \rho = k x^3$$

x-ன் பரவலின் முகடு x_1 எனவும், மீப்பெரு நிகழ்வெண் F எனவும் கொள்க.

பரவல் சமச்சீருடையதால், முகடின் இரு பக்கங்களிலும் சமதூரத்தில் காணப்படும் நிகழ்வெண்கள் சமம்.

எனவே, $k x^3$-ன் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி.

$$= \frac{F k x_1^3 + f_1 k (x_1 - a)^3 + f_1 k (x_1 + a)^3 + f_2 k (x_1 - b)^3 + f_2 k (x_1 + b)^3 + \ldots\ldots}{F + 2f_1 + 2f_2 + \ldots\ldots}$$

புதிய பரவலின் முகடு $k x_1^3$

$\therefore$ புதிய பரவலின், (கூட்டுச்சராசரி — முகடு)

$$= \frac{F k x_1^3 + 2f_1 k (x_1^3 + 3a^2 x_1) + 2f_2 k (x_1^3 + 3b^2 x_1) + \ldots\ldots - k x_1^3 (F + 2f_1 + 2f_2 + \ldots\ldots)}{F + 2f_1 + 2f_2}$$

$$= k\,[2f_1 (3 x_1 a^2) + 2 f_2 (3 x_1 b^2) + \ldots\ldots]$$

$x_1 > 0$ (கோளத்தின் விட்டமாதலால்)

$\therefore$ (கூட்டுச்சராசரி — முகடு) > 0.

பரவல் நேர்க்கோட்டமுடையது.]

34. பின்வரும் விவரங்களுக்கு, கார்ல்பியர்ஸனின் கோட்டக் கெழுவைக் கணக்கிடு.

மதிப்பெண்கள்	10 க்கு	குறைவாக	மாணவரின்	எண்ணிக்கை	5
,,	20 க்கு	,,	,,	,,	12
,,	30 க்கு	,,	,,	,,	32
,,	40 க்கு	,,	,,	,,	44
,,	50 க்கு	,,	,,	,,	50

[விடை 0·02]

35. பின்வரும் பரவல்களின் தட்டை அளவை ஒப்பிடுக.

மதிப்பெண்கள்	59	61	63	65	67	69	71	73	75
வகுப்பு *A*-மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	1	2	5	16	52	16	5	2	1
வகுப்பு *B*-மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	0	2	8	20	40	20	8	2	0

[விடை 2·24, 0·16]

6. நிகழ்தகவு

(PROBABILITY)

ஒரு சோதனையை ஒரே மாதிரியான சூழ்நிலையில் திரும்பத் திரும்பச் செய்திடும்போது இருவகையான விளைவுகளைக் காண்கின்றோம். சோதனையின் விளைவு உறுதியானதாகவும், மாற்றற்றதாகவும் அமையலாம். சோதனையின் விளைவு ஒன்றாக மட்டுமில்லாமல் பல்வேறு விளைவுகளில், ஏதேனும் ஒன்றாகவும் இருக்கலாம்.

எ. கா. 1. வாயுவின் அழுத்தம் P ஆகவும், கன அளவு V ஆகவும், இருக்கும்போது மாறாத வெப்ப நிலையில் PV மாறிலி.

2. t வினாடிகளுக்குப் பிறகு ஒரு துகளின் திசைவேகம் $V = u + at$. இங்கு -துவக்கத் திசைவேகம், a-முடுக்கம், u, a, தெரிந்தால் V-யின் மதிப்பை இது தான் என்று நிர்ணயிக்கலாம்.

மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டுகள் சோதனையின் விளைவுகளை முன்கூட்டியே சொல்லக்கூடிய வகையைச் சார்ந்தன.

ஒரு நாணயத்தை வீசும்போது தலையோ அல்லது பூவோ கிடைக்கிறது. இரண்டில் இதுதான் கிடைக்கும் என முன் கூட்டியே கூற இயலாது.

இதுபோன்றே ஒரு மின் விளக்கு ஏற்கெனவே λ மணி நேரங்கள் எரிந்திருந்தால் அது மேலும் எரியக்கூடிய காலத்தைப் பற்றி நம்மால் முன்கூட்டியே கூறமுடியாது. இத்தகைய நிலைகளில், நிகழ்ச்சி நடப்பதற்குரிய வாய்ப்பினை ஒரு எண் வாயிலாக அறிய முற்படுகிறோம். இதனையே நிகழ்தகவு என அழைக்கிறோம்.

சோதனையும் நிகழ்ச்சியும் (Trial and Event)

வரையறை

ஒரே மாதிரியான சூழ்நிலையில் திரும்பத் திரும்ப ஒரு சோதனையைச் செய்தாலும் ஒரே விதமான விளைவுகளைத் தராமல் பல்வேறு விளைவுகளில் ஏதேனும் ஒன்றைத் தரக்கூடிய பரிசோதனையை எடுத்துக்கொள்வோம். இதனை முயற்சி அல்லது சோதனை (trial) என்கிறோம். சோதனைகளின் விளைவுகளை நிகழ்ச்சிகள் (Events) என்கிறோம்.

எ-கா. 1. ஒரு பகடையை வீசுவது ஒரு சோதனை எனக் கொண்டால் அதன் புள்ளி முகங்கள் 1, 2, 3, 4, 5, 6 இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று கிடைப்பது ஒரு நிகழ்ச்சியாகக் கருதப்படுகிறது.

2. ஒரு நாணயத்தை வீசுவதை ஒரு சோதனையாகக் கொண்டால், அதன் விளைவுகள் தலை அல்லது பூ விழுதல் எனும் இரு நிகழ்ச்சிகளில் ஏதேனும் ஒன்றாகும்.

3. நன்கு கலக்கப்பட்ட சீட்டுக் கட்டிலிருந்து சீட்டுகள் எடுக்கப்படுவது சோதனையாகும். அவற்றில் ஒன்று 'ராஜா', மற்றொன்று 'ராணி' சீட்டுக்களாக இருப்பது நிகழ்ச்சிகளாகும்.

தீர்வாய்வான நிகழ்ச்சிகள் (Exhaustive Events)

ஒரு சோதனையில் விளையக்கூடிய எல்லா விளைவுகளையும், தீர்வாய்வான நிகழ்ச்சிகள் என்கிறோம்.

எ-கா. 1. ஒரு நாணயத்தை வீசும்போது இரண்டு தீர்வாய்வான நிகழ்ச்சிகள் உண்டு. அவை தலை, பூ விழுதல்.

2. இரு பகடைகளை வீசும்போது தீர்வாய்வான நிகழ்ச்சிகள் 36 ஆகும். ஏனெனில், முதல் பகடையில் காணப்படும் ஒன்றிலிருந்து ஆறு வரையுள்ள எந்த ஒரு எண்ணோடும் இரண்டாவது பகடையில் 6 எண்களைப் பொருத்தலாம்.

(3) ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து 4 சீட்டுகள் எடுக்கும்போது தீர்வாய்வான நிகழ்ச்சிகள் $52 C_4$.

சாதகமான நிகழ்ச்சிகள் (Favourable Events)

ஒரு சோதனையின் முடிவாக ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி நடப்பதற்குக் காரணமாயுள்ள எல்லா விளைவுகளையும் அந் நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமானவை என்கிறோம்.

எ-கா. 1. ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து 'ராஜா' சீட்டு எடுப்பதற்குச் சாதகமான நிகழ்ச்சிகள் 4. டைமண்ட் சீட்டு கிடைப்பதற்குச் சாதகமான நிகழ்ச்சிகள் 13.

2. இரு பகடைகளை விசும்போது அவற்றில் காணப்படும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை 6 ஆக இருப்பதற்குரிய சாதகமான நிகழ்ச்சிகள் 5 ; அவை (2, 4) (4, 2) (3, 3) (5, 1) (1, 5).

ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் (Mutually Exclusive Events)

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் அல்லது ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகளாயின், அவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று நடக்கும் போது அதே சமயத்தில் (அதே சோதனையில்) வேறு எந்த நிகழ்ச்சியும் நடைபெற இயலாது.

எ-கா 1. ஒரு பகடையை வீசும்போது ஒன்றிலிருந்து ஆறுவரை காணப்படும் 6 புள்ளி முகங்களும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை உடையன. ஏனெனில், பகடையை ஒரு முறை வீசும்போது இந்த 6 புள்ளி முகங்களில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி முகம்தான் கிடைப்பதற்குரிய வாய்ப்பு உண்டு. இதுபோன்றே,

2. ஒரு நாணயத்தை வீசும்போது ஏற்படும் நிகழ்ச்சிகளாகிய தலை பூ ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்.

3. ஒரு கூடையில் 5 பச்சை, 4 வெள்ளை, 3 சிவப்புப் பந்துகள் இருப்பின், அவற்றில் ஏதேனும் ஒரு பந்தை எடுக்கும்போது அது பச்சை அல்லது சிவப்பு அல்லது வெள்ளையாகத்தான் இருக்கமுடியும். இம்மூன்று நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

சமவாய்ப்புடைய நிகழ்ச்சிகள் (Equally Likely Events)

பெர்னேலியின் கூற்றுப்படி இரு நிகழ்ச்சிகள் சம வாய்ப்புடையன ஆயின், அவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றுதான் நிகழும்; மற்றது நிகழ வாய்ப்பு இல்லை என்று இல்லாமல் இருந்தால் அவற்றினைச் சமவாய்ப்புடைய நிகழ்ச்சிகள் என்கிறோம். அதாவது இவற்றில் ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கு மற்றதைக் காட்டிலும் எந்த விதத்திலும் அதிக வாய்ப்பு இல்லை.

எ-கா. நன்கு கலைக்கப்பட்ட சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுப்போமானால் அதற்கு சீட்டுக்கட்டில் உள்ளன 52 சீட்டுகளில் ஏதேனும் ஒன்றாய் இருப்பதற்கான சமவாய்ப்பு உண்டு. அதாவது, சீட்டுக்கட்டில் உள்ள ஒவ்வொரு சீட்டிற்கும் நாம் தேர்ந்தெடுப்பதற்குரிய வாய்ப்பு சமமாகவே உள்ளது.

சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் (Independent Events)

E_1, E_2 என்னும் இரு நிகழ்ச்சிகள் சார்பற்றவை ஆயின் E_2 நிகழ்வதோ, அல்லது நிகழாமல் இருப்பதோ E_1 நிகழ்வதைப் பொறுத்து அமையாது இருக்கும்.

எ-கா. 1. ஒரு பகடையை வீசும்போது முதல் வீச்சில் புள்ளி முகம் 5 கிடைப்பது 2-வது, 3-வது என அடுத்துவரும் வீச்சுகளில் புள்ளி முகம் 5 கிடைப்பதைப் பொறுத்ததல்ல.

2. ஒரு கணக்கை A, B என்னும் இரு மாணவர்களுக்குத் தரும் போது A கணக்கைச் சரியான முறையில் தீர்வு காண்பதோ அல்லது காணாமல் இருப்பதோ, B-யின் வெற்றி தோல்வியைப் பொறுத்ததல்ல.

3. ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டை எடுத்துவிட்டு 2-வது சீட்டு எடுக்கப்படுவதற்கு முன்பு மறுபடியும் அந்தசீட்டைக் கட்டிற்குள் வைத்துவிட்டால் இரண்டாவது முறை எடுக்கப்படும் சீட்டு முதற் சீட்டைப் பொறுத்து அமையாது.

ஆனால், முதல் சீட்டைத் திருப்பிப் போடாமல் 2-வது சீட்டை எடுத்தால், அதன் வாய்ப்பு முதலில் எடுக்கப்பட்டுள்ள சீட்டைப் பொறுத்து அமைகிறது. இந்நிலையில் அது சார்பற்ற நிகழ்ச்சி ஆகாது.

சார்ந்த நிகழ்ச்சிகள் (Dependent Events)

ஒரு சோதனையில் ஒரு நிகழ்ச்சி நடப்பதோ நடக்காமல் இருப்பதோ, மற்ற சோதனைகளில் அந்நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதைப் பாதித்தால் அவை சார்ந்த நிகழ்ச்சிகளாகும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ராணிசீட்டு ஒன்றைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான வாய்ப்பு எடுக்கப்பட்ட ராணி சீட்டு சீட்டுக்கட்டில் திருப்பிப் போடப்பட்டால் இரண்டாது முறையும் மாறாமல் இருக்கும். இதற்கு மாறாக எடுக்கப்படும் சீட்டு திருப்பிப் போடப் படாவிடில்

இரண்டாவது முறை ராணி சீட்டை எடுப்பதற்கான வாய்ப்பு குறைந்துவிடும். ஏனெனில், இப்போது சீட்டுக்கட்டில் உள்ள 51 சீட்டுகளில், 3 ராணி சீட்டுகளே உள்ளன.

நிகழ்தகவு

1. கணக்கியல் நிகழ்தகவு (Mathematical Probability)

ஒரு சோதனை N தீர்வாய்வான ஒன்றையொன்று விலக்கும் சம வாய்ப்புடைய விளைவுகளைக் கொண்டதாகவும், அவற்றில் m விளைவுகள் E என்னும் நிகழ்ச்சி நடக்கச் சாதகமானவையாகவும் இருப்பின் E-யின் நிகழ்தகவு =

$$P = \frac{\text{சாதகமான வழிகள்}}{\text{தீர்வாய்வான வழிகள்}} = \frac{m}{N}$$

எ-கா 1. ஒரு பகடையை வீசும்போது ஒற்றைப்படை எண் கிடைப்பதை E எனக் கொண்டோமானுல், அதற்குச் சாதகமான நிகழ்ச்சிகள் புள்ளி முகங்கள் 1, 3, 5 கிடைப்பதாகும். மொத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை 6; எனவே,

$$P = \frac{m}{N} = \frac{3}{6} = \cdot 5$$

2. 52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து 'ராஜா' சீட்டு எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $p = \frac{4}{52}$ இவ்வாறே கணிதத்தின் துணை கொண்டு நிகழப்போகும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவினை எண் வடிவத்தில் கண்டறிகின்றோம். இதனைக் கணக்கியல் நிகழ்தகவு அல்லது காரண காரிய நிகழ்தகவு என்கிறோம்.

2. புள்ளியியல் நிகழ்தகவு அல்லது காரிய காரண நிகழ்தகவு (Statistical Probability or Aposteriori probability)

இது சோதனை வாயிலாகக் கணக்கிடப்படுவதாகும். சாதாரணமாக, நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதற்கான வாய்ப்பில் உள்ள ஒற்றுமையை அடிப்படையாகக் கொண்டு இந் நிகழ்தகவினைப் பெறுகின்றோம். A என்ற ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவினை $P(A)$ எனக் (Apriori Probability) குறிப்பிடுகின்றோம்.

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{a}{n}$$ எனக் காண்கின்றோம்.

a, நிகழ்ச்சி நிகழும் தடவைகள்.

n, மொத்த முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை.

எ-கா 1 ஒரு பகடையை 300 தடவைகள் வீசும்போது அதன் ஒரு புள்ளி முகத்தினை 52 தடவைகள் பெற்றிருப்போமானால் அதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{52}{300} = \cdot 173$

பகடையை 600 தடவை வீசும்போது 102 முறை அப் புள்ளி முகம் கிடைத்திருந்தால் அதன் நிகழ்தகவு $= \frac{102}{600} = \cdot 17$ ஆகும்.

இன்னும் பல தடவைகள் வீசினால், நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$ க்கு மிக மிக நெருங்கிய மதிப்பாகப் பெறப்படும். இவ்வாறு கணிக்கும் நிகழ்தகவினைக் கணித நூல் வல்லுநர்கள் சிறந்ததாக ஏற்றுக் கொள்ளவில்லையாயினும், நாம் இதனைப் பயனுள்ளதாகக் காண்கிறோம். இப் புள்ளியியல் நிகழ்தகவு இயற்கையில் உள்ள ஒருமைப்பாட்டை வலியுறுத்துவதாகவும் நாம் கொள்ளலாம்.

எ-கா 3 ஆண்கள், 2 பெண்கள், 5 குழந்தைகள் கொண்ட ஒரு குழுவிலிருந்து, நான்கு பேர் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றனர். அவர்களில் சரியாக 2 பேர் குழந்தைகளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

"ஆ" ஆண்கள், "பெ" பெண்கள், "கு" குழந்தைகளைக் குறிக்கட்டும்.

குழுவிலுள்ள மொத்த நபரின் எண்ணிக்கை $= 3+2+5 = 10$.
தீர்வாய்வான வழிகள் = 10 நபர்களில் 4 நபரைத் தேர்ந்தெடுக்கும் மொத்தம் வழிகள்

$$= 10C_4$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$$

$$= 210.$$

சாதகமான வழிகள் = 2 குழந்தைகளையும் சேர்த்து 4 பேரைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான வழிகள் பின்வருமாறு :

(i) 2 கு. + 2 ஆ. (ii) 2 கு. + 2 பெ. (iii) 2 கு. + 1 பெ. + 1 ஆ.

(i) 2கு. + 2 ஆ. தேர்ந்தெடுப்பதற்கான வழிகள்

$$= 5C_2 \times 3C_2 = 30$$

(ii) 2கு. + 2 பெ. தேர்ந்தெடுப்பதற்கான வழிகள்

$$= 5C_2 \times 2C_2 = 10$$

(iii) 2கு. + 1 பெ. + 1 ஆ. தேர்ந்தெடுப்பதற்கான

வழிகள் $= 5C_2 \times 2C_1 \times 3C_1$

$= 60$

சாதகமான வழிகள் $= 100$

தீர்வாய்வான வழிகள் $= 210$

எனவே,

தேவையான நிகழ்தகவு $= \frac{100}{210} = \cdot 4773$

எ-கா 2. (அ) ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து 2 சீட்டுகள் ராண்டம் முறையில் எடுக்கப்படுகின்றன. அவை இரண்டும் ராஜா சீட்டுகளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

(ஆ) ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ராண்டம் முறையில் எடுக்கப் படும் 4 சீட்டுகளில்

(i) 4-ம் டைமண்டு சீட்டுகளாக இருக்க

(ii) இரு ஸ்பேடுகளும், இரு டைமண்டுகளும் இருக்க வாய்ப்பு என்ன ?

தீர்வு

(அ) சீட்டுக்கட்டிலிருந்து, ஏதேனும் இரு சீட்டுகள் எடுப்பதற்கான மொத்த வழிகள் $= 52C_2$.

ஒரு சீட்டுக்கட்டில் 4 ராஜா சீட்டுக்கள் உள்ளன வாதலால் 2 ராஜா சீட்டுக்களை $4C_2$ வழிகள் எடுக்கலாம்.

எனவே, நிகழ்தகவு $= \frac{\text{சாதகமான வழிகள்}}{\text{தீர்வாய்வான வழிகள்}} = \frac{4C_2}{52C_2}$

$$= \frac{4 \times 3}{52 \times 51} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{221}$$

(ஆ) (i) தீர்வாய் வான வழிகள் $52C_4$.

கட்டில் உள்ள 13 டைமண்டு சீட்டுகளில் 4 சீட்டுக்கள் எடுக்கக்கூடிய வழிகள் $= 13C_4$.

$$\therefore \text{ நிகழ்தகவு } = \frac{13C_4}{52C_4}.$$

(ii) இரு ஸ்பேடுகளும், இரு டைமண்டுகளும் எடுப்பதற்கான வழிகளின் எண்ணிக்கை $= 13C_2 \times 13C_2$

தீர்வாய்வான வழிகள் $= 52C_4$.

$$\therefore \text{ நிகழ்தகவு } = \frac{13C_2 \times 13C_2}{52C_4}$$

எ. கா. 3. ஒரு பாத்திரத்தில் 5 வெள்ளைப் பந்துகளும், 3 கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. இப்பாத்திரத்திலிருந்து 2 பந்துகள் எடுக்கப்பட்டால் ஒன்று கறுப்பாகவும், மற்றொன்று வெள்ளையாகவும் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(மதுரை '1969 A)

மொத்த பந்துகளின் எண்ணிக்கை $= 8$.

தீர்வாய்வான வழிகள் = 8 பந்துகளிலிருந்து 2 பந்துகள் எடுக்கப்படும் மொத்த வழிகள்.

$$= 8C_2 = 28$$

சாதகமான வழிகள் = கறுப்பு பந்து ஒன்றும், வெள்ளைப் பந்து ஒன்றும், எடுப்பதற்கான வழிகள்

$$= 3C_1 \times 5C_1 = 15$$

$$\therefore \text{ தேவையான நிகழ்தகவு } = \frac{15}{28}$$

எ.கா. 4. இரு பகடைகளை ஒரு முறை வீசும்போது புள்ளி முகங்களில் கூடுதல்

(i) 10 ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(ii) 7-ஐ விட அதிகமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

விடை

(i) இரு பகடைகளிலும் காணப்படும் எண்கள் 1 — 6 வரை இருக்கும். எனவே, அவற்றின் கூடுதல் 10 ஆக இருப்பதற்குச் சாதகமானவை = (4, 6), (5, 5), (6, 4) என்ற 3 வழிகள்.

முதல் பகடையில் புள்ளி முகம் 1 காணப்படும்போது, இரண்டாம் பகடையில் காணப்படும் புள்ளி முகம் 1-லிருந்து 6 வரை ஏதேனும் ஓர் எண்ணாக இருக்கலாம்.

எனவே, மொத்த வழிகள் $= 6 \times 6 = 36$.

$\therefore$ தேவையான நிகழ்தகவு $= \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$,

(ii) புள்ளி முகங்களின் கூடுதல் 7-ஐ விட அதிகமாதலால், 8, 9, 10, 11, 12 ஆக இருக்கலாம்.

8 கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சிகள் = (2,6), (3,5) (4,4), (5,3), (6,2)

9 கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சிகள் = (3,6) (4,5), (5,4), (6,3)

10 கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சிகள் = (4,6) (5,5), (6,4)

11 கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சிகள் = (5,6) (6,5)

12 கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சிகள் = (6,6)

எனவே, சாதகமான வழிகள் = 15

தேவையான நிகழ்தகவு $= \frac{\text{சாதகமான வழிகள்}}{\text{தீர்வாய்வான வழிகள்}} = \frac{15}{36}$

எ. கா. 5. 4 வெள்ளை, 5 சிவப்பு பந்துகள் உள்ள ஒரு பையிலிருந்து எடுத்த பந்துகள் திருப்பிப் போடப்படா நிலையில், சிவப்புப் பந்துகள் எடுப்பதற்காக நிகழ்தகவின் பாதக விகிதம் $\frac{37}{5}$ எனக் காட்டுக.

[குறிப்பு : வெற்றியின் நிகழ்தகவு p எனவும், தோல்வியின் நிகழ்தகவு q எனவும் இருந்தால், நிகழ்தகவின்

$$\text{சாதக விகிதம்} = \frac{p}{q}$$

$$\text{பாதக விகிதம்} = \frac{q}{p}$$ எனப்படுகிறது.]

மொத்தப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை = 9

அவற்றில் ஏதேனும் 3 பந்துகள் எடுப்பதற்கான மொத்த வழிகள் $= 9C_3$

5 சிவப்புப் பந்துகளிலிருந்து 3 பந்துகள் எடுப்பதற்கான வழிகள் $= 5C_3$

$$\therefore \quad \text{நிகழ்தகவு} = p = \frac{5C_3}{9C_3} = \frac{5}{42}$$

$$q = 1 - p = 1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42}$$

$$\therefore \quad \text{பாதக விகிதம்} = \frac{q}{p} = \frac{\frac{37}{42}}{\frac{5}{42}} = \frac{37}{5}.$$

எ.கா. 6. 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 என்ற இலக்கங்களிலிருந்து மூன்று ஸ்தான எண்கள் அமைக்கப்படுகின்றன. (1) கொடுக்கப் பட்டுள்ள எண்களை ஒரே ஒரு முறை பயன்படுத்தும்போது (2) திரும்பத் திரும்பப்பயன் படுத்தும்போது 537, 146 என்ற எண்களைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

விடை :

(i) கொடுக்கப்பட்டுள்ள இலக்கங்களை ஒரே ஒரு முறை பயன்படுத்தும்போது 9 இலக்கங்களிலிருந்து 3 ஸ்தான எண்களை அமைப்பதற்கான மொத்த வழிகள் $= 9P_3 = 9 \times 8 \times 7 = 504.$

இவற்றில் 537, 146 என்ற 2 எண்கள் சாதகமானவை.

$$\therefore \quad \text{நிகழ்தகவு} = \frac{2}{504} = \frac{1}{252}$$

(ii) இலக்கங்களைத் திரும்பத் திரும்பப் பயன்படுத்தும் போது கொடுக்கப்பட்டுள்ள இலக்கங்களிலிருந்து $9 \times 9 \times 9 = 729$ மூன்று ஸ்தான எண்களைப் பெறலாம். இவற்றில் 537, 146 என்ற இரு எண்கள் சாதகமானவை. $\therefore$ நிகழ்தகவு $= \frac{2}{729}$

எ. கா. 7. சம வாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்பட்ட ஒரு லீப் வருடத்தில் 53 ஞாயிற்று கிழமைகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது? (பம்பாய் B. Com, 1965)

ஒரு லீப் வருடத்திற்கு 366 நாட்கள், அதில் 52 முழு வாரங்கள் அடங்கியுள்ளன. எனவே, 52 ஞாயிற்றுக்கிழமைகள் கொண்டதாய் இருக்கும்; மீதி இரண்டு நாட்கள் பின்வரும் வகையில் இருக்கலாம்.

(அ) திங்கள், செவ்வாய்

(ஆ) செவ்வாய், புதன்

(இ) புதன், வியாழன்

(ஈ) வியாழன், வெள்ளி

(உ) வெள்ளி, சனி

(ஊ) சனி, ஞாயிறு

(எ) ஞாயிறு, திங்கள்

கடைசி இரண்டு நாட்கள் (ஊ) அல்லது (எ) ஆக இருந்தால் அந்த லீப் வருடத்திற்கு 53 ஞாயிற்றுக் கிழமைகள் இருக்கும்.

$\therefore$ சாதகமான வழிகள் $= 2$

மொத்த வழிகள் $= 7$

$\therefore$ நிகழ்தகவு $= \frac{2}{7}$

எ. கா. 8. "REGULATION" என்ற பதத்திலுள்ள எழுத்துக்கள் சமவாய்ப்பு முறையில் வரிசைப்படுத்தப்பட்டால், எழுத்து '*R*'க்கும், '*E*'க்கும் இடையே சரியாக 4 எழுத்துக்கள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு

"REGULATION" என்ற பதத்தில் உள்ள 10எழுத்துக்களில் R, E என்ற இரு எழுத்துக்கள் $11P_2$ இடங்களில் அமையலாம்.

Rக்கும், E-க்கும் இடையே சரியாக 4 எழுத்துக்கள் இருக்க.

R-ன் இடம்	E-யின் இடம்
1	6
2	7
3	8
4	9
5	10
6	11

என இருக்கலாம். R, Eன் இடங்களை உடன் மாற்றம் செய்தால் சாதகமான வழிகள் $= 2 \times 6 = 12$ எனக் கிடைக்கும்.

$$\text{நிகழ்தகவு} = \frac{12}{11P_2} = \frac{12}{110}$$

எ.கா. 9 புள்ளி முகங்கள் 1-லிருந்து 6 வரை குறிக்கப்பட்ட 3 பகடைகள் வீசப்படுகின்றன. ஒரு வீச்சில் கிடைக்கக்கூடிய மொத்த எண்ணிக்கை 10 ஆக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு

3 பகடைகளின் வீச்சில் புள்ளி முகங்கள் கூடுதல் 10 வருவதற்கான வழிகள் = இயலவேண்டிய நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை

$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3$-ன் பிரிவில்

x^{10}-ன் குணகம் ஆகும்.

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3 = (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^3$$

அல்லது $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^3$-ன் விரிவில் x^7-ன் குணகம் ஆகும்.

$$= \left(\frac{1 - x^6}{1 - x}\right)^3 \text{-ல் } x^7\text{-ன் குணகம்}$$

$$= (1 - x^6)^3 (1 - x)^{-3}\text{-ல் } x^7\text{-ன் குணகம்.}$$

$$= (1 - 3x^6 + 3x^{12} - x^{18})$$

$$\times \left[1 + 3x + \frac{3\cdot4}{1\cdot2}x^2 + \frac{3.4.5}{1.2\cdot3}x^3 + \frac{3.4.5\cdot6}{1.2.3.4}x^4 + \cdots\cdots\right]$$

$$= x^7\text{-ன் குணகம்.}$$

$$= (1 - 3x^6 + 3x^{12} - x^{18}) \left\{\sum \frac{(\gamma + 1)(\gamma + 2)}{1\cdot2} x^\gamma\right\}$$

பெருக்கற்பலனில் x^7 உறுப்பு,

$$= 1.\frac{(7 + 1)(7 + 2)x^7}{1\cdot2} - 3.\frac{(1+1)(1+2)}{1\cdot2.}x^6\cdot x$$

$$= \frac{8\cdot9}{1\cdot2} - 3\cdot\frac{2.3}{1\cdot2} = 36 - 9 = 27.$$

இயலும் மொத்த நிகழ்ச்சிகள் $= 6 \times 6 \times 6 = 216.$

$\therefore$ தேவையான நிகழ்தகவு $= \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$

எ.கா. 10 A, B என்ற இருவர் இன்னும் 10 பேருடன் சேர்ந்து ஒரு வட்டத்தில் நிற்கின்றனர். இப் பன்னிரண்டு பேர்களும் நிற்கும் அமைப்பு, சமவாய்ப்பு முறையில் அமைந்திருந்தால், A, B இருவருக்கும் இடையில் சரியாக 3 பேர் நிற்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

A, B என்ற இருவரையும் ஒருவராகக் கருதுவோம். 10 நபர்களில் இருந்து ஏதேனும் 3 நபரைத் தேர்ந்து எடுப்பதற்கான முறைகள் $= 10C_3$.

மீதி இருக்கும் 7 நபர்கள் A, B இருவருக்கும் இடையில் $7!$ வழிகளில் நிற்கலாம். 3 பேர்கள் A, B இருவருக்கும் இடையில் $3!$ வழிகளில் நிற்கலாம். வட்டம் A-யில் இருந்தாவது, B-யில் இருந்தாவது ஆரம்பிக்கப்படலாம். எனவே, ஒரு வட்டத்தில் A, B-க்கு இடையே 3 நபர்கள் வெவ்வேறு வழிகளில் $2 \times 10C_3 \times 7!\ 3!$ விதங்களில் நிற்க முடியும்.

$\therefore$ 12 பேர்களின் சமவாய்ப்பு அமைப்பில் A, B இருவருக்கும் இடையில் சரியாக 3 பேர்கள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{2 \times 10C_3 . 7!\ 3!}{11!}$$

$$= \frac{2}{11} = 0{\cdot}18$$

$\therefore$ எனவே, நிகழ்தகவு $= 0{\cdot}18$.

எ.கா. 11 5 திருமணமான சோடிகளில் இருந்து, 4 பேர் அடங்கிய ஒரு குழு சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அக்குழுவில் ஒரு கணவன், மனைவி சோடி கூட இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

கீழ்க்கண்டவாறு சோடிகள் அமைந்திருப்பதாகக் கொள்வோம்.

A	B	C	D	E
A'	B'	C'	D'	E'

அக்குழுவில் ஒரு சோடி கணவன் மனைவியர் இருப்பதற்கான வழிகள் $5C_1$. மீதியுள்ள 8 பேர்களில் ஏதேனும் இருவரைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான வழிகள்

$$= 8C_2.$$

10 பேர்களில் 4 பேரைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான மொத்த வழிகள்

$$= 10C_4.$$

∴ குழுவில் குறைந்தது ஒரு கணவன் மனைவி சோடி இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{5C_1 \cdot 8C_2}{10C_4}$.

∴ குழுவில் கணவன்-மனைவி சோடி இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= 1 - \frac{5C_1 \cdot 8C_2}{10C_4}$

$$= 1 - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{3}.$$

எ. கா. 12. ஒரு சதுரங்க அட்டையில் உள்ள கட்டங்களில் இருந்து 3 கட்டங்கள் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்து எடுக்கப்படுகின்றன. அக்கட்டங்கள் மூலைவிட்டத்தில் அமைந்து இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{7}{744}$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு

ஒரு சதுரங்க அட்டையில் மொத்தம் 64 கட்டங்கள் உள்ளன. அவற்றிலிருந்து 3 கட்டங்களைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான மொத்த வழிகள் $64C_3$. மூலைவிட்டத்தில் அமைந்துள்ள 8 கட்டங்களில் ஏதேனும் 3-ஐ $8C_3$ வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம். ஒரு கட்டத்தை விட்டு மற்ற ஏழு கட்டங்களில் 3-ஐத் தேர்ந்தெடுக்கும் வழிகள் $= 7C_3$. 3 கட்டங்களைக் கீழிருந்து முதல் ஏழு கட்டங்களிலிருந்தாவது, அல்லது மேலிருந்து முதல் ஏழு கட்டங்களிலிருந்தாவது தேர்ந்து எடுக்கலாம். எனவே, 7 கட்டங்களிலிருந்து 3-ஐத் தேர்ந்தெடுக்கும் மொத்த வழிகள் $2 \cdot 7C_3$. இதுபோலவே, $2 \cdot 6C_3$, $2 \cdot 5C_3$, $2.4C_3$, $2 \cdot 3C_3$. வழிகளில் முறையே முதல் 6, 5, 4, 3 கட்டங்களில் இருந்து 3 கட்டங்களைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

அட்டையில் 2 மூலை விட்டங்கள் இருப்பதால், 3 கட்டங்களைத் தேர்ந்தேடுக்கும் மொத்த வழிகள்

$$2\{2(3C_3 + 4C_3 + 5C_3 + 6C_3 + 7C_3) + 8C_3\}.$$

$\therefore$ நிகழ்தகவு

$$= \frac{2\{2({}^{3}C_3 + {}^{4}c_3 + {}^{5}c_3 + {}^{6}c_3 + {}^{7}c_3) + {}^{8}c_3\}}{{}^{64}c_3}$$

$$= \frac{2\{2(1 + 4 + 10 + 20 + 35) + 56\}\, 3!}{64 \times 63 \times 62}$$

$$= \frac{7}{24 \times 31} = \frac{7}{744}.$$

எ. கா. 13. ஒரு நபர் n கடிதங்களை எழுதி, n உறைகளுக்கு விலாசமிடுகிறார். அக் கடிதங்கள் சமவாய்ப்பு முறையில் உறைகளில் வைக்கப்பட்டால், ஒவ்வொரு கடிதமும் தவறாக வைக்கப்படுவதற்கு உரிய நிகழ்தகவு யாது? (பம்பாய் '69)

1. முதல் கடிதம் இரண்டாவது கடிதத்திற்குரிய உறையிலும், 2-வது கடிதம் முதல் கடிதத்திற்கு உரிய உறையிலும் வைக்கப் படுகிறது எனக் கொள்வோம். மீதி $(n-2)$ கடிதங்கள் தவறாக வைக்கப்படுவதற்கு உரிய வழிகளின் எண்ணிக்கை u_{n-2} என்க. இதுபோல, முதல் கடிதம் மற்ற $(n-1)$ கடிதங்களுடன் மாற்றி வைக்கப்பட்டும்; மீதி $(n-2)$ கடிதங்கள் யாவும் தவறாக வைக்கப்படுவதற்கு உரிய வழிகள் $(n-1)\, u_{n-2}$.

2. முதல் கடிதம் இரண்டாவது கடிதத்திற்கு உரிய உறையில் வைக்கப்படுகிறது; 2-ஆவது கடிதம் முதல் கடிதத்திற்கு உரிய உறையில் வைக்கப்படுவதில்லை. முதல் கடிதத்தைத் தவிர மற்ற கடிதங்கள் u_{n-1} வழிகளில் வைக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறே முதல் கடிதம் மீதி $(n-1)$ உறைகளில் ஏதேனும் ஒன்றில் வைக்கப் படும். எனவே, இந்த வழியில் எல்லாக் கடிதங்களும் தவறாக வைப்பதற்கு உரிய வழிகள் $(n-1)\, u_{n-1}$.

மொத்த வழிகள் $= u_n$.

$$\therefore \quad u_n = (n-1)(u_{n-2} + u_{n-1})$$

அல்லது $u_n - n\, u_{n-1} = -(u_{n-1} - \overline{n-1}\, u_{n-2})$ ...(1)

n-க்குப் பதில் $(n-1)$-ஐ (1)-ல் பிரதியிட

$$u_{n-1} - \overline{n-1}\, u_{n-2} = u_{n-2} - \overline{n-2}\, u_{n-3}$$

$$\therefore \quad u_n - n\, u_{n-1} = (-1)^2 (u_{n-2} - \overline{n-2}\, u_{n-3})$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$= (-1)^{n-2} (u_2 - u_1) \qquad \text{...(2)}$$

u_1 = ஒரு உறை மட்டுமே இருக்கும்போது, u_1 ஒரு கடிதம் தவருக உறையில் வைக்கப்படும் வழியாகும்

$$\therefore \quad u_1 = 0.$$

u_2 = 2 உறைகள் மட்டும் இருக்கும்போது, 2 கடிதங்கள் தவருக வைக்கப்படும் வழிகளாகும்

$$= 1.$$

$\therefore$ சமன்பாடு (2), $u_n - n\,u_{n-1} = (-1)^{n-2}(1-0)$

$$= (-1)^n \text{ என ஆகிறது.}$$

$n!$-ஆல் வகுத்தால்,

$$\frac{u_n}{n!} - \frac{u_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் n-க்கு வரிசையாக 1, 2, 3 ... n எனப் பிரதியிட்டால்

$$\frac{u_2}{2!} - \frac{u_1}{1!} = \frac{1}{2!}$$

$$\frac{u_3}{3!} - \frac{u_2}{2!} = -\frac{1}{3!}$$

$$\frac{u_4}{4!} - \frac{u_3}{3!} = \frac{1}{4!}$$

....

$$\frac{u_n}{n!} - \frac{u_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

எல்லாவற்றையும் கூட்ட,

$$\frac{u_n}{n!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

$\therefore$ தேவையான நிகழ்தகவு

$$\frac{u_n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

பயிற்சி

1. 4 பகடைகளைக் கொண்டு 12 பெறுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

2. 1, 2, 4, 5 என்ற எண்கள் ஒவ்வொன்றையும் ஒரே ஒரு முறை பயன்படுத்தி, ஒரு நான்கு ஸ்தான எண் பெறப்படுகிறது பெறப்படும் எண் (1) ஒற்றைப்படை எண்ணாயிருக்க (2) 5-ஆல் மீதமில்லாமல் வகுபட நிகழ்தகவு யாது?

3. இரு நேர் முழு எண்களின் கூட்டுத் தொகை 50. அவற்றின் பெருக்குத் தொகை 500-க்கு மேற்படாமல் இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

4. ACCESSION என்ற பதத்திலுள்ள எழுத்துக்கள் யாவும், இயலக்கூடிய எல்லா வகைகளிலும் வரிசை மாற்றம் செய்யப்படுகின்றன. இவற்றில் சம வாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்பட்ட ஒரு வரிசை

(அ) *A*-யில் தொடங்கி *N* ல் முடிவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(ஆ) *E* ல் தொடங்கி CESS ல் முடிவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? [ம.ப. 1971]

5. *X*, *Y* என்ற இருவர் ராண்டம் முறையில் இன்னும் 10 பேருடன் ஒரு கோட்டில் நிற்கின்றனர். *X*-க்கும், *Y*-க்கும் இடையே சரியாக 3 பேர் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? (செ.ப '65]

6. ஒரே மாதிரியான 100 அட்டைகளில் முழு எண்கள் 1 — 100 எழுதப்பட்டு, அந்த 100 அட்டைகளும் ஒரு பையில் போடப்படுகின்றன. ராண்டம் முறையில் ஒரு அட்டை எடுக்கப்படுகிறது. அதில் காணப்படும் இலக்கங்களின் [கூடுதல் 12 ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? [செ.ப. '52]

7. 52 சீட்டுகள் உடைய ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து, இரு சீட்டுகள் எடுக்கப்படுகின்றன.

அவை, ஒரு ராஜா சீட்டும், ஒரு ராணி சீட்டுமாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

8. 'UNIVERSITY' என்ற பதத்தின் எழுத்துக்களை வரிசை மாற்றம் செய்யும்போது இரு I-களும் ஒரு சேர வராமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

9. 7 சிவப்பு, 11 வெள்ளைப் பந்துகள் உடைய ஒரு பையிலிருந்து 2 பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன.

(1) இரு பந்துகளும் வெள்ளையாய் இருக்க

(2) ஒன்று வெள்ளையாகவும், மற்றொன்று சிவப்பாகவும் இருக்க,

(3) இரண்டுமே சிவப்பாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(விடை : (1) $\frac{55}{153}$ (2) $\frac{77}{153}$ (3) $\frac{7}{51}$)

10. இரு பகடைகளை வீசும்போது குறைந்தது 7 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது? $\left(\frac{7}{12}\right)$

11. ஒரு நாணயம் 3 முறை வீசப்படுகிறது. தலை, பூ, தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது? (விடை : $\frac{1}{8}$)

12. ஒரு பகடையை வீசும்போது 5 பெறுதல், இரு பகடைகள் மூலம் 10 பெறுதல், மூன்று பகடைகள் மூலம் 15 பெறுதல் இவற்றின் வாய்ப்பினை ஒப்பிடுக. [விடை : $\frac{1}{6} : \frac{1}{12} : \frac{5}{108}$]

13. 2, 3, 5, 7, 9 என்ற இலக்கங்களிலிருந்து, ஒரு இரண்டு ஸ்தான எண்ணை அமைக்குமாறு கூறப்படும் ஒரு நபர், 79-ஐ எழுதுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(அ) ஒரு முறை பயன்படுத்தப்பட்ட இலக்கம் மீண்டும் பயன்படுவதில்லை.

(ஆ) இலக்கங்கள் மீண்டும், மீண்டும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. [விடை : (அ) $\frac{1}{20}$ (ஆ) $\frac{1}{25}$]

14. 1-லிருந்து 8 வரை இலக்கமிடப்பட்ட 8 பந்துகள் ஒரு பையில் வைக்கப்பட்டு, அவற்றிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில்

இரு பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. அவை 1, 2 என்ற எண்கள் உடையனவாக இருப்பதற்கான வாய்ப்பு யாது? [விடை: $\frac{1}{28}$]

15. ஒரு சீட்டுக்கட்டைக் குலுக்கும்போது 4 சீட்டுகள் தற்செயலாக விழுந்து விடுகின்றன. சீட்டுக்கட்டில் காணப்படாத சீட்டுக்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு சாதியைச் சேர்ந்ததாக இருப்பதற்கான வாய்ப்பு என்ன? [விடை: $\frac{2197}{20825}$]

16 n நபர்கள் ஒரு வட்டவடிவமான மேசையைச் சுற்றி அமர்கிறார்கள். இரு குறிப்பிட்ட நபர்கள் பக்கத்து, பக்கத்து இடத்தில் அமர்வதற்கான வாய்ப்பு யாது? [விடை: $\frac{2}{n-1}$]

17. 4 கடிதங்களும், விலாசமிட்ட நான்கு உறைகளும் உள்ளன. கடிதங்களை உறைகளில் சம வாய்ப்பு முறையில் வைக்கும் போது,

(அ) ஒரு கடிதமுமே சரியான உறையில் வைக்கப் படாமலிருக்க.

(ஆ) குறைந்தது ஒரு கடிதமாவது, சரியான உறையில் வைக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

18. ஒரு பகடையின் 6 பக்கங்களிலும் 1, −1, 0, 2, −2, 3 என்ற எண்கள் காணப்படுகின்றன. பகடையை மூன்று முறைகள் வீசினால், பெறப்படும் எண்களின் கூட்டுத் தொகை 6 ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

19. ஒரு பையில் 8 கறுப்பு, 3 சிவப்பு, 9 வெள்ளைப் பந்துகள் உள்ளன. அவற்றிலிருந்து 3 பந்துகள் சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்பட்டால், (அ) அவை எல்லாமே கறுப்பாக இருக்க; (ஆ) 2 கறுப்பு, 1 வெள்ளைப் பந்தாக இருக்க; (இ) ஒவ்வொரு நிறத்திலும் ஒரு பந்து இருக்க; (ஈ) கறுப்பு, சிவப்பு, வெள்ளை என்ற வரிசையில் பந்துகள் இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

[விடை: (அ) $\frac{14}{285}$ (ஆ) $\frac{21}{95}$ (இ) $\frac{18}{95}$ (ஈ) $\frac{3}{95}$]

கணவியல் வாயிலாக நிகழ்தகவைப் பெறுதல் (Set Theoretic Approach to Probability)

நாம் கண இயலுக்கும், நிகழ்தகவுக்கும் உள்ள தொடர்பைப் பெறுவதற்கு முன் கணவியலில் சில வரையறைகளைக் காண்போம்.

வரையறை 1

A, B என்ற இரு கணங்கள் சமமாக இருக்கவேண்டுமானால், A-யிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் B-யிலும், B-யிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் A-யிலும் இருக்கவேண்டும். இது $A = B$ என குறிக்கப் படுகிறது.

வரையறை 2

B-யில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் A-யில் இருந்தால் B, A-யின் பகுதிக் கணம் (subset) எனப்படும். இது $B \subset A$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது. B-யின் ஒவ்வொரு புள்ளியும் A-யில் இருப்பதோடு, மேலும் B-யில் இல்லாத ஏதேனும் ஒரு புள்ளி யாவது A-யில் இருந்தால், B, A-யின் முறையான பகுதிக் கணம் (proper subset) என்று கூறப்படும்.

வரையறை 3

அகில கணம் (அடிப்படை கணம்) S எனக்குறிக்கப்பட்டு, மற்றக்கணங்கள் யாவும் S-ன் பகுதிக் கணங்களாகக் கருதப் படுகின்றன.

வரையறை 4

அகில கணம் S-ஐப் பொறுத்து, A-யின் நிரப்புக் கணம், A-யில் அமைந்து இராத, S-ல் உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளின் கணம் ஆகும். இது $\bar{A}$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.

வரையறை 5

புள்ளிகளே இல்லாத கணம், பூஜ்ய கணம் (null set) எனப்படும். இது 'ϕ' எனக் குறிக்கப்படுகிறது. பூஜ்யக் கணம் ஒரு தனிப்பட்ட கணம் ஆகும். இது ஒவ்வொரு கணத்திற்கும் பகுதிக் கணமாகும்.

கூறுவெளி (Sample space)

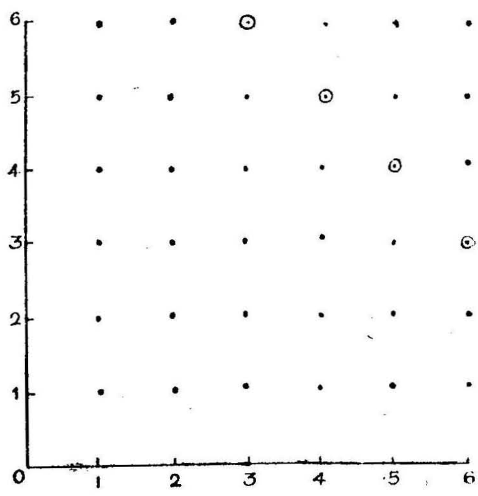
ஒரு சோதனையை நடத்தும்போது அதன் விளைவுகள் கொண்ட கணத்தை விளைவு கணம் (out-come set) அல்லது கூறுவெளி (sample space) என அழைக்கிறோம். இதில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியையும் கூறுப் புள்ளி (sample point) எனக் கூறுகிறோம்.

எ.கா. ஒரு பகடையை உருட்டும்போது அதன் விளைவாக நமக்குக் கிடைக்கும் கூறுவெளி {1, 2, 3, 4, 5, 6} ஆகும்.



படம் 6·1

இக்கணம் 6 கூறு புள்ளிகளைக் கொண்டுள்ளது. இதனை ஒற்றைப் பரிமாணக் கூறுவெளி (படம் 6·1) எனலாம். ஆனால், இரு பகடைகளை உருட்டும்போது கிடைக்கும் விளைவு கணம் 36 கூறு புள்ளிகளைக் கொண்டதாகும். இதனை இரு பரிமாணக் கூறு வெளி என்கிறோம். இதுபோலவே K பரிமாணக் கூறுவெளிகளும் உண்டு. இரு பகடைகளை வீசும்போது பெறப்படும் இரு பரிமாணக் கூறுவெளியின் புள்ளிகள் கீழே படத்தில் காட்டப் பட்டிருக்கின்றன.

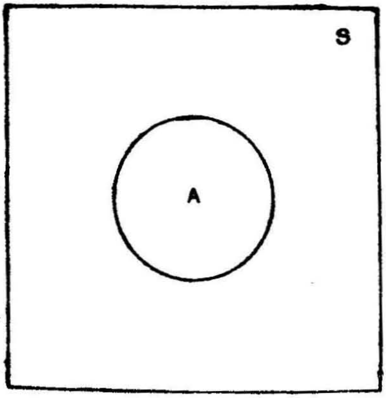


படம் 6·2

நிகழ்ச்சி (Event)

கூறுவெளியின் ஏதாவது ஒரு பகுதிக் கணம் நிகழ்ச்சி என்று கூறப்படும். ஒரு பகடையை உருட்டும்போது ஒற்றைப் படை எண் கிடைப்பதை நிகழ்ச்சியாகக் கொண்டால் இது ஒற்றைப் பரிமாணக் கூறுவெளியின் பகுதிக் கணம் {1, 3, 5}

ஆகும். இரண்டு பகடைகளை உருட்டும்போது கிடைக்கும் புள்ளி முகங்களின் கூடுதல் 9 ஆக இருக்கவேண்டுமானால் (6.2) படத்தில் ⊙ குறியிட்ட இடங்களில் உள்ள கூறு புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். இது பகடைகளுக்கான மாதிரிக் கூறுவெளியின் பகுதிக் கணம் $\{(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)\}$ ஆகும். எனவே, நிகழ்ச்சி என்பது கூறு வெளியின் பகுதிக் கணம் ஆகும்.



படம் 6·3

அகில கணம் (Universal set) S-ன் பகுதிக் கணமாக A என்ற நிகழ்ச்சி காட்டப்பட்டுள்ளது. (படம்6.3)

நிகழ்ச்சிகள் A, B இவற்றின் சேர்க்கை $A \cup B$ அல்லது $A + B$

ஒரு கூறுவெளி S-ல் A, B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகள் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன. A அல்லது B அல்லது இரண்டிலுமே காணப்படும் எல்லாப் புள்ளிகளையும் கொண்டுள்ள நிகழ்ச்சி A, B இவற்றின் கூட்டுச் சேர்க்கை ஆகும். இது $A \cup B$ அல்லது $A + B$ என்று குறிக்கப்படும்.

எ.கா. 1. ஒரு நாணயம் மூன்று முறை சுண்டி விடப்படுகிறது. கூறுவெளி $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8\}$ ஆகும். இங்கு,

$P_1 = (H, H, H)$, $P_2 = (H, H, T)$, $P_3 = (H, T, H)$

$P_4 = (T, H, H)$ $P_5 = (H, T, T)$, $P_6 = (T, H, T)$

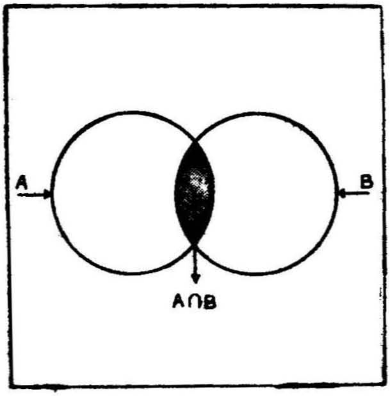
$P_7 = (T, T, H)$ $P_8 = (T, T, T)$.

A என்பது 3 தலைகளைப் பெறுவதற்கான நிகழ்ச்சி ஆனால் $A = \{P_1\}$.

B என்பது 2 தலைகளைப் பெறுவதற்கான நிகழ்ச்சியாகக் கொள்வோம்: $B = \{P_2, P_3, P_4\}$ குறைந்தது 2 தலைகளையாவது பெறுவதற்கு உரிய நிகழ்ச்சி $A \cup B = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$

எ.கா. 2. ஒரு பகடையை வீசும் நிகழ்ச்சியில் A என்பதை, ஒற்றைப் படை எண்களைப் பெறுவதற்கான நிகழ்ச்சியாகவும், B என்பதை 3-ன் மடங்கு பெறுவதற்கான நிகழ்ச்சியாகவும் கொள்வோம்.

நிகழ்ச்சி $A = \{1, 3, 5\}$
நிகழ்ச்சி $B = \{3, 6\}$
நிகழ்ச்சி $A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}$.



படம் 6.4

(2) A, B என்பவை S-ல் உள்ள இரண்டு நிகழ்ச்சிகள்.

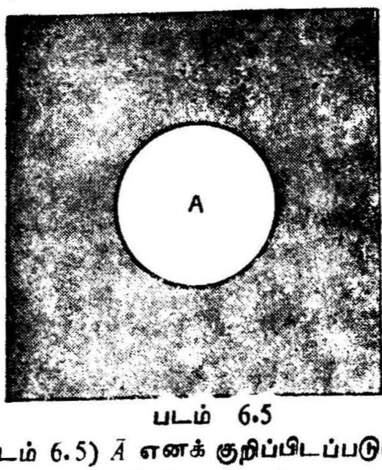
A, B இரண்டிலும் உள்ள புள்ளிகளைக் கொண்ட நிகழ்ச்சி A, B-யின் வெட்டு எனப்படும். இது $A \cap B$ (படம் 6.4) அல்லது AB எனக் குறிக்கப்படும்.

எ.கா. 3 X, Y, Z என்பவை பழுதடைந்த மின் விளக்குகள். V, X, Y, U, W என்பவை சிவப்பு நிற விளக்குகள்.

பழுதடைந்த விளக்கை A எனவும், சிவப்புநிற விளக்கை B எனவும் குறித்தால், பழுதடைந்த சிவப்புநிற விளக்கு,

$= A \cap B = \{X, Y\}$ ஆகும்.

எ. கா 4. A என்பதை, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 இவற்றிலிருந்து ஒரு ஒற்றைப் படை எண்ணைத் தேர்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சியாகக் கொள்வோம்.



படம் 6.5

B என்பது அதே எண்களைக் கொண்டு, ஒரு இரட்டைப்படை எண்ணை அமைக்கும் நிகழ்ச்சியாகும். $A \cap B = \phi$.

நிரப்புகணம் $\bar{A}$

A என்பது ஒரு நிகழ்ச்சியானால், கூறு வெளியைப் பொறுத்து A-யின் நிரப்புகணம், (படம் 6.5) $\bar{A}$ எனக் குறிப்பிடப்படும். A நிகழாமல் இருக்கும் போதுதான் $\bar{A}$ நிகழும் தன்மை உடையது.

$A - B$

(4) A, B என்பவை இரண்டு நிகழ்ச்சிகளானுல், $(A - B)$ என்பது, A நிகழ்ந்து B நிகழாமல் இருக்கும் நிகழ்ச்சி ஆகும். இது $A\bar{B}$ என்றும் குறிப்பிடப்படும்.

(5) A, B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளில் பொதுவான கூறு புள்ளிகள் ஒன்றுகூட இல்லாமல் இருக்கும்போது, அவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் (mutually exclusive events).

கண இயலுக்கும் நிகழ்ச்சிக்கும் உள்ள தொடர்பு

கண இயல்	நிகழ்ச்சி
(1) அடிப்படைக் கணம்	கூறு வெளி, விளைவு கணம்
(2) அடிப்படைக் கணத்தின் A என்ற பகுதிக் கணம்	A என்னும் நிகழ்ச்சி.
(3) $A = \phi$	A நிகழமுடியாது
(4) A-ன் நிரப்பி $= \bar{A}$	A நிகழ இயலாமை
(5) $X = A \cap B = AB$	X என்பது A, B என்னும் நிகழ்ச்சிகள் ஒருங்கே நிகழ்வது.
(6) $X = A \cup B = A + B$	X என்பது A, B-யில் ஏதேனும் ஒன்று நிகழ்வது

நிகழ்ச்சிகள் வெண் விளக்கப் படங்களில் காட்டப் பட்டுள்ளன.

நிகழ்ச்சிகளின் இயற்கணிதப் பண்புகள்

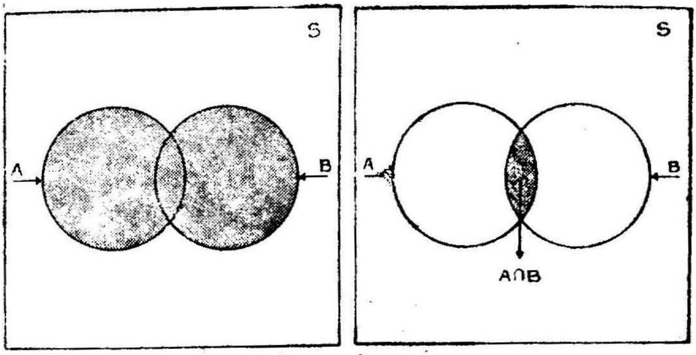
1. மாற்று விதி (Commutative Law)

A, B இரு நிகழ்ச்சிகளானுல்,

(அ) $A \cup B = B \cup A$

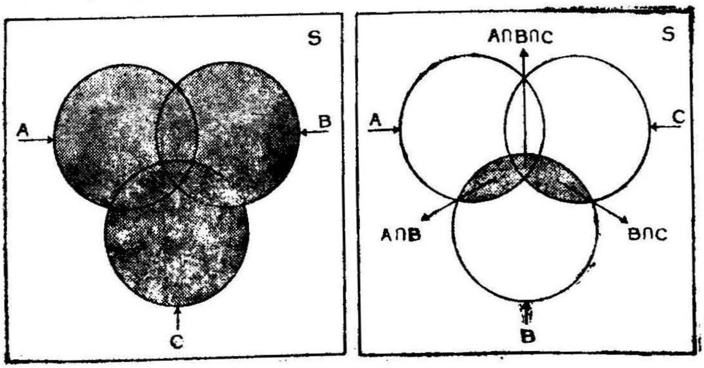
(ஆ) $A \cap B = B \cap A$ இது படம் 6·6 லிருந்து தெளிவாக விளங்குகின்றது.

$A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$



படம் 6·6

2. சேர்ப்பு விதி (Associative Law)



படம் 6·7

A, B, C மூன்று நிகழ்ச்சிகளானால்,

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

எனப் படம் 6·7 விளக்குகின்றது.

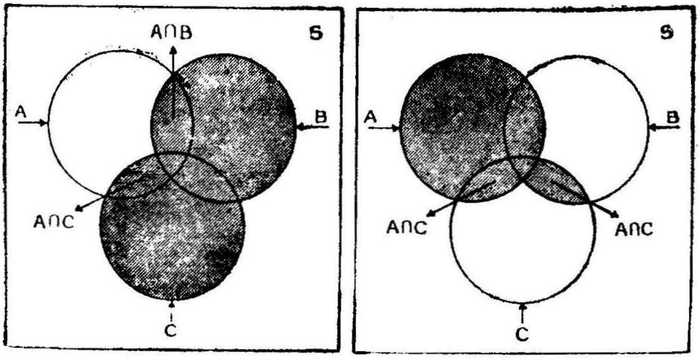
3. பங்கீட்டு விதி (Distributive Law)

A, B, C மூன்று நிகழ்ச்சிகளானால்,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

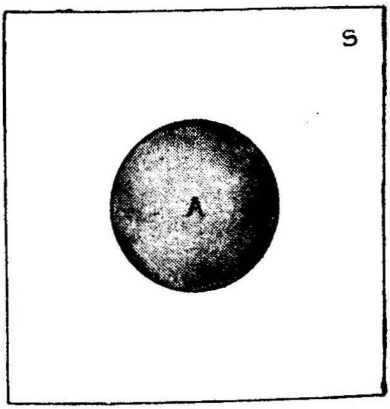
(படம் 6·8)



படம் 6·8

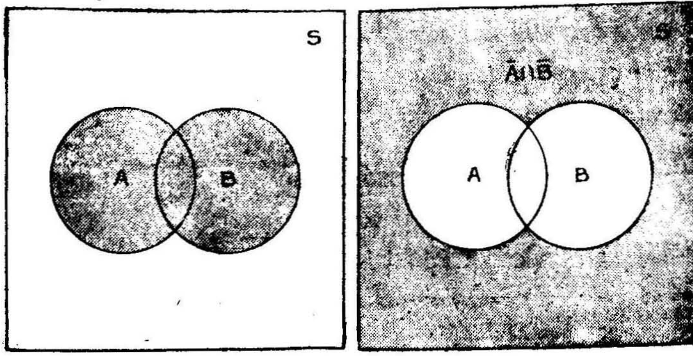
4. மாற்றுத்தன்மை விதி (Idampotency Law)

$A \cup A = A$ $\quad$ $A \cap A = A$ $\quad$ (படம் 6·9)



படம் 6·9

5. டி மார்கனின் நிகழ்ச்சிகளின் விதி (De Morgan's Law of Events)



$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\quad$ படம் 6·10 $\quad$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

மேற்காணும் விதிகளிலிருந்து, பின்வரும், டிமார்கனின் விதி பெறப்படுகிறது.

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = (\bar{A} \cap \bar{B}) \qquad \text{(படம் 6·10)}$$

நிகழ்தகவு

சோதனைகளின் எண்ணிக்கை பெருமளவில் இருக்கும்போது கூறுவெளி S, N கூறு புள்ளிகளை உடையதாக இருக்கிறது. இதில் N_A நிகழ்ச்சிகள் A என்னும் நிகழ்ச்சிக்கு உரிய பண்பினை உடையன வாயின் $P(A) = \frac{N_A}{N}$. E என்பது ஒரு சோதனை. S என்பது, E-யுடன் தொடர்பு கொண்ட ஒரு கூறுவெளியாகும். S-ல் உள்ள ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியுடன் $P(A)$, (A-யின் நிகழ்தகவு) என்ற ஒரு மெய்யெண்ணைத் தொடர்பு கொள்ளச்செய்வோம்.

நிகழ்தகவு $P(A)$ பின்வரும் வெளிப்படை உண்மைகளுக்கு (axioms) உட்பட்டுளளது.

1. $P(A) \geq 0$

2. $P(S) = 1$

3. A, B என்பவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சி களானால்,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

4. A_1, A_2 ...... என்பவை S-ல் உள்ள ஒன்றையொன்று விலக்கும் தொடர் நிகழ்ச்சிகளானால், அதாவது $A_i \cap B_j = \phi$ $[i, j = 1, 2, 3 \ldots\ldots i \neq j.]$

என இருந்தால்,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots\ldots\ldots$$

(3)-லிருந்து, n ஒரு வரையுற்ற எண்ணாக இருந்தால்,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots\ldots + P(A_n)$$

நிகழ்தகவின் வெளிப்படை உண்மைகளிலிருந்து, பின்வரும் தேற்றங்கள் பெறப்படுகின்றன.

தேற்றம் 1

S கூறுவெளியாகவும், S-ல் உள்ள ஒரு நிகழ்ச்சி A-யாகவும் உள்ளன. நிகழ்ச்சி A நிகழாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= 1 - P(A)$

அதாவது $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

நிறுவுதல்

$\bar{A}$, நிகழ்ச்சி A-யின் நிரப்பு நிகழ்ச்சி ஆதலால்,

$$A \cap \bar{A} = \phi.$$

மேலும், $A \cup \bar{A} = S.$

$$\therefore \quad P(S) = P(A \cup \bar{A})$$

$$P(S) = P(A) + P(\bar{A}) \text{ [எடுகோள் 3-ன் படி]}$$

$$1 = P(A) + P(\bar{A}) \text{ [எடுகோள் 2 ன் படி]}$$

$$\therefore \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

தேற்றம் 2

கூறுவெளி S-ல் உள்ள A என்ற ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சிக்கு $0 \le P(A) \le 1$.

நிறுவுதல்

$P(A) \ge 0$ [எடுகோள் 1-ன் படி]

$$1 = P(A) + P(\bar{A})$$

$$\therefore \quad P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$P(\bar{A}) \ge 0$ ஆனதால், $P(A) \le 1$.

$$\therefore \quad 0 \le P(A) \le 1.$$

தேற்றம் 3

ஒரு கூறுவெளி, E என்ற சோதனையுடன் தொடர்பு கொண்டது. $P(\phi) = 0$ எனக் காட்டுக.

நிறுவுதல்

$$\bar{S} = \phi$$

$$S \cap \bar{S} = \phi$$

$$S \cup \bar{s} = S$$

$$\therefore \quad P(S \cup \bar{s}) = P(S)$$

$$\therefore \quad P(S) + P(s) = P(S)$$ [எடுகோள் 3-ன் படி.]

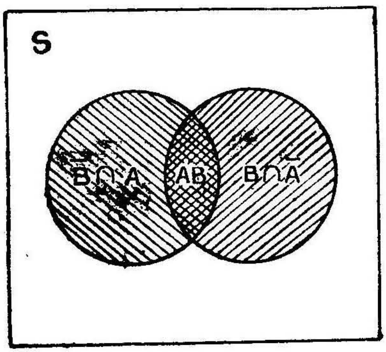
$$\therefore \quad P(\bar{s}) = 0$$

அதாவது $P(\phi) = 0$

நிகழ்தகவின் கூட்டல் விதி (Law of Addition of Probabilities)

A, B என்ற ஏதேனும் இரு நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாயிராவிடில்

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



படம் 6·11

நிறுவுதல்

$$A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$= P(A) + P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) - P(A \cap B)$$

$$P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) = P[(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)]$$

$$= P[(\bar{A} \cup A) \cap B]$$

$$= P(S \cap B)$$

$$= P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

குறிப்பு : A, B என்னும் இரு கணங்களும் தொடர்பற்றவை (disjoint) ஆயின் $A \cap B = 0$. எனவே $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. எனவே A, B ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாயின்,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

நிகழ்தகவுக் கூட்டல் விதியை n நிகழ்ச்சிகளுக்கு விரித்துரைத்தல்

$A_1, A_2 \ldots\ldots A_n$ என்பவை ஒன்றையொன்று தவிர்க்கும் நிகழ்ச்சிகளாய் இராவிடில் இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று நடப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots + A_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} P(A_i A_j)$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ i<j<k}}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} P(A_i A_j A_k) \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^n P(A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots A_n)$$

நிறுவுதல்

A_1, A_2 என்னும் இரு நிகழ்ச்சிகளை எடுத்துக்கொள்வோம். A_1 என்னும் நிகழ்ச்சி கீழ்க்காணும் ஒன்றையொன்று தவிர்க்கும் வழிகளில் ஏதேனும் ஒன்றில் நிகழலாம்.

$$A_1 \bar{A}_2, \; A_1 A_2$$

$$P(A_1 \bar{A}_2 + A_1 A_2) = P(A_1)$$

இதுபோலவே $P(\bar{A}_1 A_2 + A_1 A_2) = P(A_2)$

$$P(A_1) + P(A_2) = P(A_1 A_2) + [P(A_1 \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 A_2) + P(A_1 A_2)]$$

$$= P(A_1 + A_2) + P(A_1 A_2)$$

[$A_1 + A_2$ என்பது A_1, A_2 என்னும் இரு நிகழ்ச்சிகளில் ஏதேனும் ஒன்று நிகழ்வதைக் குறிக்கிறது].

$$\therefore \quad P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) \quad \ldots \; I$$

சமன்பாடு I-ல் A_2 விற்குப் பதிலாக $A_2 + A_3$-ஐப் பிரதியிட

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2 + A_3) - P[A_1(A_2 + A_3)]$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 A_3) - P[A_1 A_2 + A_1 A_3]$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 A_3) - [P(A_1 A_2) + P(A_3 A_1) - P(A_1 A_2 A_3)]$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - [P(A_1 A_2) + P(P_2 A_3) + P(A_3 A_1)] + P(A_1 A_2 A_3)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} P(A_i) - \sum_{i=1}^{3} \sum_{\substack{j=1 \\ i<j}}^{3} P(A_i A_j) + \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{\substack{k=1 \\ i<j<k}}^{3} P(A_i A_j A_k) \quad \ldots \; II$$

சமன்பாடு II-ல் $A_3 = A_3 + A_4$ எனப் பிரதியிட்டுவரும் சமன்பாட்டில் மீண்டும் $A_4 = A_4 + A_5$ எனப் பிரதியிடவேண்டும் இவ்வாறே தொடர்ந்து எழுதிக்கொண்டே சென்று, ஒவ்வொன்றிலும் சமன்பாடு I-ஐப் பயன்படுத்தினால்.

$$P(A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i<j}}^{n} P(A_i A_j)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ i<j<k}}^{n} P(A_i A_j A_k)$$

$+ \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots\ldots A_n)$ எனக் கிடைக்கும்.

குறிப்பு 1. நிகழ்ச்சிகள் $A_1, A_2, \ldots\ldots An$ என்பவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாயின்

$P(A_i A_j) \quad = 0 \; i \neq j \; [i, j = 1, 2, 3 \ldots n]$

$P(A_i A_j A_k) = 0 \; i \neq j \neq k \; [i, j, k = 1, 2, 3 \ldots n]$

……………………………………………………………

$P(A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots\ldots An) = 0$

எனவே $P(A_1 + A_2 + \ldots An) = P(A_1) + P(A_2)$
$+ P(A_3) + \ldots\ldots + P(An)$

2. S_r என்பது n நிகழ்ச்சிகளில் சரியாக r நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவின் கூட்டுத் தொகை எனில், $P(A_1 + A_2 + \ldots + An) = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-1} S_n$

எ.கா. (அ) A, B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளில் $A \subseteq B$ $P(A) \leq P(B)$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$B = A \cup (B \cap \bar{A})$$

$\therefore \; P(B) = P(A) + P(B \cap \bar{A})$

$\because \; A, B \cap \bar{A}$ ஒன்றை ஒன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்.

$\therefore \; P(B) > P(A) \quad [P(B \cap \bar{A}) > 0]$

(ஆ) A, B என்ற இரு ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளில் $P(B) = 2P(A)$, $A \cup B = S$, $P(A)$-ஐக் காண்க.

தீர்வு

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) = P(S) = 1$$

$$\therefore \quad P(A) + 2P(A) = 3P(A) = 1$$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{1}{3}$$

(இ) $\{A, B, C\}$ என்ற சோதனையுடன் A, B, C என்ற மூன்று நிகழ்ச்சிகள் தொடர்பு கொண்டுள்ளன.

$P(B) = \frac{3}{2} P(A)$, $P(C) = \frac{1}{3} P(B)$ எனவும் இருந்தால் $P(A)$-ஐக் காண்க.

$S = A \cup B \cup C$

A, B, C ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாதலால்,

$$P(A) + P(B) + P(C) = P(S) = 1$$

$$P(A) + \frac{3}{2} P(A) + \frac{1}{2} P(A) = 1$$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{1}{3}$$

எ. கா. ஒரு கூறு வெளியில் 4 புள்ளிகள் இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

$S = \{E, E_2, E_3, E_4\}$. எந்தச் சார்பு S-ன் மேல் ஒரு நிகழ்தகவு வெளியை வரையறுக்கிறது ?

(i) $P(E_1) = \frac{1}{2}$, $P(E_2) = \frac{1}{3}$, $P(E_3) = \frac{1}{4}$, $P(E_4) = \frac{1}{5}$

(ii) $P(E_1) = \frac{1}{2}$, $P(E_2) = \frac{}{4}$, $P(E_3) = -\frac{1}{4}$ $P(E_4) = \frac{1}{2}$

(iii) $P(E_1) = \frac{1}{2}, P(E_2) = \frac{1}{4}, P(E_3) = \frac{1}{8}, P(E_4) = \frac{1}{8}$

(விடை (i) இல்லை (ii) இல்லை (iii) ஆம்)

குறிப்பு [$\Sigma p_i = 1, p_i > 0$ என்ற தற்கோள்களைப் பயன்படுத்தவேண்டும்.]

எ.கா. A, B என்பவை ஒரு சோதனையின் விளைவுகள்.

$P(A) = 0{\cdot}4, \quad P(A \cup B) = 0{\cdot}7, \quad P(B) = p$ எனத் தரப்பட்டிருந்தால், p-யின் எந்த மதிப்புக்கு நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்குவானவாக அமையும்?

தீர்வு

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A, B ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாயின்,

$$P(A \cap B) = 0.$$

$$\therefore \quad 0{\cdot}7 = 0{\cdot}4 + p$$

$$p = \mathbf{0{\cdot}3}.$$

எ.கா. ஓர் உற்பத்தியாளர் 1, 2, 3, 4 என்ற 4 விற்பனையாளர்களிடம் இயந்திரங்களுக்கான சில பாகங்களை வாங்குகிறார். அடுத்தடுத்த இரண்டு நாட்களில் கொடுக்கப்பட்ட விண்ணப்பங்களைப் பொறுத்து, (1, 4) என்பது, முதல் நாள் 1-ஆவது விற்பனையாளருக்கு பொருளுக்கான விண்ணப்பம் கொடுக்கும் நிகழ்ச்சியையும், (2, 4) என்பது இரண்டாம் நாள் 4-ஆவது விற்பனையாளருக்கு விண்ணப்பம் கொடுக்கும் நிகழ்ச்சியையும் குறிக்கிறது. A என்பது 1-ஆவது விற்பனையாளர் இரண்டு விண்ணப்பங்களில் ஒன்றையாவது பெறும் நிகழ்ச்சி ஆகவும், B என்பது ஒரே விற்பனையாளர் 2 விண்ணப்பங்களைப் பெறும் நிகழ்ச்சி ஆகவும், C என்பது 1 ஆவது, 3-ஆவது விற்பனையாளர்கள் ஒரு விண்ணப்பத்தையும் பெறாத நிகழ்ச்சியாகவும் கொள்வோம். ஒவ்வொன்றிற்கும் உரிய கூறுப்புள்ளிகளை விவரி.

(அ) கூறுவெளியின் முழுமைத்தொகுதி (ஆ) A (இ) B (ஈ) C (உ) $\bar{A}$ (ஊ) $\bar{B}$ (எ) $B \cup C$ (ஏ) $A \cap B$ (ஐ) $A \cap C$ (ஒ) $\overline{A \cap B}$ (ஓ) $A - B$.

(அ) கூறுவெளியின் முழுமைத்தொகுதி கூறுப் புள்ளிகள் (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4).

(ஆ) A-யின் கூறுபுள்ளிகள் (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 1), (4, 1).

(இ) B-யின் கூறுபுள்ளிகள் (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)

(ஈ) C-யின் ,, (2, 2); (2, 4); (4, 2); (4, 4)

(உ) $\bar{A}$-ன் ,, (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 2); (4, 3); (4, 4)

(ஊ) $\bar{B}$-ன் ,, (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 1); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3);

(எ) $B \cup C$-யின் ,, (1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (2, 4); (4, 2).

(ஏ) $A \cap B$-யின் ,, (1, 1).

(ஐ) $A \cap C = \phi$

(ஒ) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ என்பதால் $\overline{A \cup B}$ யின் கூறு புள்ளிகள் (2, 3); (2, 4); (3, 2); (3, 4); (4, 2); (4, 3).

(ஓ) $(A - B)$ யின் கூறுபுள்ளிகள் (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 1), (4, 1).

எ.கா. $P(A) = 0{\cdot}5$, $P(B) = 0{\cdot}2$, $P(A \cap B) = {\cdot}1$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால், கீழ்க்கண்ட நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(i) $P(A \cup B)$ (ii) $P(\bar{A} \cap B)$ (iii) $P(A \cap \bar{B})$ iv) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

(i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= 0{\cdot}50 + 0{\cdot}20 - 0{\cdot}10$$

$$= 0{\cdot}60$$

(ii) $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

$= \cdot 20 - \cdot 10$

$= \cdot \mathbf{10}$

(iii) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$= \cdot 50 - \cdot 10$

$= .\mathbf{40}$

(iv) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(B') - P(A \cap B')$

$= (1 - 0{\cdot}2) - 0{\cdot}40$

$\mathbf{0{\cdot}40.}$

(எ-டு) ஓர் சந்தையில்,மக்களில் 31%பேர் பொருள் Aயையும் 43% பொருள் Bயையும், 29% பேர் பொருள் Cயையும் வாங்கு வதாகக் கணக்கெடுக்கப்பட்டது. மேலும், A, B இரண்டையும் 11% மக்களும், B, C இரண்டையும் 9% மக்களும், A C, இரண்டை யும் 12% மக்களும்; A, B, C மூன்றையும் 4% மக்களும் வாங்கு கிறார்கள். எந்தவொரு பொருளையும் வாங்காதவர்கள் எத்தனை சதவீதம் பேர்?

A ஆனது பொருள் A வாங்குபவர்களையும், B, பொருள் B வாங்குபவர்களையும், C பொருள் C வாங்குபவர்களையும் குறிக் கட்டும்.

$\therefore \quad = P(A) = 0{\cdot}31 \qquad P(A \cap B) = 0.11$

$P(B) = 0.43 \qquad P(B \cap C) = 0.09$

$P(C) = 0{\cdot}29 \qquad P(A \cap C) = 0.12$

$P(A \cup B \cap C) = 0.04.$

$\therefore \; P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B)$
$- P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C).$

$= 0{\cdot}31 + 0{\cdot}43 + 0{\cdot}29 - 0{\cdot}11 - 0{\cdot}09$

$- 0{\cdot}12 + 0{\cdot}04.$

$= 0{\cdot}75.$

$$P(A' \cap B' \cap C') = 1 - P(A \cap B \cap C)$$
$$= 1 - 0.75$$
$$= 0{\cdot}25.$$

75% மக்கள், மூன்றில் குறைந்தது ஒரு பொருளையாவது வாங்குவார்கள். எனவே, 25% பேர் மூன்றில் எந்தவொரு பொருளையும் வாங்கமாட்டார்கள்.

பயிற்சி

1. 'நிகழ்தகவு வெளி' என்பதனை விவரி. மூன்று துப்பாக்கி களைக் கொண்டு, ஒவ்வொன்றாக ஒரு குறியை நோக்கிச் சுடுகிறார்கள். முதல், இரண்டாவது, மூன்றாவது துப்பாக்கிகளைக் கொண்டு குறியைச் சுடுவதை முறையே A, B, C என்ற நிகழ்ச்சிகளைக் குறிக் கட்டும்; நிகழ்ச்சிகள் சார்பற்றவை எனக் கொண்டு, $P(A) = a$, $P(B) = b$, $P(C) = c$ என்ற நிகழ்தகவுகளைக் கொண்டவையாக இருந்தால்,

A, B, C இவற்றின் மூலமாகப் பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளைக் குறிக்கவும்.

(i) குறியைச் சுடாமலே இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி.

(ii) குறைந்தது இரு முறையாவது சுடுவதற்கான நிகழ்ச்சி.

(iii) எல்லா முறைகளிலும் சுடுவதற்கான நிகழ்ச்சி.

(iv) முதல் முறை தவறி, இரண்டாவது, மூன்றாவது முறை களில் வெற்றி காண்பது.

2. (அ) ஒரு சோதனையில் ஒரு நாணயம் 4 முறைகள் வீசப் படுகிறது. கூறுவெளியை விவரி.

(ஆ) ஒரு நாணயத்தை n முறைகள் வீசும்போது உருவாகும் கூறுவெளி என்ன?

(இ) தலை கிடைக்கும்வரை நாணயம் தொடர்ந்து வீசப்படும்போது உருவாகும் கூறுவெளி யாது?

3. வென் படங்களைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் தொடர்புகளை நிறுவுக.

(அ) $(A \cup B) - B = B - AB = A\bar{B}$

(ஆ) $(\bar{A} \cup \bar{B}) = (\overline{A \cap B})$

4. x_1, x_2, x_3, x_4 என்ற புள்ளிகள் கூறுவெளி Sல் உள்ளன.

$P(A)$ என்ற கணச் சார்பு பின்வரும் மதிப்புகளை உடையதாக உள்ளது.

$$A_1 = (x_1, x_2) \qquad P(A_1) = \frac{4}{10}$$

$$A_2 = (x_3, x_4) \qquad P(A_2) = \frac{6}{10}$$

$$A_3 = (x_1, x_2, x_3) \qquad P(A_3) = \frac{4}{10}$$

$$A_4 = (x_2, x_3, x_4) \qquad P(A_4) = \frac{7}{10}$$

நிறுவுக.

(i) (பூஜ்யகணத்தையும் சேர்த்து) x புள்ளிகளின் கணங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை 16.

(ii) கூறுபுள்ளியே இல்லாத கணத்திற்கு நிகழ்தகவு பூஜ்யம் எனினும், மறுதலை எப்போதும் உண்மையாக இராது என நிறுவுக.

(அதாவது ஒரு கணத்திற்கு நிகழ்தகவு பூஜ்யமாக இருக்கலாம்; ஆனால், அக்கணத்தில் சில கூறுபுள்ளிகள் இருக்கலாம்.)

5. $S = [E_1, E_2, E_3, E_4]$, P Sன் மேல் வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு நிகழ்தகவுச் சார்பு.

$$P[E_3] = P[E\ ] = \frac{1}{4},\ P[E_1] = 2P[E_2] \text{ என்றால்,}$$

$$P[E\ ] = \frac{1}{3},\ P[E_2] = \frac{1}{6} \text{ என நிறுவுக.}$$

நிகழ் தகவின் பெருக்கல் விதி

A, B என்னும் இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கு $P(A \cap B) = P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$ அல்லது $P(B \cap A) = P(AB) = P(B) \cdot P(A/B)$

இங்கு $P(A/B) = B$ கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது Aயின் நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவாகும் (conditional probability)

$P(B/A)$ = நிகழ்ச்சி A ஏற்கெனவே நடந்துள்ளபோது Bயின் நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவாகும்.

கூறுவெளி 'S' ல் மொத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை N ஆக இருக்கட்டும். இவற்றில் A என்னும் நிகழ்ச்சிக்குரிய புள்ளிகள் N_A ஆக இருக்கட்டும். B என்னும் நிகழ்ச்சிக்குரிய புள்ளிகள் N_B ஆகவும், $A \cap B$ என்னும் நிகழ்ச்சிக்குரியவை; N_{AB} ஆகவும் இருக்கட்டும். எனவே நிபந்தனைக்குட்படாத நிகழ்தகவுகள் கீழ்க் காணும் வகையில் கொடுக்கப்படுகின்றன.

$$P(A) = \frac{N_A}{N}, \quad P(B) = \frac{N_B}{N}, \quad P(A \cap B) = \frac{N_{AB}}{N}$$

$P(A/B)$ என்பது ஏற்கெனவே நடந்துள்ளபோது Aயின் நிகழ்தகவைக் குறிப்பதால், இது கூறுவெளி 'S' ன் பகுதியாகிய N_B க்கும் N நிகழ்ச்சிகளுக்கும் உள்ள விகிதமாகும்.

$$P(A/B) = \frac{N_{AB}}{N_B}$$

இதுபோன்றே,

$$P(B/A) = \frac{N_{AB}}{N_A}$$

$$P(A \cap B) = \frac{N_{AB}}{N}$$

$$= \frac{N_{AB}}{N_B} \cdot \frac{N_B}{N}$$

$$= P(A/B) \cdot P(B)$$

இதேபோன்று,

$$P(A \cap B) = \frac{N_{AB}}{N}$$

$$= \frac{N_{AB}}{N_A} \times \frac{N_A}{N}$$

$$= P(B/A) \times P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(AB) = P(A) \times P(B/A)$$

$$= P(B) \times P(A/B)$$

எனவே $P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$ என இருக்கும்போது தான் முறையே $P(B/A)$, $P(A/B)$ இவற்றை வரையறுக்கமுடியும்.

$A_1, A_2 \ldots\ldots A_n$ என்பவை n சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளில்லாவிடில் பெருக்கல் விதியின் பொது அமைப்பு:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3/A_1 A_2) \ldots P(A_n/A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$$

இங்கு $P(A_i/A_j A_k \ldots A_l)$ என்பது $A_j, A_k, \ldots A_l$ என்னும் நிகழ்ச்சிகள் ஏற்கெனவே நடந்துள்ளபோது A_i யின் நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவைக் குறிக்கிறது.

A, B என்பவை சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாயின்

$P(B/A) = P(B)$. அதாவது A கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது Bயின் நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவு, Bயின் நிபந்தனைக்குட்படாத நிகழ்தகவாகும். ஏனெனில் A, B சார்பற்றவையாதலால் Aயின் நிகழ்தகவு Bயைப் பாதிப்பதில்லை.

இதுபோன்றே $P(A/B) = P(A)$

எனவே, A, B சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாயின்

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B/A) = P(A)\, P(B)$$

அல்லது

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(A)\, P(B).$$

எ.கா. ஒரு பல்கலைக் கழகத்தில் பட்டதாரிகளில் 100 பேர் அடங்கிய ஒரு தொகுதி பின்வரும் அடிப்படையில் அமைந்துள்ளது.

	அறிவியல்	கலை	தொழிற் கல்வி	மொத்தம்
ஆண்	15	25	10	50
பெண்	20	15	15	50
மொத்தம்	35	40	25	100.

தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஓர் ஆண் அறிவியல் பட்டதாரியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

A என்பது 100 பேர்களில் ஒருவரைத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சியாகவும், *B* என்பது அறிவியல் பட்டதாரி ஒருவரைத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சியாகவும் கொள்ளுவோம். தேர்ந்து எடுக்கப்பட்ட அறிவியல் பட்டதாரி, ஆணாக இருப்பது வேண்டிய நிகழ்ச்சி தேவையான நிகழ்ச்சியாகும்.

எனவே $P(B/A)$-ஐக் கணக்கிட வேண்டும்.

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(A/B) = 15/100,\ P(A) = 50/100.$$

$$\therefore\quad P(B/A) = \frac{15/100}{50/100} = \frac{3}{10}$$

எ. கா. 10 பகடைகளை ஒரு முறை வீசும்போது, புள்ளிமுகம் 1 ஒரு முறையாவது கிடைப்பதாகத் தரப்பட்டிருக்கும்போது, இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட முறைகளில் புள்ளிமுகம் '1' கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு pயைக் கணக்கிடுக.

10 பகடைகளை ஒரு முறை வீசும்போது குறைந்தது ஒரு முறையாவது புள்ளிமுகம் '1' கிடைப்பதை '*A*' எனவும், ஒரு வீச்சில் அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட தடவைகளில் புள்ளிமுகம் '1' கிடைப்பதை '*B*' எனவும் குறிப்போம்.

$$P(B/A) = \frac{P(B)}{P(A)} \qquad [\because\ A \supset P,\ A \cap B = B]$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{A}) - P\text{ (சரியாக ஒரு முறை புள்ளி முகம் 1 கிடைப்பது)}$$

$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} - \frac{10 \cdot 5^{9}}{6^{10}}$$

[10 பகடைகளில் ஏதேனும் ஒன்றில் புள்ளிமுகம் '1' ம், 9 பகடைகளில் மற்ற 5 புள்ளி முகங்களும் கிடைப்பதால் சாதகமான வழிகள் $10C_1 5^9$ தீர்வாய்வான வழிகள் $= 6^{10}$,

சரியாக ஒரு முறை, புள்ளிமுகம் '1' கிடைப்பதற்கான

நிகழ்தகவு $= \dfrac{10 \cdot 5^9}{6^{10}}$]

எ. கா. ஒரு மாணவன் கணிதத்தில் 100% மதிப்பெண் பெறுவற்குரிய நிகழ்தகவு 0·20· கணிதத்தில் 100% மதிப்பெண் பெற்று பௌதிகத்திலும் 100% மதிப்பெண் பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு 0 75· பௌதிகம், கணிதம் இரண்டிலும் 100% மதிப் பெண் பெற்று வேதியியலிலும் 100% மதிப்பெண் பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு 0.90· எனவே, ஓர் மாணவன் மூன்றிலும் 100% மதிப் பெண் பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

M, p, C என்பன முறையே கணிதம், பௌதிகம், வேதியியலில் 100% மதிப்பெண்கள் பெற்றதைக் குறிக்கட்டும்.

$P(M) = 0{\cdot}20$, $P(p \mid M) = 0{\cdot}75$, $P(C/M \cap p) = 0{\cdot}90$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

நாம் காணவேண்டுவது $P(C \cap M \cap p)$ ஆகும்.

$$P(p \cap M) = P(M) \cdot P(p \mid M)$$
$$= 0{\cdot}20 \times 0{\cdot}75$$
$$= {\cdot}15.$$
$$\therefore \quad P(C \cap p \cap M) = P(C \mid p \cap M) \cdot P(p \cap M)$$
$$= {\cdot}90 \times 0{\cdot}15$$
$$= 0{\cdot}135.$$

எனவே, மூன்று பாடங்களிலும் 100% மதிப்பெண்கள் பெறு வதற்குரிய நிகழ்தகவு $= 0{\cdot}135$.

எ.கா. 100 மாணவர்களின், வேதியியல், கணிதம், பௌதிகம் என்ற மூன்று பாடல்களின் தேர்ச்சி விவரம் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.

	வேதியியலில் தேறிய வர்கள்		வேதியியலில் தேருத வர்கள்	
	கணிதத்தில் தேறிய வர்கள்	கணிதத்தில் தேருத வர்கள்	கணிதத்தில் தேறிய வர்கள்	கணிதத்தில் தேருத வர்கள்
பௌதிகத்தில் தேறியவர்கள்	30	12	12	6
பௌதிகத்தில் தேருதவர்கள்	15	8	7	10

பௌதிகம், வேதியியல், கணிதத்தில் தேர்ச்சி பெற்றவர்களை P, C, M என முறையே குறித்தால், P', C', M', என்பன முறையே பௌதிகம், வேதியியல், கணிதத்தில் தேருதவர்களைக் குறிக்கும்.

$P(P)$, $P(C)$, $P(M)$, $P(P \mid C)$, $P(P \mid M')$, $P(P \mid M \cup C)$,

$P(P' \mid M \cup C')$, $P(P' \mid M' \cup C')$, $P(P' \mid M \cup C)$, $P(P' \mid M' \cap C')$ இவற்றைக் காண்க.

விடை.

1. $P(P) = \dfrac{\text{பௌதிகத்தில் தேறியவர்களின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை}}$

$$= \frac{30 + 12 + 12 + 6}{100}$$

$$= \frac{60}{100}$$

$$= 0{\cdot}60$$

2. $(C) = \dfrac{\text{வேதியியலில் தேறியவர்களின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை}}$

$$= \frac{30 + 12 + 15 + 8}{100}$$

$$= \frac{65}{100}$$

$$= {\cdot}65$$

3. $P(M) = \dfrac{30 + 15 + 12 + 7}{100} = \dfrac{64}{100} = 0{\cdot}64$

4. $P(P \mid C) = \dfrac{P(P \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P, C \text{ இரண்டிலும் தேறியவர்கள்}}{C \text{ தேறியவர்கள் எண்ணிக்கை}}$

$$= \frac{30 + 12}{65}$$

$$= {\cdot}6462$$

5. $P(P \mid M) = \dfrac{P(P \cap M')}{P(M')} = \dfrac{12 + 6}{12 + 8 + 6 + 10} = \dfrac{18}{36} = 0{\cdot}50$

6. $P(P \mid M \cup C) = \dfrac{P[P \cap (M \cup C)]}{P(M \cup C)}$

7· $P\,[P \cap (M \cup C)] = \frac{30 + 12 + 12}{100} = \cdot 54$

$P(M \cup C) = \frac{30+12+15+18+12+7}{100} = \frac{94}{100} = \cdot 94$

$\therefore \quad P(P/M \cup C) = \frac{.54}{.94} = \cdot 5744$

7. $P(P'/M \cup C') = \frac{P\,[P \cap (M \cup C')]}{P(M \cup C)}$

$= \frac{12 + 6 + 30}{12 + 7 + 6 + 10 + 30 + 15}$

$= \frac{43}{80} = 0{\cdot}80$

8. $P(P'/M' \cup C') = \frac{P\,[P' \cap (M' \cup C')]}{P(M \cup C')}$

$= \frac{8 + 7 + 10}{12 + 8 + 12 + 7 + 6 + 10}$

$= \frac{25}{55} = 0{\cdot}45$

9. $P(P'/M \cap C) = \frac{P\,[P' \cap M \cap C]}{P\,[M \cap C]} = \frac{15}{15 + 30}$

$= \frac{15}{45} = 0{\cdot}33$

10. $P(P'/M' \cap C') = \frac{P\,[P' \cap M' \cap C']}{P(M' \cap C')} = \frac{10}{6 + 10}$

$= \frac{10}{16} = 0{\cdot}625.$

எ.கா. ஒரு பாத்திரத்தில் 'a' வெள்ளைப் பந்துகளும் 'b' கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. மற்றொரு பாத்திரத்தில் 'c' வெள்ளைப் பந்துகளும் 'd' கருப்புப் பந்துகளும் உள்ளன.

(அ) முதல் பாத்திரத்திலிருந்து 'a' வெள்ளைப் பந்துகளும் 2-ஆம் பாத்திரத்திலிருந்து ஒரு வெள்ளைப் பந்தும் எடுக்கப் படுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(ஆ) முதல் பாத்திரத்திலிருந்து ஒரு கறுப்புப் பந்தை எடுத்து, அதனை 2-ஆம் பாத்திரத்தில் வைத்து, பின் ஒரு வெள்ளைப் பந்தைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(அ) முதல் பாத்திரத்திலிருந்து ஒரு வெள்ளைப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{a}{a+b}$

அதனை 2-ஆம் பாத்திரத்தில் வைத்தபின், பந்துகளின் எண்ணிக்கையில் ஒன்று அதிகமாகிறது.

$\therefore$ 2-ஆம் பாத்திரத்தில் இருந்து ஒரு வெள்ளைப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{c+1}{c+d+1}$

$\therefore$ ஒரு வெள்ளைப் பந்தைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= P$ (வெ/வெ) $\frac{a}{a+b} \cdot \frac{c+1}{c+d+1}$

(ஆ) முதல் பாத்திரத்திலிருந்து ஒரு கறுப்புப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{b}{a+b}$ முதல் பாத்திரத்திலிருந்து ஒரு கறுப்புப் பந்தை எடுத்து 2-ஆம் பாத்திரத்தில் வைத்து பின் அதிலிருந்து ஒரு வெள்ளைப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{c}{c+d+1}$

முதல் பாத்திரத்திலிருந்து ஒரு கறுப்புப் பந்தை எடுத்து அதனை 2-ஆம் பாத்திரத்தில் வைத்து, பின் ஒரு வெள்ளைப்பந்தைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= P$ (க/வெ.)

$$= \frac{b}{a+b} \cdot \frac{c}{c+d+1}$$

எ.கா. கீழ்க்கண்ட விதிகளை நிறுவுக. ஒவ்வொன்றிற்கும், நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

(அ) $P(B) = 1$ ஆனால், $P(A/B) = P(A)$.

(ஆ) A, B இவை இரண்டும் தொடர்பற்றவையானால் $P(B) > 0$ என இருக்கும்போது $P(A/B) = 0$.

(இ) $A_1 \subseteq A_2$ ஆனால், $P(A_1/B) \leq P(A_2 / B)$.

(ஈ) $P(A_1 \cup A_2/B) = P(A_1/B) + P(A_2/B) - P(A_1 \cap A_2 / B)$

(அ) $\because \quad P(B) = 1$

$\therefore \quad B = S =$ மொத்த கூறுவெளி $\therefore \quad P(S) = 1.$

$P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B) = P(A \cap S)/P(S) = P(A)$

(ஆ) $\because \quad A \cap B = \phi,$

$P(A \cap B) = P(\phi) = 0.$

$\therefore \quad P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B) = 0.$

(இ) $\because \quad A_1 \subseteq A_2,$

எனவே $A_1 \cap B \subseteq A_2 \cap B.$

$\therefore \quad P(A_1 \cap B) \leq P(A_2 \cap B)$

$\therefore (B) P(A_1/B) \subseteq P(B) P(A_2 \mid B).$

எனவே, $P(A_1 \mid B) \leq P(A_2 \mid B).$

ஈ) $P(A_1 \cup A_2 \mid B) = P[B \cap (A_1 \cup A_2]$

$= P[BA_1 \cup BA_2]/P(B)$

$= [P(BA_1) + P(BA_2)$

$- P(A_1 A_2 B)] / P(B)$

$= P[A_1 \mid B] + P(A_2 \mid B)$

$- P(A_1 A_2 \mid B)$

எ.கா. ஒரு நாணயம் தலை கிடைக்கும்வரை அல்லது மூன்று முறைகள் வீசப்படுகிறது. முதல் வீச்சில் தலை கிடைக்காவிடில், மூன்று முறைகள் நாணயம் வீசப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது ?

கூறுவெளி $S = \{ H, TH, TTH, TTT \}.$

இவற்றின் தொடர் நிகழ்தகவுகள்

$$P(H) = \frac{1}{2}, \; P(TH) = \frac{1}{4}, \; P(TTH) = P(TTT) = \frac{1}{8}.$$

இங்கு, H என்பது தலையையும், T என்பது பூவையும் குறிக்கிறது.

— முதல் வீச்சில் தலை கிடைக்காத நிகழ்ச்சி B எனக் கொள்வோம்.

எனவே, $B = \{ TH, TTH, TTT \}$.

$$P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

மூன்று முறைகள் நாணயம் வீசப்படும் நிகழ்ச்சி A என இருக்கட்டும்.

$$A = \{ TTH, TTT \}.$$

$$P(A) = \frac{1}{4}.$$

$$A \cap B = A, \; P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

எ.கா. முதல் பாத்திரத்தில் 3 பச்சை, 5 சிவப்பு பந்துகளும், 2-ஆம் பாத்திரத்தில் 2 பச்சை, ஒரு சிவப்பு, 2 மஞ்சள் பந்துகளும் இருக்கின்றன. 2 பாத்திரங்களில் ஒன்றை சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுத்து அதிலிருந்து ஒரு பந்து சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அப் பந்து பச்சை நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது ?

கீழ்க்கண்ட இரண்டு ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளில் ஏதேனும் ஒன்று பச்சைநிறப் பந்து தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சியாகும்.

(i) முதல் பாத்திரத்தைத் தேர்ந்தெடுத்து அதிலிருந்து பச்சைநிறப் பந்தை எடுத்தல் ; அல்லது.

(ii) இரண்டாம் பாத்திரத்தைத் தேர்ந்தெடுத்து அதிலிருந்து பச்சைநிறப் பந்தை எடுத்தல்.

∴ P (பச்சைப் பந்து) $= P$ (பாத்திரம் ஒன்றும், அதிலிருந்து பச்சைநிறப் பந்தும் தேர்ந்தெடுத்தல்.)

$+ P$ (2-ஆவது பாத்திரமும், அதிலிருந்து பச்சைப் பந்து தேர்ந்தெடுத்தல்.)

$= P$ (முதல் பாத்திரம்) P (பச்சை/முதலாவது பாத்திரத்தில் எடுத்ததாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளபோது)

$+ P$ (இரண்டாவது பாத்திரம்) P பச்சை/2 வது பாத்திரத்திலிருந்து எடுத்ததாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளபோது)

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{31}{80}$$

எ. கா. ஒரு கட்டட வேலை குறிப்பிட்ட காலத்திற்குள் முடியுமென்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{17}{20}$, ; வேலை நிறுத்தம் இராது என்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{3}{4}$; வேலை நிறுத்தம் இராது எனத் தரப்பட்டிருக்கும்போது, குறிப்பிட்ட காலத்திற்குள் கட்டட வேலை முடியுமென்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{14}{15}$. (அ கட்டட வேலை குறிப்பிட்ட காலத்திற்குள் முடிவதற்கும், வேலை நிறுத்தங்கள் இல்லாமல் இருப்பதற்குமான நிகழ்தகவு (ஆ) கட்டட வேலை குறிப்பிட்ட காலத்திற்குள் முடியுமெனத் தரப்பட்டிருக்கும்போது, வேலை நிறுத்தம் இராது என்பதற்கான நிகழ்தகவு—இவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

" கட்டட வேலை குறிப்பிட்ட காலத்திற்குள் முடிவதற்கான " நிகழ்ச்சியை A எனவும், " வேலை நிறுத்தம் இராது " என்ற நிகழ்ச்சியை B எனவும் கொள்வோம்.

எனவே கணக்கின்படி,

$$P(A) = \frac{17}{20}$$

$$P(B) = \frac{3}{4}$$

$$P(A/B) = \frac{14}{15}$$

(அ) $P(AB)$ என்பது கட்டட வேலை குறிப்பிட்ட காலத்திற்குள் முடிவதற்கும், வேலை நிறுத்தம் இல்லாதிருப்பதற்குமான நிகழ்தகவு.

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$\therefore\ P(AB) = \frac{14}{15} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{10}.$$

(ஆ) $P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$

$$= \frac{\frac{7}{10}}{\frac{17}{20}} = \frac{14}{17}$$

எ. கா. A, B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகள் பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளன.

$$P(A) = P(A/B) = \frac{1}{4}.$$

$$P(B/A) = \frac{1}{2}$$

பின்வரும் கூற்றுக்கள் உண்மையா என ஆராய்க.

(i) A, B ஒன்றையொன்றும் விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ;

(ii) A, B சார்பற்றவை ;

(iii) A, Bயின் ஒரு பகுதி கணம் ;

(iv) $P(\bar{A}/B) = \frac{3}{4}$.

{ விடை : (i) தவறு (ii) உண்மை (iii) தவறு (iv) உண்மை. }

எ. கா. ஒரு பொருள் A, B என்ற இரு பகுதிகளைக் கொண்டுள்ளது. பகுதி A-இல் குறை ஏற்படக்கூடிய நிகழ்தகவு 0·08 எனவும், பகுதி B-இல் குறை ஏற்படக்கூடிய நிகழ்தகவு 0.05 எனவும் இருக்குமாறு அப்பொருள் உற்பத்தி செய்யப்படுகிறது. இரண்டு பகுதிகளுக்கும் சேர்ந்து குறையே ஏற்படாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது? (பம்பாய் B. Com., 1965 A)

பகுதி A குறையோடு இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(A) = 0.08$

பகுதி B ,, ,, ,, $P(B) = 0.05$

இரண்டு பகுதிகளுமே குறையுடன் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(AB)$

$$= P(A) \times P(B) = 0{\cdot}08 \times 0{\cdot}05$$

$$= 0{\cdot}004.$$

இரண்டில் ஒரு பகுதியாவது குறையுடன் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= P(A + B)$.

$$= P(A) + P(B - P(AB)$$

$$= 0{\cdot}08 + 0{\cdot}05 - 0{\cdot}004$$

$$0{\cdot}126.$$

இரண்டும் சேர்ந்த கூட்டுப் பகுதிகளுக்குக் குறையே இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

= 1 — (இரண்டில் ஏதாவது ஒரு பகுதியாவது குறையுடன் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு.)

$= 1 - 0{\cdot}126 = 0{\cdot}874.$

எ.கா. ஒரு தேர்வில் ஒரு ஆண் தேர்ச்சி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{3}{5}$. ஒரு பெண் தேர்ச்சி பறுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{2}{5}$. அத் தேர்வில் 2 பேர்களில் ஒருவராவது தேர்ச்சியடைவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

ஒரு ஆண் தேர்வில் வெற்றியடைவதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{3}{5} = P(A)$$

ஒரு பெண் ,, ,, ,, $= \frac{2}{5} = P(B)$

இருவருமே தேர்ச்சி பெறமுடியும்; ஆதலால், இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் அல்ல.

இருவரில் ஒருவராவது தேர்ச்சி பெறுவதற்கான

நிகழ்தகவு $= P(A + B)$

$$= P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{2}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{2}{5}.$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{2}{5} - \frac{6}{25}$$

$$= \frac{19}{25}$$

எ.கா. அடுத்தடுத்து குறிக்கப்பட்டுள்ள $(2n+1)$ சீட்டுக்களில், சமவாய்ப்பு முறையில் மூன்று சீட்டுகள் எடுக்கப்பட்டன. அச்சீட்டுக்களின்மீது காணப்படும் எண்கள் கூட்டுத்தொடரில் இருப்பதற்கான வாய்ப்பு என்ன ?

கூட்டுத் தொடரின் துவக்க எண் 1 ஆக இருந்தால்

எண் தொகுதிகள் 1, 2, 3 ; 1, 3, 5 ; 1, 4, 7 ; ...... 1, $n+1$, $2n+1$ என இருக்கும். அவற்றின் எண்ணிக்கை n. கூட்டுத் தொடரின் முதல் உறுப்பு 2 ஆகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டால், எண் தொகுதிகள் (2, 3, 4.) (2, 4. 6), ... (2, $n+1$, $2n$) என இருக்கும். அவற்றின் எண்ணிக்கை $n-1$.

இதுபோன்றே முதல் உறுப்பு 3 எனக் கொண்டால், எண் தொகுதிகள் (3, 4, 5), (3, 5, 7), ... 3, $n+2$, $2n+1$ என அமையும். அவற்றின் எண்ணிக்கை $n-1$.

இவ்வாறே முதல் உறுப்புக்கள் 1, 2, 3, 4, 5, ... $2n-2$. $2n-1$ எனத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டால், தொகுதிகளின் எண்ணிக்கை முறையே n, $n-1$, $n-1$, $n-2$, $n-2$,...... 1, 1 என இருக்கும்.

2, 3 முதல் உறுப்புக்களாக இருக்கும் கூட்டுத் தொடர்களில் தொகுதிகளின் எண்ணிக்கை $n-1$, $n-1$ எனச் சமமாக இருக்கும். இவ்வாறே (4, 5), (6, 7) ...... போன்றவற்றிற்கும் அமையும்.

எனவே, கூட்டுத்தொடரில் காணக்கூடிய எண்களின் தொகுதிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $= 2\{1+2+\ldots\ldots+n-1\}+n$

$$= n^2$$

எனவே, தேவையான நிகழ்தகவு $= \dfrac{n^2}{{}^{2n+1}C_3}$

$$= \frac{3n}{4n^2-1}$$

எ.கா. மேற்கிந்திய கிரிக்கெட் குழுவின் தலைவர் காடார்ட் (Goddard), இந்தியக் குழுவுடன் நடந்த 5 பந்தயங்களின் போதும், நடக்கும் சுண்டுதலில் 'தலையே' வரவேண்டும் என்று விரும்பினர். 5 சுண்டுதலிலும் தலையே வருவதற்கான நிகழ்தகவு யாது ? (I.A.S.)

ஏதாவது ஒரு பந்தயத்தில் தலையைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $\Big\} = \dfrac{1}{2}$

ஒரு சுண்டுதலில் வெற்றி பெறுவது மற்றப் பந்தயங்களில் பெறும் விளைவுகளைப் பொறுத்து அமையாததால், அவை சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாகும்.

எல்லாப் பந்தயங்களிலும் தலையைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$

எ.கா. A, B, C என்ற 3 மாணவர்களிடம், ஒரு புள்ளியியல் கணக்கு தரப்பட்டது. இதனைத் தீர்ப்பதற்கான ஒவ்வொருவரின் நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. அக்கணக்கைத் தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

A அக்கணக்கைத் தீர்க்கவியலாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

B ,, ,, ,, ,, $= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

C ,, ,, ,, ,, $= 1 - \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$

A, B, C ஆகிய மூவராலும், அதனைத் தீர்க்க முடியாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

எனவே, கணக்கிற்கு விடை காண்பதற்கான நிகழ்தகவு $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

எ.கா. A, B என்பவை ஒன்றையொன்று சாராத நிகழ்ச்சிகள் எனில்,

(i) A, B' ஒன்றையொன்று சாராதவை;

(ii) A', B ஒன்றையொன்று சாராதவை;

(iii) A', B' ஒன்றையொன்று சாராதவை என நிறுவுக.

(i) $P(A) = 0$ என்றால் $P(A \cap B') = 0$.

[$\because$ $A \cap B'$ என்பது A-ன் பகுதிக் கணம்]

$\therefore$ $P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B')$

$P(A) \neq 0$, எனில்,

$P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B'/A)$

$$= P(A)[1 - P(B/A)]$$
$$= P(A)\cdot[1 - P(B)].$$
$$= P(A)\cdot P(B')$$ [ஏனெனில் A, B-யும் ஒன்றையொன்று சாராதவைகள்.]

எனவே, A-யும் B'-ம் ஒன்றையொன்று சாராதவைகள்.

(ii) (i)-ல் $A = B, B = A$ எனப் பிரதியிட்டால், இதனை நிறுவலாம்.

(iii) $P(A') = 0$ எனில் $P(A' \cap B') = 0$.

($\because$ $A' \cap B'$ என்பது A-ன் பகுதிக்கணம்)

$\therefore$ $P(A' \cap B') = P(A')\cdot P(B')$

$P(A') \neq 0$ எனில்,

$$P(A' \cap B') = P(A')\, P(B'/A')$$
$$= [1 - P(B/A')]\, P(A')$$

B, A' என்பவை ஒன்றையொன்று சாராதவைகளாதலால்,

$$P(A' \cap B') = P(A')\,[1 - P(B)]$$
$$= P(A')\cdot P(B')$$

$\therefore$ A', B' என்பவை ஒன்றையொன்று சாராதவைகள்.

எ.கா. A, B, C என்னும் மூன்று கப்பல்கள் இங்கிலாந்திலிருந்து இந்தியாவிற்கு வருகின்றன. அவை பத்திரமாக வந்து சேருவதற்கான சாதக விகிதங்கள் (odds in favour) முறையே 2 : 5, 3 : 7, 6 : 11. மூன்று கப்பல்களும் பத்திரமாக வந்து சேர்வதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

$\left[\text{சாதக விகிதம்} = \frac{p}{q}\right]$ கப்பல் A-க்கு $\frac{p}{q} = \frac{2}{5}$

கப்பல் A பத்திரமாக வந்துசேர்வதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{2}{2+5} = \frac{2}{7}$$

„ B „ „ „ „ $= \frac{3}{3+7} = \frac{3}{10}$

„ C „ „ „ „ $= \frac{6}{6+11} = \frac{6}{17}$

மூன்று நிகழ்ச்சிகளும் சார்பற்றவை; எனவே, அவை மூன்றும் பத்திரமாக வந்துசேர்வதற்கான நிகழ்தகவு,

$$= \frac{2}{7} \times \frac{3}{10} \times \frac{6}{17} = \frac{18}{595}$$

எ.கா. N குழந்தைகளிடையே n மாம்பழங்கள் சமவாய்ப்பு முறையில் பங்கிட்டுத் தரப்படுகின்றன. ஒரு குறிப்பிட்ட குழந்தை r $(< n)$ மாம்பழங்கள் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

தீர்வு

ஒரு குறிப்பிட்ட குழந்தைக்கு r மாம்பழங்கள் தரப்பட்டால், மீதி $(n - r)$ பழங்களை $N - 1$ குழந்தைகளுக்கு $(N - 1)^{n-r}$ வழிகளில் பகிர்ந்து தரலாம். (ஒவ்வொரு பழமும் $(N - 1)$ வழிகளில் பங்கிடப்படலாம் . மேலும், குறிப்பிட்ட குழந்தைக்குத் தரப்படும் r பழங்கள் nC_r வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கப்படலாம்.

$$\text{எனவே தேவையான நிகழ்தகவு} = \frac{nC_r(N-1)^{n-r}}{N^n}$$

எ.கா. ஒரு பையில் 6 வெள்ளை, 9 கறுப்புப் பந்துகள் உள்ளன. 4 பந்துக்கள் அதிலிருந்து இரண்டு முறை தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டன. (i) இரண்டாவது முறை தேர்ந்தெடுக்கு முன், பந்துகள் பையில் மீண்டும் வைக்கப்பட்டன. (ii) இரண்டாவது சோதனைக்குமுன் பந்துகள் திருப்பிவைக்கப்படவில்லை. முதல் சோதனையில் 4 வெள்ளைப் பந்துகளும், இரண்டாவது சோதனையில் 4 கறுப்புப் பந்துகளும் வருவதற்கான நிகழ்தகவு யாது ?

(i) எடுக்கப்பட்ட பந்துகள் மீண்டும் வைக்கப்படுதல் பந்துகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $= 6 + 9 = 15$,

15 பந்துகளிலிருந்து 4 பந்துகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான வழிகள் $= 15C_4$.

6 வெள்ளைப் பந்துகளிலிருந்து 4 பந்துகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான வழிகள் $= 6C_4$.

9 கறுப்புப் பந்துகளிலிருந்து 4 பந்துகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான வழிகள் $= 9C_4$.

$\therefore$ முதல் சோதனையில் 4 வெள்ளைப் பந்துகளைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{6C_4}{15C_4}$

∴ 2-ம் சோதனையில் 4 கறுப்புப் பந்துகளைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{9C_4}{15C_4}$

இரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் சார்பற்றவை ஆதலால், கூட்டு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு

$$= \frac{6C_4}{15C_4} \times \frac{9C_4}{15C_4}$$

$$= \frac{6\times5\times4\times3}{4\times3\times2\times1} \times \frac{9\times8\times7\times6}{4\cdot3\cdot2\cdot1} \times \frac{(4\times3\times2\times1)^2}{(15\times14\times13\times12)^2}$$

$$= \frac{6}{5915}$$

எ.கா. 5 சிவப்புப் பந்துகளும் 7 வெள்ளைப் பந்துகளும் கொண்ட ஒரு கூடையும், 3 சிவப்பு, 12 வெள்ளைப் பந்துகளைக் கொண்ட மற்றொரு கூடையும் இருக்கின்றன. இரண்டு கூடைகளில், ஏதேனும் ஒன்றிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. அப்பந்து சிவப்பாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது ?

கூடைகள் இரண்டும், A, B என இருக்கட்டும். A-ஐத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2}$

அதிலிருந்து ஒரு சிவப்புப் பந்து தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{5}{12}$

கூடை A-ஐத் தேர்ந்தெடுத்து, அதிலிருந்து ஒரு சிவப்புப் பந்தைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{24}$

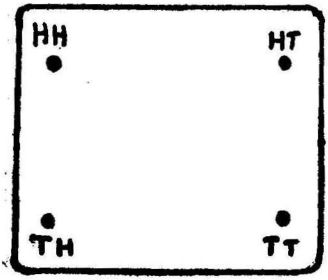
இதுபோலவே,

கூடை B-ஐத் தேர்ந்தெடுத்து அதிலிருந்து ஒரு சிவப்புப் பந்தைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2} \times \frac{3}{15} = \frac{1}{10}$

இரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஆதலின், நிகழ்தகவின் கூட்டல் விதியின்படி தேவையான நிகழ்தகவு $= \frac{5}{24} + \frac{1}{10} = \frac{37}{120}$

கணவியலின் அடிப்படையின் கூறுவெளி, கூறு புள்ளிகள் மூலம் வரையறுக்கப்பட்ட நிகழ்தகவின் பல்வேறு தேற்றங்களை நன்குபுரிந்து கொள்வதற்குக் கீழ்க்காணும்சோதனையை எடுத்துக் கொள்வோம்.

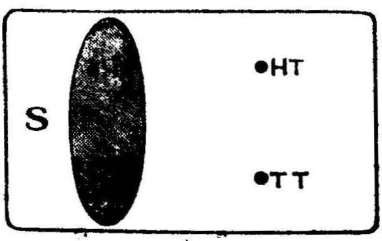
ஒரு நாணயத்தை இருமுறை வீசும்போது கிடைக்கக் கூடிய நிகழ்ச்சிகளை H I, HT, T', T எனக் குறிப்பிடுவோம். இங்கு முதல் எழுத்து, முதல் வீச்சின் முடிவையும், இரண்டாவது எழுத்து இரண்டாவது வீச்சின் முடிவையும் குறிப்பிடுகின்றன. இந்த 4 புள்ளிகளையும் ஒரு கூறு வெளியில் குறிப்பிடலாம்.



படம் 6·12

இவை கூறு புள்ளிகள் என்றும், சோதனையில் விளைவுகணம் முழுவதையும் காட்டுகின்ற கூறு புள்ளிகள் அடங்கிய தொகுதி கூறுவெளி என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன.

கூறு வெளியின் எந்தப் பகுதிக்கணமும் ஒரு நிகழ்ச்சி எனப்படுகிறது. எனவே இரண்டாவது வீச்சில் தலை கிடைக்கக் கூடிய நிகழ்ச்சி E என்பது. HH ; T , என்ற இரு புள்ளிகளை உடைய, S-ன் பகுதிக் கணமாகும். இரு நிகழ்ச்சிகளுக்குப் பொதுப் புள்ளிகள் இல்லை எனில், அவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை உடையவை. இரண்டாவது வீச்சில் பூ கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை E எனக் குறித்தால் E-யும், E'-ம் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.



படம் 6·13

S-ல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும்,

(1) $w_i \ge 0$

(2) $\sum w_i = 1$ என்ற இரு நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு w என்ற நிறை தரப்படவேண்டும். (0 விருந்து ஒன்றுவரை உள்ள எல்லா நேர் எண்களையும் நிறைகளாக எடுத்துக்கொள்ளும்போது அவற்றின் கூட்டுத்தொகை 1 என்னும் கட்டுப்பாடுடன் இருத்தல்

வேண்டும்). மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டில் கூறு வெளியில் 4 புள்ளிகள் உள்ளதால் ஒவ்வொன்றிற்கும் நிறை $\frac{1}{4}$ எனத் தருகிறோம்.

வரையறை

E எனும் நிகழ்ச்சி நடப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $P(E)$ என்பது கூறு வெளி S-ல் உள்ள மொத்தப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கைக்கும், E-ல் உள்ள கூறுப் புள்ளிகளுக்கும் உள்ள விகிதம் ஆகும், அதாவது $P(E) = \frac{n(E)}{n}$ இங்கு $n(E)$ என்பது E-ல் உள்ள கூறு புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

கணக்கு

1. ஒரு நாணயம் 3 முறைகள் வீசப்படுகிறது. கூறு வெளி என்ன ? கூறு வெளியில் உள்ள புள்ளிகளுக்கு எவ்வாறு நிறைகளைக் குறிப்பிடுவாய் ? மூன்றில் இரு முறைகள் பூக்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது ?

கூறு வெளியில் HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT, என்ற 8 புள்ளிகள் உள்ளன. அவை ஒவ்வொன்றுக்கும் $\frac{1}{8}$ என்ற நிறையைத்தருவது பொருத்தமானது. இவற்றில் HHT, HTH, THH என்ற 3 புள்ளிகள், சோதனையில் இரண்டு தலைகள் கிடைப்பதைக் குறிக்கின்றன. எனவே, இதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{n(E)}{n} = \frac{3}{8}$

2. இரு சிவப்பு, நான்கு பச்சைப் பந்துகள் உள்ள ஒரு கலத்திலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. இதற்கான கூறு வெளியைக் குறிப்பிட்டு ஒரு சிவப்புப் பந்து எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

கூறுவெளி G, G, G, G, R, R என்ற 6 புள்ளிகளை உடையது. இங்கு G பச்சைப் பந்தையும், R சிவப்புப் பந்தையும் குறிக்கின்றன. எனவே, இரு சிவப்புப் பந்துகள் எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{4}{6}$.

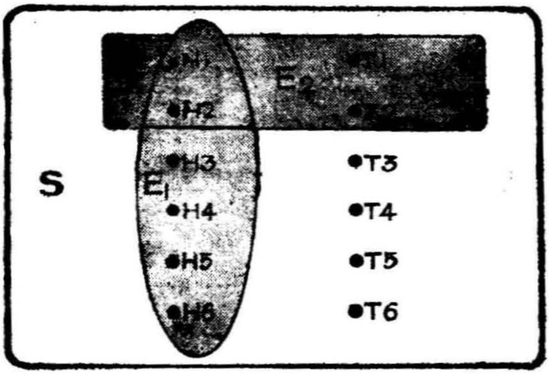
கணக்கு

1. 52 சீட்டுகள் உள்ள ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகிறது. கூறுவெளியை விளக்கி, எடுக்கப்படும் சீட்டு 'டைமண்ட்' வடிவத்தில் இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவைக் காண்க.

2. ஒருபகடை மூன்று முறை வீசப்படுகிறது. இதற்கான கூறுவெளியை விவரி. கிடைக்கும் எண்களின் மொத்த மதிப்பு 17 ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

நிகழ்தகவின் கூட்டல் நியதி

ஒரு நாணயத்தையும், ஒரு சமச் சீரான பகடையையும் ஒரே சமயத்தில் வீசுவதாகக் கொள்வோம். நாணயத்தில் தலை கிடைப்பதை E_1 என்றும், பகடையில் 1 அல்லது 2 கிடைப்பதை E_2 என்றும் குறிப்பிடுவோம். 12 புள்ளிகள் அடங்கிய கூறுவெளி S-ம் நிகழ்ச்சிகள் E_1, E_2-ம் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன.



படம் 6·14

நீள்வட்டத்தில் அடங்கியுள்ள புள்ளிகள் E_1, என்ற பண்பையும், செவ்வகத்தில் உள்ள புள்ளிகள் E_2 என்ற பண்பையும் உடையன. நீண்டசதுரம், நீள்வட்டம் இரண்டிற்கும் பொதுவான புள்ளிகள் E_1, E_2 என்ற இரண்டு பண்புகளையும் உடையன. $E_1 E_2$ என்பது E_1, E_2 என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளும் நிகழ்வதையும், $E_1 + E_2$ என்பது E_1 ஆவது அல்லது, E_2 ஆவது அல்லது இரு நிகழ்ச்சிகளும் நடப்பதையும் குறிக்கின்றது. எனவே, இதிலுள்ள 12 புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் நிறை $\frac{1}{12}$ ஐத் தருவது பொருத்தமானது.

$$P(E_1 E_2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} \text{ (இரு புள்ளிகள் உள்ளதால்)}$$

$$P(E_1 + E_2) = 8\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{8}{12} = \text{(8 புள்ளிகள் உள்ளதால்)}$$

வேறு விதமாகவும் $P(E_1 + E_2)$ ஐ எழுதலாம்.

$$P(E_1+E_2)=6\left(\frac{1}{12}\right)+4\left(\frac{1}{12}\right)-2\left(\frac{1}{12}\right)$$

$$=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1\,E_2)$$

அதாவது E_1, E_2 ல் உள்ள புள்ளிகளின் நிறைகளைக்கூட்டி அக்கூட்டுத் தொகையில் E_1, E_2 ன் நிறைகள் இருமுறை கூட்டப் பட்டுள்ளதால், $E_1\,E_2$ ன் நிறைகளைக் கழித்துவிடுகிறோம். எனவே,

$P(E_1+E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1\,E_2)$ என்பது கூட்டல் தேற்றமாகும்.

E_1, E_2 என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை உடையனவானால், $E_1\,E_2$ ல் புள்ளிகளே இராது.

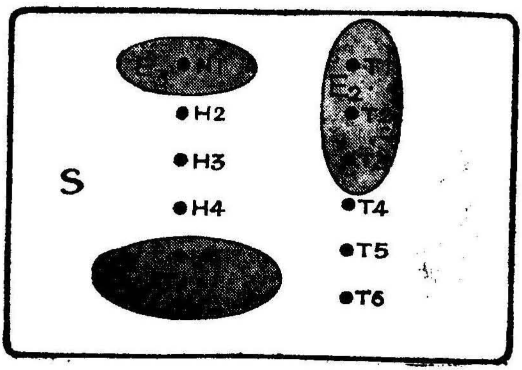
எனவே, $P(E_1\,E_2)=0$

$\therefore\quad P(E_1+E_2)=P(E_1)+P(E_2)$

E_1, E_2, E_3 ... ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஆயின், $P(E_1+E_2+E_3+\dots)=P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)+\dots$ $E_1+E_2+\dots\dots+E_n=S$ என இருந்தால்,

$P(E_1+E_2+\dots+E_n)=P(E_1)+P(E_2)+\dots P(E_n)$ $=P(S)=1$.

இதனை விளக்குவதற்குக் கீழ்க்காணும் படத்தை எடுத்துக் கொள்ளலாம்.



படம் 6·15

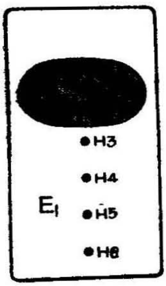
E_1 என்ற நிகழ்ச்சி $H\,5$ அல்லது $H\,6$ ஐக் குறிக்கட்டும். E_2 என்ற நிகழ்ச்சி $T1$, $T2$ அல்லது $T3$ ஐயும் E_3 என்ற நிகழ்ச்சி $H\,1$ ஐயும் குறிக்கட்டும். படத்திலிருந்து,

$P(E_1) = \frac{2}{12},\ P(E_2) = \frac{3}{12},\ P(E_3) = \frac{1}{12}$ எனக்காட்டலாம்.

$$P(E_1 + E_2 + E_3) = P(E_1) + P(E_2) + B(E_3)$$
$$= \frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12}.$$

நிகழ்தகவின் பெருக்கல் நியதி

அடுத்து $P(E_1 E_2)$ வைக் கணக்கிடுவதற்கு ஒரு வாய்பாட்டைக் காண முயலுவோம். E_1 நடப்பது உறுதி என தமக்குத் தெரிந்திருக்கும்போது, இந் நிபந்தனைக்குட்பட்டு, E_2 வும், அதே சமயம் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவை, $P(E_2 \mid E_1)$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம். இது E_1 ஏற்கெனவே நடந்துவிட்டதாகக் குறிப்பிடும்போது, E_2வும் நடப்பதற்கான நிகழ்தகவைத் தருகின்றது. இது E_2ன் நிபந்தனைக்கு உட்பட்ட நிகழ்தகவு (conditional probability) எனப்படுகிறது. E_1 நடப்பது உறுதி என ஏற்கெனவே தெரிந்துவிட்டால், Sற்குப்பதிலாக E_1-ஐஎடுத்துக்கொள்ளலாம். E_2ல், உள்ள புள்ளிகள் 4 லிருந்து ஆகக் குறைந்து, கீழ்க்காணும் படத்தைத் (படம் 6·16) தருகின்றன. இப்போது புதிய கூறுவெளிE_1ல் உள்ள மொத்தப் புள்ளிகள் 6ஆதலால் ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் நிறை $\frac{1}{6}$ எனத் தரலாம். எனவே,



படம் 6·16

$P(E_2 \mid E_1) = \frac{2}{6}.$ மேலும்

$$P(E_2 \mid E_1) = \frac{\frac{2}{12}}{\frac{6}{12}} = \frac{P(E_1 E_2)}{P(E_1)}$$ எனவும் கொள்ளலாம்.

$$\therefore\ P(E_1 E_2) = P(E_1)\, P(E_2 \mid E_1)$$

இது பெருக்கல் தேற்றம் எனப்படுகிறது. இதை விரிவு படுத்தினால்,

$$P(E_1 E_2 \dots E_n) = P(E_1)\, P(E_2 \mid E_1)\, P(E_3 \mid E_1 E_2) \dots\dots P(E_n \mid E_1 \dots E_{n-1})$$

எனக் கிடைக்கிறது.

சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் (Independent events)

பகடை, நாணய எடுத்துக்காட்டில்,

$$P(E_2 \mid E_1) = \frac{2}{6} = \frac{4}{12} = P(E_2)$$

$$\therefore \quad P(E_1 \, E_2) = P(E_1) \, P(E_2)$$

எனவே, E_1, E_2 சார்பற்றவை எனப்படுகின்றன. பகடையில் காணப்படும் எண் நாணயத்தில் தலை அல்லது பூ விழுவதையோ அல்லது நாணயத்தில் காணும் பக்கம் பகடையில் கிடைக்கும் புள்ளி முகத்தைப் பொறுத்தோ அமைவதில்லை.

எனவே, $P(E_1)$, E_2 வைப் பொருத்தோ அல்லது $P(E_2)$, E_1 ஐப் பொருத்தோ அமைவதில்லை. நிகழ்ச்சிகள், E_1, E_2 ...... E_n ஒன்றுக்கொன்று தம்முள் சார்பற்றவையாக இருந்தால்,

$$P(E_1 \, E_2 \ldots E_n) = P(E_1) \, P(E_2) \ldots P(E_n)$$

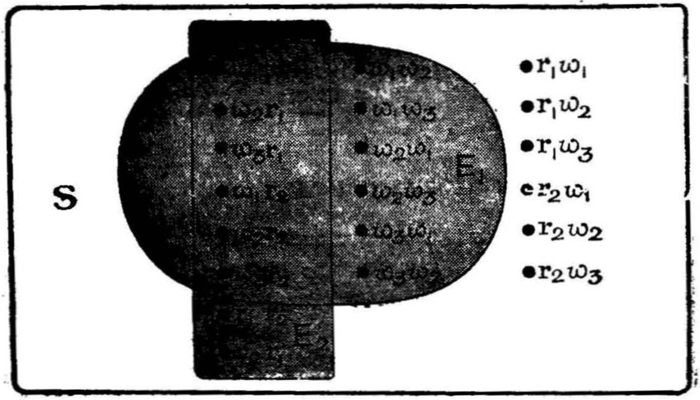
ஒரு பகடையைப் பத்து முறைகள் வீசினால் ஏதேனும் ஒரு வீச்சில் கிடைக்கும் புள்ளி முகமானது மற்ற எந்த வீச்சிலும் வரும் புள்ளி முகத்தைப் பொறுத்ததல்ல. எனவே, பத்து வீச்சுக்களிலும் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சிகள் பத்து சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் (independent events) ஆகும்.

சார்ந்த நிகழ்ச்சிகள் (Dependent Events)

$P(E_2 \mid E_1) \neq P(E_2)$ என இருந்தால் நிகழ்ச்சிகள் E_1, E_2 சார்ந்த நிகழ்ச்சிகள் ஆகும். மூன்று வெள்ளைப் பந்துகள் 2 சிவப்புப் பந்துகள் அடங்கியுள்ள ஒரு கலத்திலிருந்து இரு, பந்துகளை எடுப்போம். முதல் தடவை வெள்ளைப் பந்தை எடுப்பதை E_1 என்ற நிகழ்ச்சியும், இரண்டாவது தடவை சிவப்புப் பந்து எடுப்பதை E_2 என்ற நிகழ்ச்சியும் குறிக்கட்டும். எடுக்கப் பட்ட பந்து திரும்பப் போடப்படுகிறது எனக் கொள்வோம்.

W_1, W_2, W_3 என்பவை மூன்று வெள்ளைப் பந்துகளையும், r_1, r_2 என்பவை இரு சிவப்புப் பந்துகளையும் குறிக்கட்டும்.

கூறுவெளியில் 20 புள்ளிகள் உள்ளன. முதல் எழுத்தும் அடிக்குறியும், முதலில் எடுக்கப்படும் பந்தையும், இரண்டாவது எழுத்தும், அடிக்குறியும் இரண்டாவது தடவை எடுக்கப்படும் பந்தையும் குறிக்கின்றன. ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் நிறை $\frac{1}{20}$ எனக் கொடுத்தால்,

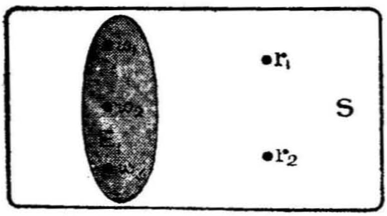


படம் 6·17

$$P(E_1) = 12 \times \frac{1}{20}$$

$$P(E_2) = 8 \times \frac{1}{20}$$

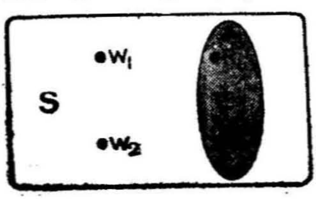
$$P(E_1 E_2) = 6 \times \frac{1}{20}, \quad P(E_1 + E_2) = 14 \times \frac{1}{20}$$



படம் 6·18

இவ்வாறு, இரு முறை, பந்துகள் எடுப்பதையும், தனித் தனியாகக் கருதினுல் முதன் முறை எடுப்பதில் 5 புள்ளிகள் உள்ளன. அவை ஒவ்வொன்றிற்கும் $\frac{1}{5}$ என நிறை தந்தால் $P(E_1) = \frac{3}{5}$.

E_1 ஏற்கெனவே நடந்துவிட்டது எனக் கொடுக்கப்பட்டு இருக்கும்போது மீதமுள்ள இரு வெள்ளைப் பந்துகளையும் W_1, W_2 எனக் குறித்தால் இரண்டாவது முறை பந்து எடுப்பதற்கான கூறு வெளியில் 4 புள்ளிகள் உள்ளன.



படம் 6·19

ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் நிறை $\frac{1}{4}$ எனக் கொடுத்தால் $P(E_2 \mid E_1) = \frac{2}{4}$.

எனவே, பெருக்கல் தேற்றத்தின்படி

$$P(E_1 E_2) = P(E_1) P(E_2 \mid E_1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$$

E_2 இரு வழிகளில் நிகழமுடியும். அதாவது, முதலில் ஒரு வெள்ளைப் பந்து, பிறகு ஒரு சிவப்புப் பந்து எனவும் அல்லது முதலில் சிவப்பு, இரண்டாவதும் சிவப்புப் பந்து எனவும் எடுக்கலாம். முதல் வகை தேர்ந்தெடுத்தல் $E_1 E_2$ என்ற நிகழ்ச்சியைத் தருகிறது.

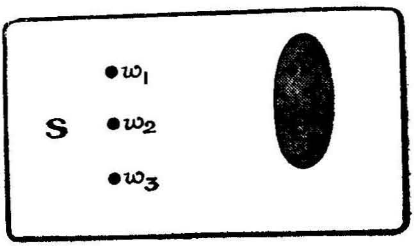
$\bar{E}_1$ என்பது முதன்முறை சிவப்புப் பந்தை எடுப்பது.

[அதாவது வெள்ளைப் பந்தை எடுக்காமலிருப்பது] எனவே, இரண்டாவது முறை எடுப்பதை $\bar{E}_1 E_2$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

எனவே, $P(\bar{E}_1 E_2) = P(\bar{E}_1) P(E_2 \mid \bar{E}_1)$

$$P(\bar{E}_1) = \frac{2}{5}$$

முதன்முறை எடுக்கும் பந்து சிவப்பு எனக் கொடுக்கப் பட்டுள்ளபோது, இரண்டாவது முறை எடுக்கப்படும் கூறு



படம் 6·20

வெளியில் 4 புள்ளிகள் உள்ளன. மீதி உள்ள சிவப்புப் பந்தை (R_1) எனக் குறிக்கிறோம். நிறை $\frac{1}{4}$ எனக் கொடுத்தால்

$$P(E_2 \mid \bar{E}_1) = \frac{1}{4}$$

எனவே, $P(\bar{E}_1 E_2) = \left(\frac{2}{5}\right) \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{20}$

இரண்டாவது முறை எடுக்கப்படும் சிவப்புப் பந்து முதலில் வெள்ளை அல்லது, சிவப்புப் பந்து எடுப்பதன்பின் அமைவதால் $E_1 E_2$, $\bar{E}_1 E_2$ ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை உடையன.

எனவே கூட்டல் தேற்றப்படி

$$P(E_2) = P(E_1 E_2) + P(\bar{E}_1 E_2) = \frac{6}{20} + \frac{2}{20} = \frac{8}{20}$$

இறுதியாக $P(E_1 + E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 E_2)$

$$= \frac{3}{5} + \frac{8}{20} - \frac{6}{20} = \frac{14}{20}$$

குறிப்பு: இந் நிகழ்தகவுக் கோட்பாட்டில் கண இயலின் பங்கை விளக்குவதற்கே நாம் கூறுவெளிகளின் படங்கள் வரைகின்றோம். அவை ஒவ்வொரு முறையும் வரையப்படவேண்டிய அவசியமில்லை. வரையறைகளிலிருந்து நிகழ்தகவை நேரிடையாகக் கணக்கிடலாம்.

எ.கா. ஒன்று மஞ்சள், மற்றொன்று சிவப்பாக உள்ள இரு பகடைகள் வீசப்படுகிறன. பகடைகளில் காணப்படும் புள்ளி முகங்களின் கூட்டுத் தொகை ஒற்றைப்படையாக இருப்பதை A என்ற நிகழ்ச்சியும், குறைந்தது ஒரு பகடையிலாவது புள்ளி முகம் '1' கிடைப்பதை B என்ற நிகழ்ச்சியும் குறிக்கட்டும்.

(அ) கூறுவெளியை விவரி.

(ஆ) நிகழ்ச்சிகள் A, B, $\bar{B}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \sim B$, $A \cap \bar{B}$ இவற்றை விளக்கி, 36 கூறு புள்ளிகளுக்கும் சம நிகழ்தகவு இருப்பதாகக் கொண்டு, அவற்றின் நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு

(அ) கூறுவெளி S, 36 துவக்க நிகழ்ச்சிகளை (Elementary-events) உடையது. அவையாவன.

(1, 1);	(1, 2);	(1, 3);	(1, 4);	(1, 5);	(1, 6)
(2, 1);	(2, 2);	(2, 3);	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

இங்கு (6, 2) என்பது மஞ்சள் பகடையில் புள்ளி முகம் 6 சிவப்புப் பகடையில் புள்ளி முகம் 2 கிடைத்ததைக் குறிக்கிறது.

(ஆ) A = இரு பகடைகளிலும் காணப்படும் புள்ளிமுகங்களின் கூட்டுத் தொகை ஒற்றைப்படையாக இருப்பதைக் குறிக்கிறது.

$= \{ (1, 2) ;\ (2, 1) ;\ (1, 4) ;\ (2, 3) ; (3, 2) ; (4, 1) ;$
$(1, 6) ;\ (2, 5) ;\ (3, 4) ;\ (4, 3) ; (5. 2) ; (6, 1) ;$
$(3, 6) ;\ (4, 5) ;\ (5, 4) ;\ (6, 3) ; (5, 6) ; (6, 5) ; \}$

எனவே, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{18}{36} = 0{\cdot}5$

B = குறைந்தது ஒரு பகடையிலாவது புள்ளிமுகம் '1' கிடைத்ததைக் குறிக்கிறது.

$\{ (1, 1) ;\ (1, 2) ;\ (1, 3) ;\ (1, 4) ;\ (1, 5) ;\ (1, 6) ;$
$(2, 1) ;\ (3, 1) ;\ (4, 1) ;\ (5, 1) ;\ (6, 1) ; \}$

$\therefore\ P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{11}{36}$

$\bar{B}$ = பகடைகளின் புள்ளி முகங்களில் '1' இராமலிருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி.

$P(\bar{B}) = \dfrac{n(\bar{B})}{n(S)} = \dfrac{25}{36}$ (மொத்தமுள்ள 36 கூறு புள்ளிகளில் B-க்குரிய 11 போக மீதி 25 புள்ளிகள் கிடைக்கின்றன.)

$A \cap B$ = கூட்டுத்தொகை ஒற்றைப்படை எண்ணாக இருப்பதையும் குறைந்தது ஒரு பகடையின் புள்ளி முகமாவது ஒற்றைப் படை எண்ணாக இருப்பதையும் குறிக்கிறது.

$\{ (1, 2) ;\ (2, 1) ;\ (1, 4) ;\ (4, 1) ;\ (1, 6) ;\ (6, 1) \}$

$\therefore\ P(A \cap B) = \dfrac{6}{36}$

$A \cup B = \{ (1, 2) ;\ (2, 1) ;\ (1, 4) ;\ (?, 3) ;\ (3, 2) ;$
$4, 1) ;\ (1, 6) ;\ (2, 5) ;\ (3, 4) ;\ (4, 3) ;$
$(5, 2) ;\ (6, 1) ;\ (3, 6) ;\ (4, 5) ;\ (5, 4) ;$
$(6, 3) ;\ (5, 6) ;\ (6, 5) ;\ (1, 4) ;\ (1, 3) ;$
$(1, 5) ;\ (3, 1) ;\ (5, 1) \}$

$\therefore\ P(A \cup B) = \dfrac{23}{36}$

$A \sim B = \{ (2, 3); \quad (3, 2); \quad (2, 5); \quad (3, 4); \quad (4, 3);$
$(5, 2); \quad (3, 6); \quad (4, 5); \quad (5, 4); \quad (6, 3);$
$(5, 6); \quad (6, 5); \}$

$$P(A \sim \bar{B}) = \frac{12}{36}$$

$A \cap \bar{B} = \{ (2, 3); \quad (2, 5); \quad (3, 2); \quad (3, 4); \quad (3, 6);$
$(4, 3); \quad (4, 5); \quad (5, 2); \quad (5, 4); \quad (5, 6);$
$(6, 3); \quad (6, 5) \}$

$$P(A \cap \bar{B}) = \frac{12}{36}$$

(இ) $P(\bar{A} \cap B)$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(A/B)$, $P(A \cup \bar{A} \cap B)$ இவற்றைக் காண்க.

(1) $P(\bar{A} \cap B = P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{36} - \frac{6}{36} = \frac{5}{36}$

(2) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{18}{36} - \frac{6}{36} = \frac{12}{36}$

(3) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{6/36}{11/36} = \frac{6}{11}$

(4) $P(A \cup \bar{A} \cap B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B) - P(A \cap \bar{A} \cap B)$

$= P(A) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{18}{36} + \frac{5}{36}$

$= \frac{23}{36}$

தேற்றம்

பூஜ்யம் அல்லாத நிகழ்தகவுகள் உடைய ஒன்றையொன்று தவிர்க்கும் நிகழ்ச்சிகள் சார்பற்றவையாக இருக்கமுடியாது. (செ.ப.)

A, B என்னும் இரு நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகள் பூஜ்யமல்லாதவை.

$P(A) \neq 0, \quad P(B) \neq 0$

A, B ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை உடையன.

எனவே, $P(AB) = 0$

A, B சார்பற்றவை எனில்

$P(AB) = P(A)\,P(B)$

இங்கு $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$

$P(AB) \neq 0$.

எனவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்ச்சிகள் A, B சார்பற்றவையாக இருக்கமுடியாது.

பூல்ஸ் சமனின்மை (Booles Inequality)

$A_1, A_2, \ldots A_n$ என்பவை நிகழ்ச்சிகளானால்,

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - (n-1) \quad \text{(செ.ப.)}$$

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) \leq 1$$
$$= P(A_1) + P(A_2) - 1 \leq P(A_1 A_2)$$
$$= P(A_1) + P(A_2) - 1 \leq P(A_1 A_2)$$

$$P(A_1 A_2) \geq P(A_1) + P(A_2) - 1$$

இதுபோன்றே,

$$P(A_1 \overline{A_2 A_3}) \geq P(A_1) + P(A_2 A_3) - 1$$
$$P(A_1 A_2 A_3) \geq P(A_1) + [P(A_2) + P(A_3) - 1] - 1$$
$$P(A_1 A_2 A_3) \geq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - 2$$

இவ்வாறே இச் சமனின்மையை $A_1, A_2, \ldots A_n$ என்ற n நிகழ்ச்சிகளுக்குப் பொதுவுரை ஆக்கினால்,

$$P(A_1 A_2 A_3 \ldots A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)\,(n-1)$$

தேற்றம் : $P(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$ என நிறுவுதல்.

$P(A_1 A_2 A_3 \ldots A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)\; n-1$ என நாம் அறிவோம். இச் சமனின்மையை $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots \bar{A}_n$ என்னும் நிகழ்ச்சிகளுக்குப் பயன்படுத்தினால்

$$P(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \cdots \bar{A}_n \geq P(\bar{A}_1) + P(\bar{A}_2) + \cdots P(\bar{A}_n) - (n-1)$$

$$P(\overline{A_1 + A_2} + A_3 + \cdots + \bar{A}_n) \geq 1 - P(A_1) + 1 - P(A_2) + 1 - P(A_3) + \cdots + 1 - P(A_n) - (n-1)$$

$$P(\overline{A_1 + A_2 + A_3 + \cdots A_n}) \geq 1 - P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots P(A_n) \geq 1 - P(\overline{A_1 + A_2 + A_3 + \cdots A_n})$$

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots P(A_n) \geq P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)$$

$$\therefore \quad P(A_1 + A_2 + \cdots A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \cdots P(A_n)$$

இரு ராண்டம் நிகழ்ச்சிகளின் சார்பற்ற தன்மையை வரைந்து பொருள் கூறுக. இச் சார்பற்ற தன்மை மூன்று நிகழ்ச்சிகளுக்கு எவ்வாறு விரிவாக்கப்படுகிறது, மூன்று நிகழ்ச்சிகள் இரண்டிரண்டாக நிகழ்ச்சிகள் சார்பற்றவையாக இருந்தாலும் மூன்று நிகழ்ச்சிகளுக்கும் நிறைவான சார்பற்ற தன்மை இருக்கவேண்டியதில்லை என ஓர் எடுத்துக் காட்டுடன் விளக்குக.

A, B என்னும் இரு நிகழ்ச்சிகள் சார்பற்றவை ஆயின், $P(AB) = P(A) \times P(B)$ என்னும் நிபந்தனை பூர்த்தி செய்யப்பட வேண்டும்.

$A_1\ A_2 \ldots\ldots A_n$ என்னும் 'n' நிகழ்ச்சிகள் இரண்டிரண்டாக சார்பற்றவையாக (Pairwise independent) இருக்க வேண்டுமாயின்,

$$P(A_i A_j) = P(A_i)\, P(A_j)$$

[i, j-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $i \neq j$]

n நிகழ்ச்சிகளின் நிறைவான சார்பற்ற தன்மை (Total independence of n Events) :

$A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ என்னும் n நிகழ்ச்சிகள் நிறைவான சார்பற்ற தன்மை உடையனவாயின், n நிகழ்ச்சிகளில், நிகழ்ச்சிகள் ஒருசேர நிகழ்வதற்கு உரிய நிகழ்தகவானது அவற்றின் தனித்தனி நிகழ்தகவுகளின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமமாக இருக்கும்.

எ.கா. A, B, C என்னும் 3 நிகழ்ச்சிகள் நிறைவான சார்பற்ற தன்மை உடையனவாயின்,

$$P(AB) = P(A)\, P(B)$$

$$P(BC) = P(B)\, P(C)$$

$$P(CA) = P(C)\, P(A)$$

$$P(ABC) = P(A)\, P(B)\, P(C)$$

3 நிகழ்ச்சிகளில் இரண்டிரண்டாக நிகழ்ச்சிகள் சார்பற்று இருந்தாலும் அவை நிறைவான சார்பற்ற தன்மையோடு இருக்க வேண்டியதில்லை என்பதைக் கீழ்க்கண்ட வென்விளக்கப்படம் காட்டுகிறது. கணங்களில் காணப்படும் எண்கள் அதில் உள்ள துவக்க நிகழ்ச்சிகளைக் குறிக்கிறது.

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = \frac{1}{2}$$

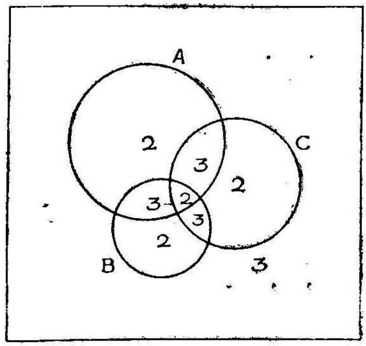
$$P(AB) = 4$$

$$P(BC) = \frac{1}{4}$$

$$P(CA) = \frac{1}{4}$$

$$P(ABC) = \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{10}$$

$$\therefore \quad P(ABC) \neq P(A)\,P(B)\,P(C)$$



படம் 6·20 A

பொதுவாக $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ என்னும் n நிகழ்ச்சிகள் நிறைவான சார்பற்ற தன்மை உடையனவாயின் கீழ்க்காணும் நிபந்தனைகள் பூர்த்தி செய்யப்படவேண்டும்.

$$\text{(i)} \quad P(A_i A_j) = P(A_i)\,P(A_j)\;[i \neq j,\; i, j = 1, 2 \ldots n]$$

$$\text{(ii)} \quad P(A_i A_j A_k) = P(A_i)\,P(A_j)\,P(A_k)$$

$$[i \neq j \neq k,\; i, j, k, = 1, 2 \ldots n]$$

$$P(A r_1 A r_2 \ldots\ldots A r_m) = P(A r_1)\,P(A r_2) \ldots\ldots P(A r_m)$$

$$[\gamma_1 \neq r_2 \neq \ldots\ldots r_m,\; m = 1, 2 \ldots n]$$

$$[1 \leq r_1 \leq r_2 \leq r_3 \ldots\ldots \leq r_m \leq n_n$$

எனவே, சமன்பாடுகள் (i), (ii) ...... முறையே $n\,C_2, n\,C_3$ ... நிபந்தனைகளைத் தருகின்றன. இவற்றை $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ என்ற நிகழ்ச்சிகள் நிறைவு செய்யவேண்டும். எனவே $A_1, A_2, \ldots\ldots A$

என்ற n நிகழ்ச்சிகளின் நிறைவான சார்பற்ற தன்மைக்குத்தேவையான கட்டுப்பாடுகளின் எண்ணிக்கை $nC_2 + nC_3 + \ldots\ldots nC_n$

ஆனால் $nC_0 + nC_1 + nC_2 \ldots\ldots + nC_n = 2^n$.

$\therefore$ கட்டுப்பாடுகளின் எண்ணிக்கை $= 2^n - 1 - n$

எ.கா. ஒரு முப்பரிமாணக் கூறுவெளியில், 5 புள்ளிகளுக்குப் பின்வருமாறு நிகழ்தகவுகள் வரையறுக்கப்படுகின்றன.

x, y, z	$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 0)$	$(1, 0, 1)$	$(0, 1, 1)$	$(0, 0, 0)$
நிகழ்தகவு	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$

A, B, C என்ற நிகழ்ச்சிகள் முறையே $x = 1,\ y = 1,\ z = 1$ என்பதைக் குறிக்கட்டும்.

$P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$ எனக் காட்டுக.

மேலும் A, B, C இரண்டிரண்டாக சார்பற்றவை அல்ல எனக் காட்டுக.

தீர்வு

$$P(A) = P(x = 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = P(y = 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = P(z = 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(x = 1, y = 1, z = 1) = \frac{1}{8}$$
$$= P(A)\,P(B)\,P(C)$$

இப்பொழுது,

$$P(A \cap B) = P(x = 1, y = 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16}$$
$$= \frac{5}{6} \neq P(A)\,P(B)$$

$$P(B \cap C) = P(y = 1, z = 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16}$$

$$= \frac{5}{16} \neq P(B)\,P(C)$$

$$P(C \cap A) = P(x = 1, z = 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16}$$

$$= \frac{5}{16} \neq P(C)\,P(A)$$

எனவே A, B, C தமக்குள் சார்பற்றவையாக,

$P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$ என இருந்தாலும், இரண்டிரண்டாக சார்பற்றவை அல்ல.

கணக்கு

ஒரு நான்முகத்திண்மத்தின் 3 பக்கங்களில் சிவப்பு, பச்சை, கறுப்பு என நிறம் பூசப்பட்டும், 4 வது பக்கத்தில் எல்லா நிறங்களும் பூசப்பட்டும் உள்ளன. நான்முகத்திண்மத்தை வீசியவுடன் அடியிற்காணப்படும் பக்கத்தின் நிறம் சிவப்பு, பச்சை,கறுப்பு எனஇருப்பதைமுறையே A, B, C என்ற நிகழ்ச்சிகள் குறிக்கட்டும். அவை இரண்டிரண்டாகச் சார்பற்றவையாய் இருப்பினும், முற்றிலும் சார்பற்றவை அல்ல என நிறுவுக.

(மைசூர் '71)

எ.கா. 2 பகடைகளை வீசும் சோதனையில் A, B, C என்ற நிகழ்ச்சிகளை அடியிற் கண்டவாறு வரையறுப்போம்.

$A =$ முதல் பகடை ஒற்றைப்படை எண்களைக் காட்டுகிறது.

$B =$ 2-வது பகடை இரட்டைப்படை எண்களைக்காட்டுகிறது.

$C =$ 2 பகடைகளுமே ஒற்றைப்படை எண்களை அல்லது இரண்டுமே இரட்டைப் படை எண்களைக் காட்டுகிறது.

$$P(A) = \frac{1}{2} = P(B) = P(C)$$

மேலும், $P(AB) = P(BC) = P(AC) = \frac{1}{4}$

$$P(ABC) = 0.$$

$$\therefore\ P(AB) = P(A)\,.\,P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(BC) = P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{4}$$

$$P(CA) = P(C) \cdot P(A) = \frac{1}{4}$$

எனவே, இந்நிகழ்ச்சிகளை இரண்டு இரண்டாக எடுத்துக் கொண்டால், சார்பற்றவையாகும்.

$$P(ABC) = 0$$

$$P(A) \cdot P(B) \cdot P(D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}$$

$$\therefore \quad P(ABC) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

எனவே இம்மூன்று நிகழ்ச்சிகளும் 'முற்றிலும் சார்பற்றவை அல்ல'

கணக்கு

ஒரு பகடை இருமுறை வீசப்படுகிறது. கூறுவெளி S 36 சோடி விளைவுகளைத் (a, b) தருகின்றன. ஒவ்வொன்றிற்கும் நிகழ்தகவு $\frac{1}{36}$ ஆகும். A, B, C பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளைக் குறிக்கட்டும்

$A = \{a, b \mid a$ ஒற்றைப் படை எண்$\}$

$B = \{a, b \mid b$ ஒற்றைப் படை எண்$\}$

$C = \{a, b \mid a+b$ ஒற்றைப் படை எண்$\}$

(i) $P(A), P(B), P(C)$ இவற்றைக் கணக்கிடுக. மேலும், $P(A \cap B), P(A \cap C), P(B \cap C), P(A \cap B \cap C)$ இவற்றையும் காண்க.

{விடை : $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}; P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(C \cap A) = \frac{1}{4}\quad P(A \cap B \cap C) = 0$}

(ii) A, B, C இரண்டிரண்டாகக் கருதும்போது சார்பற்றவை

(iii) A, B, C சார்பற்றவை அல்ல என நிறுவுக.

எ.கா. 111 121, 122, 123, 211, 212, 213, 221 என்று எண்கள் எழுதப்பெற்ற 8 சீட்டுகள் ஒரு பெட்டியில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. அதிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகிறது.

நிகழ்ச்சி A

எடுத்த சீட்டிலுள்ள முதல் இலக்கம் 1 என இருக்கவேண்டும்.

நிகழ்ச்சி B

எடுத்த சீட்டுள்ள இரண்டாவது இலக்கம் 1 ஆக இருக்க வேண்டும்.

நிகழ்ச்சி C

எடுத்த சீட்டின் 3-வது இலக்கம் 1 ஆக இருக்க வேண்டும்.

இம்மூன்று , நிகழ்ச்சிகளும் இரண்டிரண்டாக சார்பற்றவை அல்ல என நிறுவுக. ஆனால் $P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(AB) = \frac{1}{8}$$

$$P(BC) = \frac{1}{4}$$

$$P(AC) = \frac{1}{4}$$

$$P(ABC) - \frac{1}{8}$$

$$P(AC) = P(A) \cdot P(C)$$

$$P(BC) = P(B) \cdot P(C)$$

ஆனால் $P(AB) \neq P(A) \cdot P(B)$

$\therefore$ நிகழ்ச்சிகள் இரண்டிரண்டாக சார்பற்றவை அல்ல.

$$P(ABC) = \frac{1}{8} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

என இருந்தும், நிகழ்ச்சிகள் இரண்டிரண்டாகச் சார்பற்ற தன்மை பெருததால், நிறைவான சார்பற்ற தன்மை உடையவை அல்ல.

எ. கா. ஒரு நான்முகத்திண்மத்தின் முனைப்புள்ளிகள் (1, 0, 0), (0, 1, 0) (0, 0, 1), (1, 1, 1). சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு முனைப்புள்ளி தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. x, y, z ஆயத் தொலை தூரம் 1 ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சிகள் முறையே A_1, A_2, A_3 என்க.

$\therefore$ $P(A_1) = x$ ஆயத்தூரம் '1' ஆக இருக்கும் புள்ளியைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

இதுபோன்றே $P(A_2) = \frac{1}{2} = P(A_3)$

$P(A_1 A_2)$ என்பது x, y இரண்டு ஆயத்தொலைதூரங்களும் 1 ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு. 4 புள்ளிகளில் ஒரே ஒரு புள்ளி தான் x, y இரண்டையும் 1 ஆகக் கொண்டுள்ளது.

எனவே $P(A_1 A_2) = \frac{1}{4}$

இதுபோன்றே $P(A_2 A_3) = \frac{1}{4}$

,, $P(A_3 A_1) = \frac{1}{4}$

4 வது முனைப் புள்ளி (1, 1, 1) என்பதன் மூலம்

$P(A_1 A_2 A_3) = \frac{1}{4}$ எனவும் கிடைக்கிறது.

$$P(A_1 A_2) = \frac{1}{4} = P(A_1)\, P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

எனவே A_1 A_2 இரண்டும் சார்பற்றவை.

இதுபோன்றே $P(A_2 A_3) = \frac{1}{4} = P(A_2)\, P(A_3)$

$$P(A_1 A_3) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1)\, P(A_3)$$

ஆனால் $P(A_1 A_2 A_3) \neq P(A_1)\, P(A\ )\, P(A_3)$

$\because$ $P(A_1 A_2 A_3) = \frac{1}{4}$

$$P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

எனவே A_1, A_2, A_3 தமக்குள் ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றவை அல்ல.

கணக்கு

3 நிகழ்ச்சிகளின் நிறைவான சார்பற்ற தன்மைக்கும், இரண்டிரண்டாக எடுத்துக் கொள்ளும்போது காணும் சார்பற்ற தன்மைக்கும் உள்ள வேறுபாட்டை விவரி. ஒரு வீட்டில் 1-லிருந்து 8 வரை இலக்கமிடப்பட்ட 8 வாக்காளர்கள் இருக்கின்றனர். இவர்களில் முதல் நால்வர் ஆண்கள். 3-லிருந்து 6 வரை பட்டதாரிகள். 3, 5, 7, 8 ஆகியோர் எந்தக் கட்சியிலும் தொடர்பு கொள்ளாதவர்கள். இந்த 8 வாக்காளர்களிலிருந்து ஒருவர் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறர். A என்பது தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டவர் ஆணாக இருப்பதையும், B, தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டவர் பட்டதாரியாக இருப்பதையும், C தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டவருக்குக் கட்சித் தொடர்பு இல்லாததையும் குறிக்கட்டும்.

$P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$ எனக்காட்டுக மேலும் நிகழ்ச்சிகள் A, B சார்பற்றவை, B, C சார்பற்றவை ஆனுல், Aயும் Cயும் சார்பற்றவை எனக் காட்டுக. (கேரளா ப.க. '71)

தேற்றம்

முயற்சிக்கு முயற்சி மாறுபடா நிகழ்தகவு p-யைக் கொண்ட ஒரு நிகழ்ச்சி, மேற்கொள்ளும் n சோதனைகளில், சரியாக r முறைகள் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு $n\,C_r\,p^r\,q^{n-r}$.

(இங்கு $q = 1 - p$).

நிகழ்ச்சி நிகழாமலிருக்க வாய்ப்பு $= 1 - p = q$

n முயற்சிகளில் குறிப்பிட்ட r முறைகள் நிகழ்ச்சிகள் நடப்பதற்கும், மீதி $n - r$ முறைகள் நடக்காமலிருப்பதற்குமான நிகழ்தகவு $= (p \cdot p \cdot p \ldots r$ முறைகள்$)\,(q \cdot q \ldots n - r$ முறைகள்$)$

$= p^r\,q^{n-r}$ (பெருக்கல் தேற்றத்தின்படி)

ஆனுல், நிகழ்ச்சி நடப்பதற்கான r முறைகள் ஒரு குறிப்பிட்ட வரிசையில் அமையவேண்டிய அவசியமில்லை. n முயற்சிகளில், ஏதேனும் r முயற்சிகளில் நிகழ்ச்சி நடைபெற்று, மீதி $n - r$ முறைகளில் நடைபெறத் தவறுகிறது.

எனவே, இதற்கான மொத்த வழிகள் nC_r.

இவை ஒவ்வொன்றும் வெவ்வேறு வரிசைகளைக் குறிப்பதால் இவையாவும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் வழிகளாகும். ஒவ்வொரு முறைக்கும் நிகழ்தகவு $p^r q^{n-r}$; ஆதலால் கூட்டல் தேற்றப்படி,

தேவையான நிகழ்தகவு $= p^r q^{n-r} + p^r q^{n-r} + \dots n\, C_r$ முறைகள்

$$= n\, C_r\, p^r\, q^{n-r}.$$

கிளைத்தேற்றம்

(i) நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதை வெற்றியெனவும், நடைபெறத் தவறுவதைத் தோல்வி எனவும் கொண்டால் 0, 1, 2, ... r ...... n வெற்றிகளுக்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே, q^n, $n\,C_1\, pq^{n-1}$ $n\,C_2\, p^2\, q^{n-2}$, ... $n\,C_r\, p^r\, q^{r-1}$, ... $n\,C_n\, p^n\, q^0$ ஆதலால் இவற்றை $(q+p)^n$ என்ற ஈருறுப்புத் தொடரின் விரிப்பின்மூலம் பெறலாம்.

(ii) n முயற்சிகளில் குறைந்தது 1 வெற்றியாவது நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$= n\,C_1\, q^{n-1} p + n\,C_2\, q^{n-2}\, p^2 + \dots + p^r$$

$= (q+p)^n - q^n = 1 - q^n =$ மொத்த நிகழ்தகவு — எல்லா முயற்சிகளிலுமே தோல்வி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு.

எ.கா. 1. ஒரு மருத்துவ விடுதியில் குழந்தைகளின் பிறப்பு இன விகிதம் 49 பெண்கள் : 51 ஆண்கள். ஒரு நாளில் அங்கு பிறந்த 10 குழந்தைகளில் 8 அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட குழந்தைகள் பெண்ணாகப் பிறப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது ? (செ.ப.)

ஒரு ஆண் குழந்தைக்கான நிகழ்தகவு $= \dfrac{51}{100} = \cdot 51$

ஒரு பெண் குழந்தைக்கான நிகழ்தகவு $= \dfrac{49}{100} = \cdot 49.$

10 குழந்தைகளில் 8 குழந்தைகள் பெண்களாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\Big\} = 10\, C_8 (\cdot 49)^8 (\cdot 51)^2.$

10 குழந்தைகளில் 9 பேர் பெண்களாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\Big\} = 10 C_9\ (\cdot 49)^9\ (\cdot 51)$

10 பேரும் பெண் குழந்தைகளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\Big\} = 10\, C_{10}\, (\cdot 49)^{10}$

∴ தேவையான நிகழ்தகவு

$$= 10\,C_8\,(\cdot 49)^8\,(\cdot 51)^2 + 10\,C_9\,(\cdot 49)^9\,(\cdot 51) + 10\,C_{10}\,(\cdot 49)^{10}.$$

2. சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 7 நாட்களில்,

(i) சரியாக 5 நாட்கள் ஞாயிறு ஆக

(ii) குறைந்தது 5 நாட்களாவது ஞாயிறு ஆக

(iii) முதல் 5 நாட்கள் மட்டும் ஞாயிறு ஆக
இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது ?

ஒரு நாள் ஞாயிருக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{7}$

அந்த நாள் ஞாயிருக இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{6}{7}$

(i) 7 நாட்களில் 5 நாட்கள் ஞாயிறு ஆக இருப்பதற்கான

நிகழ்தகவு $= 7\,C_5 \left(\frac{1}{7}\right)^5 \left(\frac{6}{7}\right)^2$

(ii) இங்கு 5 நாட்கள் அல்லது 6 நாட்கள் அல்லது ஏழு நாட்களும் ஞாயிருக இருக்கலாம்.

எனவே, அதற்கான நிகழ்தகவு $= 7C_5 \left(\frac{6}{7}\right)^2 \left(\frac{1}{7}\right)^5$

$$+ 7C_6 \left(\frac{6}{7}\right) \left(\frac{1}{7}\right)^6 + 7C_7 \left(\frac{1}{7}\right).$$

முதல் 5 நாட்கள்மட்டும் ஞாயிறு ஆகவும், மற்ற நாட்கள் ஞாயிறு ஆக இல்லாமலும் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$\left(\frac{1}{7}\right)^5 \left(\frac{6}{7}\right)^2.$$

3. ஒரு சோதனையில் எத்தனை முறை தோல்வி ஏற்படுகிறதோ, அதுபோன்று இருமடங்கு வெற்றி ஏற்படுகிறது. இத்தகைய ஆறு சோதனைகளில் 4 சோதனைகளிலாவது வெற்றியடையவதற்கான நிகழ்தகவு யாது ?

சோதனை வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{2}{3}$

சோதனை தோல்வியுறுவதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{3}$

6 சோதனைகளில் 4 சோதனைகளாவது வெற்றியடைவதற்கான நிகழ்தகவு =

4 சோதனைகள் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு +

5 ,, ,, ,, ,, +

6 ,, ,, ,, ,,

$$= 6C_4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 6C_5 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right) + 6C_6 \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

$$= \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2^4}{3^6} + 6 \cdot \frac{2^5}{3^6} + \frac{2^6}{3^6} \cdot$$

$$= \frac{2^4}{3^6} (15 + 12 + 4) = \frac{16 \times 31}{729} = \frac{496}{729}$$

4. ஒரு குறிப்பிட்ட விளையாட்டில் வெற்றி பெறுவதற்கான A-யின் திறமை : B-யின் திறமை $= 3 : 2$. ஒரு ஆட்டமும் வெற்றி தோல்வியின்றி இரு தரப்பும் சமமாக முடியக்கூடாதெனில் 5 ஆட்டங்களில் இரண்டிலாவது B வெற்றி பெறுவதற்கான வாய்ப்பு யாது?

போட்டியில் A வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{3}{5} = 0 \cdot 6$$

,, B ,, ,, ,,

$$= \frac{2}{5} = 0 \cdot 4$$

2 போட்டிகளில் B ,, ,, ,,

$$= 5\,C_2\,(\cdot 4)^2\,(\cdot 6)^3$$

3 ,, B ,, ,, ,,

$$= 5\,C_3\,(\cdot 4)^3\,(\cdot 4)^2$$

4 ,, B ,, ,, ,,

$$= 5\,C_4\,(\cdot 4)^4\,(\cdot 6)$$

5 போட்டிகளிலும் B வெற்றி பெறுவதற்கான

$$\text{நிகழ்தகவு} = 5\,C_5\,(\cdot4)^5.$$

$$\therefore\quad \text{தேவையான நிகழ்தகவு} = 5\,C_2\,(\cdot4)^2\,(\cdot6)^3 + 5\,C_3\,(\cdot4)\,(\cdot6)^2 + 5\,C_4\,(\cdot4)^4\,(\cdot6) + 5\,C_5\,(\cdot4)^5.$$

எ.கா. n பகடைகளை வீசும்போது, கிடைக்கும் புள்ளிமுகம் '1'-ன் எண்ணிக்கை ஒற்றைப்படையாக இருந்தால், $1 - 2p = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ எனக் காட்டுக.

ஒரு பகடையைக் கொண்டு புள்ளிமுகம் '1' கிடைப்பதற்கான வாய்ப்பு $= \frac{1}{6}$.

எனவே, n பகடைகளை வீசும்போது 1, 3, 5, ... முறைகள் புள்ளிமுகம் '1' கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு, $\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\right)^n$ என்ற ஈருறுப்புக் கோவையின் விரிப்பில் மாறி மாறி வரும் (alternative terms) உறுப்புகளின்மூலம் பெறப்படுகிறது.

$$p = n\,C_1\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{6}\right) + n\,C_3\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}\left(\frac{1}{6}\right)^3 + n\,C_5\left(\frac{5}{6}\right)^{n-5}\left(\frac{1}{6}\right)^5 + \ldots\ldots$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^n [n\,C_1\,5^{n-1} + n\,C_3\,5^{n-3} + n\,C_5\,5^{n-5} + \ldots\ldots]$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^n \left[\frac{(5+1)^n - (5-1)^n}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n \{(6)^n - (4)^n\}$$

$$p = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

$$\therefore\quad 1 - 2p = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

எ.கா. 100 மின் விளக்குகள் கொண்ட ஒரு தொகுதியிலிருந்து ஏதேனும் 5 விளக்குகள் கொண்ட சம வாய்ப்புக் கூறை எடுக்கும் போது, அதில் 1-க்கும் மேல் பழுதான விளக்குகள் இராவிடில், அத்தொகுதியை ஒருவர் ஏற்றுக்கொள்கிறார். பழுதான மின் விளக்குகளின் எண்ணிக்கை 10 ஆக இருக்கும்போது, அத்தொகுதியை அவர் ஏற்றுக்கொள்வதற்கான வாய்ப்பைக் காண்க. [சென்னை ப.க.'67]

$$\text{பழுதான விளக்கிற்கான நிகழ்தகவு} = \frac{10}{100} = \cdot 1$$

எடுக்கப்படும் 5 விளக்குகள் கொண்ட கூறில் பழுதான விளக்குகளின் எண்ணிக்கை 0 அல்லது 1 ஆக இருக்கலாம்.

இவற்றிற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே $(0{\cdot}9)^5$, $5C_1\,(0{\cdot}1) \times (0{\cdot}9)^4$ ஆகும்.

எனவே தேவையான நிகழ்தகவு $= (0{\cdot}9)^5 + 5\,(0{\cdot}1)\ (0{\cdot}9)^4$

எ.கா. ஒரு நாணயம் n தடவைகள் வீசப்படும்போது, r தலைகளுக்கு மேலே கிடைக்காமலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $(nC_0 + n\,C_1 + \dots\dots + n\,C_r)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ என நிறுவுக. (குஜராத் '70)

தீர்வு

ஒரு நாணயம் வீசப்படும்போது தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2}$. தலைகளின் எண்ணிக்கை $0, 1, 2, \dots\dots r$ என இருக்கலாம்.

$(q + p)^n$-ல் $q = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{2}$ எனப் பிரதியிட்டு முதல் $(r+1)$ உறுப்புக்களைக் கூட்டினால் தேவையான நிகழ்தகவு கிடைக்கும்.

எ.கா. ஒரு பெருந் தொகுதியில் இருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் 8 எலிக்குஞ்சுகள் தேர்ந்து எடுக்கப்படுகின்றன. இந்த எட்டு எலிக்குஞ்சுகளும் ஒவ்வொன்றிலும் 4 எலிக்குஞ்சுகள் கொண்ட A, B என்ற இரு தொகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன. நான்கில் ஒன்றைக் கொல்லக்கூடிய ஒரு குறிப்பிட்ட விஷ மருந்தில் 'a' என்ற அளவு தொகுதி A யில் உள்ள ஒவ்வொரு எலிக்குஞ்சுக்கும் கொடுக்கப்படுகிறது. இரண்டில் ஒன்றைக்

கொல்லக்கூடிய மற்ருெரு விஷ மருந்தில் 'b' என்ற அளவு தொகுதி B-யில் உள்ள எலிக்குஞ்சுகளுக்குக் கொடுக்கப்படுகிறது. இருப்பினும் தொகுதி A-யை விடத் தொகுதி B-யில் இறப்பு குறைவாகவே இருக்கிறது என்பதையும், அதன் நிகழ்தகவையும் காண்க.

தொகுதி A-யை விட தொகுதி B-யில் இறப்புகள் குறைவாக இருப்பதால், பின்வரும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் நடக்கக்கூடும்.

B-யில் உள்ள இறப்புக்களின் எண்ணிக்கை	A-யில் உள்ள இறப்புக்களின் எண்ணிக்கை
0	1, 2 3 அல்லது 4
1	2, 3 அல்லது 4
2	3 அல்லது 4
3	4.

தொகுதி B-யில், 'a' அளவு விஷம் ஒரு எலிக்குஞ்சைக் கொல்வதற்கான வாய்ப்பு $\frac{1}{4}$; கொல்லாமல் இருப்பதற்கான வாய்ப்பு $\frac{3}{4}$. 'a' அளவு விஷம் 0, 1, 2 3, 4 எலிக்குஞ்சுகளைக் கொல்வதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)^4$ -ன் விரிவில் உள்ள 5 அடுத்தடுத்த உறுப்புகள் ஆகும்.

தொகுதி B-யில் 'b' அளவு விஷ மருந்து, ஒரு எலிக்குஞ்சைக் கொல்வதற்கான வாய்ப்பு $\frac{1}{2}$. அதனைக் கொல்லாமல் இருப்பதற்கான வாய்ப்பு $\frac{1}{2}$. எனவே, 0, 1, 2, 3, ஆகிய எலிகளைக் கொல்வதற்கான நிகழ்தகவுகள் $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^4$-ன் பிரிவில் அடுத்தடுத்த 5 உறுப்புகள் ஆகும்.

தொகுதி E-யில் 0 இறப்புக்கான வாய்ப்பு $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ அல்லது $\frac{1}{16}$.

தொகுதி A-யில் 1, 2, 3 அல்லது 4 இறப்புகளுக்கான வாய்ப்பு

$$4c_1\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)+4c_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2+4c_3\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^3+4c_4\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

$$=\frac{175}{256}$$

எனவே, முதல் நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு

$$=\frac{1}{16}\times\frac{175}{256}=\frac{175}{4096}.$$

அதுபோலவே

2-ஆம் நிகழ்ச்சிக்கான நிகழ்தகவு

$$=4c_1\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)\times\left[4c_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2+4c_3\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4\right]$$

$$=\frac{268}{4096}$$

3 ஆம் நிகழ்ச்சிக்கான நிகழ்தகவு

$$=4c_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[4c_3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4\right]$$

$$=\frac{78}{4096}$$

4-ஆம் நிகழ்ச்சிக்கான நிகழ்தகவு

$$=4c_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

$$=\frac{4}{4096}$$

∴ தேவையான நிகழ்தகவு

$$=\frac{175}{4096}+\frac{268}{4096}+\frac{78}{4096}+\frac{4}{4096}$$

$$= \frac{175 + 26 + 78 + 4}{4096}$$

$$= \frac{525}{4096}$$

எ கா. மின்விளக்குகள் உற்பத்தித்துறையில், பொதுவாக $12\frac{1}{2}\%$ குறையுள்ள விளக்குகள் ஒரு தொழிற்சாலையில் காணப் படுகின்றன. இத்தகைய 10 விளக்குகளில் (i) ஒன்றுமே குறையற்றதாயிருக்க. (ii) குறையுள்ளவை ஒன்றுக்கு மேற்படாமல் இருக்க நிகழ்தகவு என்ன ?

குறிப்பிட்ட ஒரு மின்விளக்கு குறையுள்ளதாக இருக்க நிகழ்தகவு $= \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$

குறையற்றதாக இருக்க நிகழ்தகவு $= \frac{7}{8}$

(i) 10 விளக்குகளில் ஒன்றுமே குறையற்றதாயிருக்க நிகழ்தகவு $= \left(\frac{1}{8}\right)^{1}$

(ii) குறையுள்ளவை ஒன்றுக்கு மேற்படாமல் இருக்க வேண்டுமாயின், எல்லாமே குறையற்றவையாக அல்லது ஒன்று மட்டும் குறையுள்ளதாக அமையலாம்.

$$\text{இதற்கான நிகழ்தகவு} = \left(\frac{7}{8}\right)^{10} + 10\, C_1 \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^{9}$$

எ.கா. எதிரியின் டாங்கி ஒன்று, ஒரு பீரங்கி குண்டால் தாக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 0·8, தாக்கப்பட்ட டாங்கி மேலும் செயலாற்றும் திறன் அற்றுப் போவதற்கான நிகழ்தகவு 0·5. திரும்பத்திரும்ப நடந்திடும் தாக்குதல்கள் சார்பற்றவை எனக் கொண்டோமானால், 5 குண்டுகளைச் சுடும்போது,

(i) குறைந்தது ஒருமுறையாவது டாங்கியைத் தாக்குவதற்கு

(ii) டாங்கியைச் செயலாற்றும் திறனற்றதாக ஆக்குவதற்கு நிகழ்தகவு என்ன ?

குண்டு டாங்கியைத்தாக்கி, அதனைச் செயலற்றதாக

ஆக்க நிகழ்தகவு $= 0{\cdot}8 \times 0{\cdot}5$

$= {\cdot}4$

டாங்கி தாக்கப்படாமல் இருக்க நிகழ்தகவு $= 1 - 0{\cdot}8 = 0{\cdot}2$

(i) குறைந்தது ஒருமுறையாவது டாங்கி தாக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $= 1 - (0{\cdot}2)^5 = {\cdot}99968$

(மொத்த நிகழ்தகவிலிருந்து, ஐந்துமுறையும் தாக்கப்படாம லிருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் கழித்துவிடுகிறேம்)

(ii) டாங்கியைத்தாக்கி, செயலற்றதாக ஆக்க, முதல் வீச்சிலேயோ அல்லது முதல் வீச்சில் தவறி இரண்டாவது வீச்சிலோ .... இறுதியாக முதல் நான்கு வீச்சுகளிலும் தவறி, இறுதியாக ஐந்தாவது வீச்சிலோ வெற்றிபெறலாம்.

இதற்கான நிகழ்தகவு $= 0{\cdot}4 + 0{\cdot}6 \times 0{\cdot}4 + (0{\cdot}6)^2\ (0{\cdot}4)$
$+ (0{\cdot}6)^3\ (0{\cdot}4) + (0{\cdot}6)^4\ (0{\cdot}4)$

$= {\cdot}92224$

பயிற்சி

1. ஒரு நிகழ்ச்சியின் பாதக விகிதம் $\frac{5}{2}$. இந்த நிகழ்ச்சியோடு சார்பற்ற மற்றொரு நிகழ்ச்சியின் சாதக விகிதம் $\frac{6}{5}$. இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளில் ஒன்ருவது நிகழ்வதற்கான வாய்ப்பு யாது?

[விடை : $\frac{52}{77}$]

2. மூன்று சமச்சீரான பகடைகளை வீசும்போது, கிடைக்கும் புள்ளிமுகங்களின் கூட்டுத் தொகை 12 ஆக இருப்பதற்கான வாய்ப்பு என்ன? (I.A.S. 70)

[விடை : $\frac{45}{216}$]

3. 10 சீட்டுக்களில் 5 வெற்றுச்சீட்டுக்கள். மற்ற 5 சீட்டுக் களும் 1, 2, 3, 4, 5 என இலக்கமிடப்பட்டவை. 3 சோதனைகளில் 10-ஐப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது? (ஒவ்வொரு சோதனைக்குப் பிறகும் எடுக்கப்பட்ட சீட்டுக்கள் மீண்டும் திருப்பி வைக்கப்படுகின்றன).

[விடை : $\frac{33}{1000}$]

4. ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து 9 சீட்டுகள் எடுக்கப்படுகின்றன. ஒவ்வொன்றிலும் $1, 0, -1$ என்ற எண்களில் ஏதேனும் ஒன்று குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது. மூன்று எண்களைத் தேர்ந்தெடுத்தலும் சரிசம வாய்ப்புள்ள நிகழ்ச்சிகள் ஆகும். எடுக்கப்பட்ட சீட்டுக்களில் உள்ள எண்களின் கூடுதல் பூஜ்யம் ஆக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன? $\left[\text{விடை : } \frac{3139}{3^9}\right]$

5. இரு பகடைகள் வீசப்படுகின்றன. பக்கங்களில் காணப்படுகின்ற எண்களின் கூட்டுத்தொகை ஒற்றைப்படையாக இருக்கும் நிகழ்ச்சி A என்க. இரு பகடைகளில் ஒரு '3' ஆவது காணப்படும் நிகழ்ச்சி B என்க. (1) $A \cup B$ (2) $A \cap B$ (3) $A - B$ (4) $(A \cap \bar{B}) \cup \bar{A}$ இந்நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

$\left[\text{விடை : (i) } \frac{23}{36} \quad \text{(ii) } \frac{6}{36} \quad \text{(iii) } \frac{11}{36} \quad \text{(iv) } \frac{23}{26}\right]$

(பம்பாய் ப.க. '69)

6. $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(\bar{A}) = \frac{5}{8}$ எனும்படியாக A, B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகள் உள்ளன.

(i) $P(A)$ (ii) $P(\bar{B})$ (iii) $P(A \cap \bar{B})$ இவற்றைக் காண்க.

$\left\{\text{விடை : (i) } \frac{3}{8} \quad \text{(ii) } \frac{3}{4} \quad \text{(iii) } \frac{1}{8}\right\}$

7. ஒரு கூறு வெளியின் நிகழ்ச்சி A, $P(\ ) = 1$ என இருந்தால் P உறுதி நிகழ்ச்சி எனப்படுகிறது. A, P உறுதி நிகழ்ச்சியாக இருக்கும்போது, B, S-ல் ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சியாக இருக்கும்போது, $P(A \cup B) = 1$, $P(A \cap B) = P(B)$ எனக் காட்டுக.

8. A, B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கு $P(A) = \cdot36$, $P(A \cup B) = \cdot64$.

(அ) A-யும், B-யும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாக

(ஆ) A-யும், B-யும் சார்பற்றநிகழ்ச்சிகளாக இருக்கும்போது $P(B)$ ஐக் காண்க.

9. A, B எனும் இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கு, $P(A) = x$, $P(B) = y$, $P(A \cup B) = z$. பின்வரும் நிகழ்தகவுகளை x, y, z-ல் காண்க.

(அ) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ (ஆ) $P(\bar{A} \cap B)$ (இ) $P(\bar{A} \cup B$ (ஈ) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ (உ) $P(A \cap \bar{B})$ (ஊ) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

[விடை (அ) $1 - z$ (ஆ) $y - z$ (இ) $1 - z + x$]

10. (அ) A, B என்பவை இருசார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள். $P(A) \frac{1}{12}$ $P(B) = \frac{3}{4}$ என இருந்தால் $P(A \cup B)$-ஐக் காண்க.

[விடை : $\frac{5}{6}$]

(ஆ) $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{3}{4}, P(A \cup B) = \frac{11}{12}$ என இருந்தால், $P(A \cap B)$-ஐக் காண்க. மேலும் $P(A/B), P(B/A)$ இரண்டையும் காண்க. [விடை : $\frac{1}{6}, \frac{2}{9}, \frac{1}{2}$]

11. A, B, C என்ற 3 நிகழ்ச்சிகள் ஒரு சோதனையுடன் தொடர்பு கொண்டுள்ளன. பின்வரும் கூற்றுகளைக் கணக் குறியீடுகளால் குறிப்பிடுக.

(அ) ஒரே ஒரு நிகழ்ச்சியாவது நிகழுதல்

(ஆ) ஒரே ஒரு நிகழ்ச்சிமட்டும் நிகழுதல்

(இ) இரு நிகழ்ச்சிகள்மட்டும் நிகழுதல்

(ஈ) இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கு மேற்படாமல் நிகழுதல்.

12. ACB என இருந்தால், $P(B - A) = P(B) - P(A)$ என நிறுவுக.

$P(AB) = \frac{1}{6}, P(A\bar{B}) = \frac{2}{6}, \quad P(A), \quad P(B), \quad P(\bar{A}\bar{B})$ இவற்றைக் காண்க. A, B சார்பற்றவையா என ஆராய்க.

13. A, B, C என்ற 3 நிகழ்ச்சிகள் கூறு வெளியைப் பிரிப்பதாகக் கொண்டு, $3P(A) = 2P(B) = 6P(C)$ என இருந்தால், $P(A \cup B)$ காண்க.

14. (அ) A, B இரு சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாயின்

$AP (\cup B) = 1 - P(\bar{A})(\bar{B})$ என நிறுவுக.

(ஆ) A, B ஏதேனும் இரு நிகழ்ச்சிகளாயின்,

$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A)\, P(B/A)$ என நிறுவுக.

15. A, B, C என்ற 26 ஆங்கில எழுத்துக்களில், முதல் 12 சம வாய்ப்பு முறையில் எழுதப்படுகின்றன. A, B இவற்றுக்கிடையே, சரியாக 4 எழுத்துக்கள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ? $\left(\text{விடை} : \frac{7}{6}6 \right)$

16. ஒரு சீட்டுக்கட்டிலுள்ள 52 சீட்டுக்களிலிருந்து சம வாய்ப்பு முறையில் 6 சீட்டுக்கள் எடுக்கப்படுகின்றன. அவற்றில் மூன்று சிவப்பாகவும், மூன்று கறுப்பாகவும் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது? $\left[\frac{13000}{39151} \right]$

17. முதல் 200 நேர்முழு எண்களிலிருந்து ஒரு முழு எண் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அந்த எண் 6 அல்லது 8-ஆல் வகுபடுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது? $\left(\frac{1}{4} \right)$

ஒவ்வொரு நிலையிலும், நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளபோது, பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

18. (அ) $P(B/B) = 1$.

(ஆ) $P(\phi/B) = 0$

(இ) $P(A_1 \subseteq A_2)$, $P(A_1/B) \leq P(A_2/B)$

(ஈ) $P(\bar{A}/\bar{B}) = 1 - P(A/B)$

(உ) $P(A_1 \cap A_2/B) = P(A_1/B) + P(A_2/B) - P(A_1 \cap A_2/B)$

(ஊ) $P(A/\bar{B}/) = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$

(எ) $P(B) = 1$, $P(A/B) = P(A)$

ஏ) $P(B) > 0$, A, B ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாயின், $P(A/B) = 0$.

19. 1-லிருந்து, n வரையுள்ள முழு எண்களுக்கு, அவற்றின் அளவுகளுக்குத் தக்கவாறு நிகழ்தகவுகள் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளன. 1 அல்லது n நிகழும்போது, 1-க்கான நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவைக் காண்க.

[குறிப்பு : $P(i) = k_{x_i}$, $i = 1, 2, \ldots\ldots n$, $\Sigma P(i) = 1$.

$$k = \frac{1}{\Sigma i} = \frac{2}{n(n+1)}$$

$\therefore$ P (1/1 அல்லது n) $= P$ (1 $\cap$ 1 அல்லது n) $\div P$ (1 அல்லது n)

$$= \left[P(1) \div [P(1) + P(n)] = \frac{1}{n+1} \right]$$

A, B, C என்ற மூன்று நிகழ்ச்சிகளில், A, B சார்பற்றவை. $P(C) = 0$. A, B, C சார்பற்றவை என நிறுவுக.

20. பின்வரும் சோதனைகளுக்கான கூறுவெளிகளை விளக்குக.

(i) 4 நாணயங்களை வீசுதல்

(ii) 3 பகடைகளை வீசுதல்

(iii) 10 நாணயங்களை வீசும்போது, அவற்றில் கிடைக்கும் பூக்களை எண்ணுதல்

(iv) ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து இரண்டு சீட்டுக்களை எடுத்தல்

(v) 3 குழந்தைகளைக் கொண்ட குடும்பங்களைப்பற்றி கணக்கெடுத்தல், அவ்வாறு எடுக்கும்போது, வயது அடிப்படையில் அவர்களின் பால் குறிக்கப்படுதல்.

21. $P(A_1 \cup A_2) = \frac{5}{6}$, $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{3}$, $P(\bar{A}_2) = \frac{1}{2}$

$P(A_1)$, $P(A_2)$ இவற்றைத் தீர்மானிக்க A_1, A_2 சார்பற்றவை என நிறுவுக.

$$\left[P(A_1) = \frac{1}{2}, P(A_2) = \frac{1}{2} \right]$$

22. n சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகள் $p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ குறைந்தது ஒரு நிகழ்ச்சியாவது நிகழ்வதற்கான வாய்ப்பினைக் காண்க. இதிலிருந்து, 3 பகடைகளை வீசும்போது, குறைந்தது ஒரு பகடையிலாவது, புள்ளிமுகம் '6' காண்பதற்கான வாய்ப்பைத் தருக. [சென்னை ப. க. 1971]

நிகழ்ச்சிகள் சார்பற்றவை ஆதலால், ஒரு நிகழ்ச்சியுமே நடக்காமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= (1 - p_1)(1 - p_2) \ldots\ldots (1 - p_n)$$

எனவே குறைந்தது ஒரு நிகழ்ச்சி நடப்பதற்கான வாய்ப்பு

$$= 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \ldots\ldots (1 - p_n)$$

பகடையில் புள்ளிமுகம் 6 கிடைக்க நிகழ்தகவு

$$= \frac{1}{6} = p_1 = p_2 = p_3$$

எனவே தேவையான நிகழ்தகவு

$$= 1 - \left[\left(1 - \frac{1}{6}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right) \right] = \frac{91}{216} \Bigg\}$$

23. ஒரு குறிப்பிட்ட கல்லூரியில் உள்ள மாணவர்களின் விவரங்கள்

500 பேர்	கற்பது	ஆங்கிலம்.
300	கற்பது	இந்தி
100	கற்பது	பஞ்சாபி
50	கற்பது	ஆங்கிலமும், இந்தியும்
20	கற்பது	ஆங்கிலமும், பஞ்சாபியும்
20	கற்பது	இந்தியும், பஞ்சாபியும்
10	கற்பது	மூன்று மொழிகளும்.

இவர்களில் சமவாய்ப்பு முறையில் ஒருவர் தேர்ந்தெடுக்கப் படுகிறார். அவர்

(i) இரண்டு, மொழிகளையும் படிக்கத் தெரிந்தவராக இருப்பதற்கு (ii) ஒரு மொழியையாவது படிக்கத் தெரிந்தவராக இருப்பதற்கு வேண்டிய நிகழ்தகவு யாது ?

24. சரியாக 3 குழந்தைகள் கொண்ட குடும்பங்களை எடுத்துக் கொள்க. bbb ; bbg, bgb, gbb, ggb, gbg, bgg, ggg என்ற இயலத் தக்க நிகழ்ச்சிகளுக்கு $\frac{1}{8}$ என்ற நிகழ்தகவை இணைத்துக் கீழ்க்கண்ட இரு நிகழ்ச்சிகளும் சார்பற்றவையா அல்லது சார்பற்றவை அல்லவா என ஆராய்க.

(A) இரண்டு பால்களிலும் குழந்தைகளிருத்தல்.

(B) ஒரு பெண் குழந்தையாவது இருத்தல்.

25. P (A) = 0·40, P (B) = 0·55, P (C) = 0·50, P ($B \cap C$) = 0·25, P ($C \cap A$) = 0·20, P ($A \cap B$) = 0·15, P ($A \cap B \cap C$) = 0·05 எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

A, B, C என்ற மூன்று நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவைக் காண்க

(i) சரியாக r நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்தல்

(ii) குறைந்தது r நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்தல்

(iii) அதிகபட்சம் r நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்தல்

இங்கு ஒவ்வொன்றிற்கும் r-ன் மதிப்பு 1, 2, 3 எனக் கொள்க.

26. ஒரு பகடையை வீசுவதும், ஒரு நாணயத்தை வீசுவதும் ஒரு சோதனையாகக் கொள்ளப்படுகிறது. நாணயத்தை வீசும் போது தலை கிடைப்பது நிகழ்ச்சி : E_1 எனவும், பகடையை வீசும்போது 3 அல்லது 6 கிடைப்பது நிகழ்ச்சி E_2 எனவும் இருந்தால், பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(i) P (E_1) (ii) P ($\bar{E}_2$) (iii) P ($\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2$) (iv) P (E_1/E_2) (v) P ($\bar{E}_1 \cup \bar{E}_2$)

விடை (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{1}{3}$ (iv) $\frac{1}{2}$ (v) $\frac{5}{6}$.

$B = \sum_n B_n$; நிகழ்ச்சிகள் B_n ஒன்றோடொன்று தொடர் பற்றவையாயும், எண்ணத்தக்கவையாயுமுள்ளன.

n-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும், P (B_n) > 0 எனின், A என்ற எந்த நிகழ்ச்சிக்கும்,

(i) $P(A/B) = \sum_n P(A/B_n)\, P(B_n/B)$

நிறுவுதல்

$$P(B) > P(B_1) > 0. \quad (B_1 \subset B)$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P\left(A \sum_n B_n\right)}{P(B)}$$

$$= \frac{P\left(\sum_n AB_n\right)}{P(B)} = \sum_n \left[\frac{P(AB_n)}{P(B)}\right]$$

$$= \sum_n \left[\frac{P(AB_n)}{P(B_n)} \cdot \frac{P(B_n)}{P(B)}\right]$$

$$= \sum_n P(A/B_n)\, P(B_n/B). \qquad (B \cap B_n = B_n).$$

27. ஒரு அறையில் மின்விளக்குகள் பொருத்தும் இடங்கள் 3 உள்ளன. கொடுக்கப்பட்டுள்ள 10 மின் விளக்குகளில் 6 மட்டும் பழுதாகாதவை. ஒரு நபர், இவற்றில் 3 விளக்குகளை எடுத்துப் பொருத்துகிறார். அறையில் வெளிச்சம் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ? [பெங்களூர் ப.க. 68]

$$\left[\textbf{விடை}: \frac{117}{125}\right]$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள்

1. 3 வெள்ளை, 5 கறுப்புப் பந்துகள் அடங்கிய ஒரு பாத்திரத்திலிருந்து ஒன்றன் பின் ஒன்றாக இரு பந்துகள் திருப்பிப் போடப்படாமல் எடுக்கப்படுகின்றன. (1) அவை வேறுபட்ட நிறமுடையனவாக இருக்க, (2) இரண்டாவதாக எடுக்கப்பட்ட பந்து வெள்ளையாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன ? [சென்னை ப.க. 1972]

மொத்தப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை $= 8$.

பந்துகள் மாறுபட்ட நிறமுடையனவாக,

அதாவது ஒன்று வெள்ளை மற்றொன்று கறுப்பாக இருக்க வேண்டும்.

இது கீழ்க்கண்ட இருவழிகளில் (ஒன்றையொன்று தவிர்க்கும்) நடக்கலாம்.

(1) முதலில் வெள்ளையும், இரண்டாவது கறுப்புப் பந்தாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{3}{8} \times \frac{5}{7}$

$$= \frac{15}{56}$$

(2) முதலில் கறுப்புப்பந்து, இரண்டாவது வெள்ளைப் பந்தாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$

$\therefore$ தேவையான நிகழ்தகவு $= \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$

(ii) இரண்டாவது பந்து வெள்ளையாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு.

இரண்டு பந்துகளுமே வெள்ளையாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $\Big\} = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{56}$

முதலில் கறுப்பு, இரண்டாவது வெள்ளைப் பந்தாக இருக்க நிகழ்தகவு $= \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$

நமக்குத் தேவையான நிகழ்தகவு $= \frac{21}{56}$

2. ஒரு பாத்திரத்தில் 3 சிவப்பு, 4 வெள்ளை, 5 நீல நிறப் பந்துகள் உள்ளன .மற்ருெரு பாத்திரத்தில் 5 சிவப்பு, 6 வெள்ளை, 7 நீலநிறப் பந்துகள் உள்ளன.ஒவ்வொரு பாத்திரத்திலிருந்தும் ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. (அ) இரண்டும் வெள்ளையாக இருக்க, (ஆ) இரண்டும் ஒரே நிறத்தை உடையனவாக இருக்க, (இ) ஒன்றுமே சிவப்பாக இராமல் இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

(சென்னை ப.க. 1970)

தீர்வு

(அ) முதல் பாத்திரத்தில் உள்ள மொத்தப் பந்துகள் = 12

இரண்டாவது பாத்திரத்தில் மொத்தப் பந்துகள் = 18.

இரண்டு பந்துகளும் வெள்ளையாக இருக்க நிகழ்தகவு

$$= \frac{4}{12} \times \frac{6}{18} = \frac{1}{9}$$

(ஆ) இரண்டும் ஒரே நிறமுடையனவாக இருக்கவேண்டுமானால், இரண்டும், சிவப்பாக அல்லது வெள்ளையாக, அல்லது நீலமாக இருக்கவேண்டும்.

$$= \frac{3}{12} \times \frac{5}{18} + \frac{4}{12} \times \frac{6}{18} + \frac{5}{12} \times \frac{7}{18}$$

$$= \frac{15 + 24 + 35}{216}$$

$$= \frac{74}{216} = \frac{37}{108}.$$

(இ) ஒன்றுமே சிவப்பாக இராமல் இருக்க, பந்துகள் இரண்டுமே வெள்ளையாகவும் அல்லது இரண்டும் நீலமாகவும், முதல் பாத்திரத்தில் வெள்ளை, இரண்டாவதில் நீலம், முதல் பாத்திரத்தில் நீலம், இரண்டாவதில் வெள்ளையாக இருக்க வேண்டும்.

$$\frac{4}{12} \times \frac{6}{18} + \frac{5}{12} \times \frac{7}{18} + \frac{4}{12} \times \frac{7}{18} + \frac{5}{12} \times \frac{6}{18}$$

$$= \frac{24 + 35 + 28 + 30}{12 \times 18} = \frac{117}{216}$$

$$= \frac{39}{72} = \frac{13}{24}$$

இரண்டாவது முறை

முதல் பாத்திரத்திலிருந்து சிவப்பு அல்லாத பந்துகள் எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{9}{12}$

இரண்டாவது பாத்திரத்திலிருந்து சிவப்பு அல்லாத பந்துகள் எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{13}{18}$

$\therefore$ தேவையான நிகழ்தகவு $= \frac{9}{12} \times \frac{13}{18} = \frac{13}{24}$

3. ஒரு நல்ல நாணயத்தைப் பூ விழும்வரை அல்லது 4 தலைகள் வரிசையாகக் கிடைக்கும் வரை வீசுகிறோம். சோதனையின் விளைவுகள் என்ன ? ஒவ்வொரு விளைவோடும் இணைந்த நிகழ்தகவு என்ன ? (செ. ப. 1970)

நாணயம் வீசும்போது பூ கிடைப்பதை T எனவும், தலை கிடைப்பதை H எனவும் கொண்டால், விளைவுகளைக் கீழ்க் கண்டவாறு குறிப்பிடலாம்.

$$T, HT, HHT, HHHT, HHHH.$$

இவ்விளைவுகளுடன் இணைந்த நிகழ்தகவுகள் முறையே

$$\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$$ ஆகும்.

4. ஒரு பையில் 3 வெள்ளை, 5 சிவப்பு, 1 கறுப்பு என 9 பந்துகள் உள்ளன. அதிலிருந்து 3 பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. அவை வெவ்வேறு நிறமுடையனவாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

எடுக்கப்படும் ஒவ்வொரு பந்தும் ஒவ்வொரு நிறமாக இருந்தால், தேவையான நிகழ்தகவு $= \dfrac{3C_1 \times 5C_1 \times 1C_1}{9\,C_8}$

$$= \frac{15}{84} = \frac{5}{28}$$

5. 7 வெள்ளை, 3 கறுப்புப் பந்துகள் உள்ள ஒரு பையிலிருந்து நான் 4 பந்துகள் எடுக்கின்றேன். குறைந்தது ஒரு கறுப்புப் பந்தாவது எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?
(சென்னை ப. க. 1968)

குறைந்தது ஒரு கறுப்பு பந்தாவது, பின்வருமாறு எடுக்கப் படலாம்.

1 கறுப்பு, 3 வெள்ளை
2 கறுப்பு, 2 வெள்ளை
3 கறுப்பு, 1 வெள்ளை

$$\therefore \text{ நிகழ்தகவு } = \frac{3C_1 \times 7C_3}{10C_4}$$

$$= \frac{3 \times 35}{210} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3C_2 \times 7C_2}{210} = \frac{3 \times 21}{210} = \frac{23}{10}$$

$$= \frac{3C_3 \times 7C_1}{210} = \frac{7}{210} = \frac{1}{30}$$

$\therefore$ தேவையான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{1}{30}$

$$= \frac{15 + 9 + 1}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

6. ஆண் குழந்தைகளின் விகிதம் $\frac{1}{2}$ எனக் கொண்டு, 6 குழந்தைகளுடைய ஒரு குடும்பத்தில், (i) எல்லா குழந்தைகளுமே ஒரே இனத்தை உடையனவாக (ii) 4 மூத்த குழந்தைகள் பெண் குழந்தைகளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

(i) எல்லா குழந்தைகளுமே பெண் குழந்தைகளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= p^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$

எல்லா குழந்தைகளுமே ஆண் குழந்தைகளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $q^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$

எனவே, தேவையான நிகழ்தகவு $= \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{32}$

(ii) 4 மூத்த குழந்தைகள் பெண்களாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= p^4 q^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$= \frac{1}{64}.$$

7. ஒரு பெட்டியில் 3 சிவப்பு, 7 வெள்ளைப் பந்துகள் உள்ளன. ஏதேனும் ஒரு பந்து எடுக்கப்பட்டு, அதனிடத்தில் வேறு நிறமுடைய மற்றொரு பந்து பெட்டியில் வைக்கப்படுகிறது. அது சிவப்பாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

முதலில் எடுக்கப்படும் பந்து வெள்ளையாக இருந்தால் திருப்பி வைக்கப்படும் பந்து சிவப்பாக இருக்கும்.

முதலில் வெள்ளைப் பந்து எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{7}{10}$.

இப்போது பெட்டியில் சிவப்புப் பந்து ஒன்று போடப்படுவதால், சிவப்புப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை 4 ஆகிறது.

எனவே, சிவப்புப் பந்து எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{4}{10}$

எனவே, இந்த இரு சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளும் நடப்பதற்கான வாய்ப்பு $= \frac{7}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{28}{100}$.

முதலில் எடுக்கப்படும் பந்து சிவப்பாக இருந்தால், திருப்பி வைக்கப்படும் பந்து வெள்ளையாக இருக்கும்.

எனவே, பெட்டியிலிருந்து சிவப்புப் பந்து எடுக்கப்பட்டு, வெள்ளைப் பந்து வைக்கப்பட்டபின், இரண்டாவதுமுறையாகச் சிவப்புப் பந்து எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{3}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{6}{100}$

$\therefore$ தேவையான நிகழ்தகவு $= \frac{28}{100} + \frac{6}{100} = \frac{34}{100}$

$= 0{\cdot}34$

எ.கா. மூன்று சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளில், முதல் நிகழ்ச்சி மட்டும் நடப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{4}$. இரண்டாவது நிகழ்ச்சி நடப்பதற்கான வாய்ப்பு $\frac{1}{8}$. மூன்றுவது மட்டும் நடப்பதற்கான வாய்ப்பு $\frac{1}{12}$. மூன்று நிகழ்ச்சிகளுக்கும், நிபந்தனைக்குட்படாத நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு

A_1, A_2, A_3 என்பவை நிகழ்ச்சிகளைக் குறிக்கட்டும். p_1, p_2, p_3 அவற்றின் நிபந்தனைக்குட்படாத நிகழ்தகவுகளைக் குறிக்கட்டும்.

$$P(A_1\ \bar{A}_2\ \bar{A}_3) = \frac{1}{4}.$$

$$P(A_1)\,P(\bar{A}_2)\,P(\bar{A}_3) = \frac{1}{4} \quad (\because\ A, B, C \text{ சார்பற்றவை})$$

$$p_1(1-p_2)(1-p_3) = \frac{1}{4} \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) = \frac{1}{8}\,.$$

$$(1-p_1)\,p_2\,(1-p_3) = \frac{1}{8} \qquad \ldots\ldots(2)$$

$$P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = \frac{1}{12}\,.$$

$$(1-p_1)(1-p_2)\,P_3 = \frac{1}{12} \qquad \ldots\ldots(3)$$

(1), (2), (3) யிலிருந்து $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{3}$, $p_3 = \frac{1}{4}$ எனக் கிடைக்கும்.

எ.கா. A, B எனும் இருவர் ஒரு வழக்கில் இரு தனிப்பட்ட சாட்சிகள்; A உண்மையைப் பேசுவதற்கான நிகழ்தகவு x; B உண்மையைப் பேசுவதற்கான நிகழ்தகவு y. ஒரு குறிப்பிட்ட வாக்குமூலத்தில் A, B இருவரும் ஒரே மாதிரியாகக் கூறுகின்றனர். இந்த வாக்குமூலம் உண்மையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$\frac{xy}{1-x-y+2xy}$$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு

A_1, என்பது A, B இருவரும் ஒரு வாக்கு மூலத்தில் ஒரே மாதிரியாகக் கூறும் நிகழ்ச்சி.

A_2, அந்த வாக்குமூலம் உண்மையாக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி.

$$P(A_1) = x\cdot y + (1-x)(1-y)$$

$$= 1-x-y+2xy$$

$$P(A_1 A_2) = xy.$$

$$P(A_2/A_1) = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)}$$

$$= \frac{xy}{1-x-y+2xy}$$

எ. கா. ஒரு பரிசுச் சீட்டுக் குலுக்கலில், மொத்தமுள்ள n சீட்டுகளில் ஒவ்வொரு முறையும் m சீட்டுகள் எடுக்கப்படுகின்றன. எடுக்கப்படும் சீட்டு, ஒவ்வொரு முறையும் திரும்ப வைக்கப்படு கிறது. h தடவைகள் எடுக்கும்போது. $1, 2, \ldots\ldots n$ என்ற எண் களில் ஒவ்வொன்றும் ஒரு முறையாவது வருவதற்கான நிகழ்தகவு,

$$p_k = 1 - n\,C_1\left(1-\frac{m}{n}\right)^k + n\,C_2\left(1-\frac{m}{n}\right)^k\left(1-\frac{m}{n-1}\right)^k$$

என நிறுவுக.

தீர்வு

$A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ என்பவை முறையே, k முறைகள் சீட்டுகளை எடுக்கும்போது, $1, 2, \ldots\ldots n$ என்ற எண்கள் ஒரு முறையாவது வருவதற்கான நிகழ்ச்சிகளைக் குறிக்கட்டும்.

$\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots\ldots \bar{A}_n$ என்பவை, k முயற்சிகளில், $1, 2, \ldots\ldots n$ என்பவை வராமல் இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சிகளைக் குறிக்கட்டும்.

$$\therefore\quad P(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \ldots\ldots + \bar{A}_n) = \sum_{i=1}^{n} P(\bar{A}_i)$$

$$- \sum_{\substack{i,\,j=1 \\ i<j}}^{n} P(\bar{A}_i\,\bar{A}_j) + \ldots\ldots$$

ஒரு முறை சீட்டை எடுக்கும்போது, r-ஆவது எண் வருவதற்கான நிகழ்தகவு $= \dfrac{m}{n}$

எனவே, ஒருமுறை சீட்டை எடுக்கும்போது, r-ஆவது எண், வராமலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \left(1-\dfrac{m}{n}\right)$

சீட்டுகளை எடுத்தபின், ஒவ்வொருமுறையும் திருப்பி வைக்கப் படுவதால்,

$P(\bar{A}_i) = k$ முயற்சிகளில் i-ஆவது எண் வராமலிருப்பதற் கான நிகழ்தகவு

$$= \left(1-\frac{m}{n}\right)^k$$

$$\therefore\quad \sum_{i=1}^{n} P(\bar{A}_i) = n\,C_1\left(1-\frac{m}{n}\right)^k$$

ஒரு முயற்சியில், இரு குறிப்பிட்ட எண்கள் வராதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{n-2\, C_m}{n\, C_m}$$

$$= \frac{(n-m)(n-m-1)}{n(n-1)}$$

$$= \left(1-\frac{m}{n}\right)\left(1-\frac{m}{n-1}\right)$$

$\therefore\ P(\bar{A}_i\ \bar{A}_j) = k$ முயற்சிகளில், i-ஆவது, j-வது எண்கள் வராமலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \left(1-\frac{m}{n}\right)^k \left(1-\frac{m}{n-1}\right)^k$$

$$\therefore \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} P(\bar{A}_i\ \bar{A}_j) = n\, C_2 \left(1-\frac{m}{n}\right)^k \left(1-\frac{m}{n-1}\right)^k$$

அதுபோலவே,

$$\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n} P(\bar{A}_i\ \bar{A}_j\ \bar{A}_k) =$$

$$n\, C_3 \left(1-\frac{m}{n}\right)^k \left(1-\frac{m}{n-1}\right)^k \left(1-\frac{m}{n-2}\right)^k$$

$$\therefore\ P(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \ldots\ldots + \bar{A}_n)$$

$$= n\, C_1 \left(1-\frac{m}{n}\right)^k - n\, C_2 \left(1-\frac{m}{n}\right)^k \left(1-\frac{m}{n-1}\right)^k$$

$$+ n\, C_3 \left(1-\frac{m}{n}\right)^k \left(1-\frac{m}{n-1}\right)^k \left(1-\frac{m}{n-2}\right)^k - \ldots\ldots$$

$$\therefore\ P(A_1\, A_2 \ldots\ldots A_n) = 1 - P(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \ldots\ldots + \bar{A}_n)$$

$$= 1 - nC_1\left(1-\frac{m}{n}\right)^k + nC_2\left(1-\frac{m}{n}\right)^k\left(1-\frac{m}{n-1}\right)^k$$

$$- nC_3\left(1-\frac{m}{n}\right)^k\left(1-\frac{m}{n-1}\right)^k\left(1-\frac{m}{n-2}\right)^k + \cdots$$

எ.கா. 1 லிருந்து 100 வரை குறிப்பிடப்பட்டுள்ள சீட்டுக் களிலிருந்து, சமவாய்ப்பு முறையில் 3 சீட்டுகள் எடுக்கப்படு கின்றன. சீட்டுகளில் காணப்படும் மீப்பெரு எண் 50ஐ விட அதிகமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவென்ன? (செ.ப.க '72)

தீர்வு

எடுக்கப்படும் 3 சீட்டுகளில் காணப்படும் மீப்பெரு எண் 50ஐ விட அதிகமாக இருக்கவேண்டுமாயின், அது, 51, 52,... 100 இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றாக இருக்கலாம்.

மீப்பெரு எண் 51 ஆக இருக்கும்போது, மீதி இரு எண்களும் 1லிருந்து 50 வரையுள்ள எண்களில் ஏதேனும் இரு எண்களாக இருக்கலாம்.

இதற்கான சாதகமான வழிகளின் எண்ணிக்கை $= 50C_2$.

100 எண்களிலிருந்து ஏதேனும் 3 எண்கள் எடுப்பதற்கான மொத்த வழிகள் $= 100C_3$.

மீப்பெரு எண் 51 ஆக இருக்க

$$\text{நிகழ்தகவு} = \frac{50C_2}{100C_3}$$

இதுபோன்றே, மீப்பெரு எண் 52 ஆக இருக்க

$$\text{நிகழ்தகவு} = \frac{51C_2}{100C_3}$$

இறுதியாக, மீப்பெரு எண் 100 ஆக இருப்பதற்கான

$$\text{நிகழ்தகவு} = \frac{99C_2}{100C_3}$$

(மீதி இரு எண்களும், 1-99 எண்களில் ஏதேனும் 2 எண்களா யிருக்கலாம்.)

$$\therefore \text{ தேவையான நிகழ்தகவு} = \frac{50C_2}{100C_3} + \frac{51C_2}{100C_3} + \cdots + \frac{99C_2}{100C_3}$$

எ. கா. ஒரு நாணயம் $(m+n)$ முறைகள் வீசப்படுகிறது. $(m>n)$ தொடர்ந்து m தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{n+2}{2^{m+1}}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

i ஆவது முறை நாணயம் வீசப்படுவதிலிருந்து, தொடர்ந்து m தலைகள் கிடைப்பதை E_i என்க.

$\therefore$ தேவையான நிகழ்தகவு $= P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_{n+1})$ ($m > n$ ஆக இருப்பதால், m தலைகள் தொடர்ந்து ஒருமுறை தான் கிடைக்க இயலும். இத் தொடர் முதல் வீச்சிலோ, இரண்டாவது வீச்சிலோ...இறுதியாக $(n+1)$ ஆவது வீச்சிலோ தொடங்கலாம்.)

$P(E_1) = P$ (முதல் m வீச்சுக்களில் தொடர்ந்து தலைகளும், மீதி வீச்சுக்களில் தலை அல்லது பூவும் கிடைத்தல்)

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

$P(E_2) = P$ (முதல் வீச்சில் தலை, தொடர்ந்து m தலைகள், அடுத்து தலை அல்லது பூ கிடைத்தல்)

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^m = \frac{1}{2^{m+1}}$$

பொதுவாக, $P(E_r) = P$ ($r-1$ ஆவது வீச்சில் பூவும், அதைத் தொடர்ந்து m தலைகளும், அதையடுத்து தலை அல்லது பூவும் கிடைத்தல்.)

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^m = \frac{1}{2^{m+1}} \quad (r = 2, 3 \dots\dots\dots)$$

$\therefore$ தேவையான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2^m} + \frac{n}{2^{m+1}} = \frac{n+2}{2^{m+1}}$

எ.கா. $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் உள்ள ஒவ்வொரு குணகமும் ஒரு பகடையை வீசுவதன்மூலம் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. இச் சமன்பாட்டிற்கு மெய்மூலங்கள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு

$ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யானவையாக இருக்கவேண்டுமாயின்,

$b^2 - 4ac \geq 0$.

a, *b*, *c*-யின் மதிப்புக்கள், ஒரு பகடையை வீசுவதன்மூலம் பெறப்படுவதால் அவை 1 லிருந்து 6 வரை இருக்கலாம்.

மொத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை $= 6^3 = 216$.

சாதகமான நிகழ்ச்சிகளைப் பின்வருமாறு பிரிக்கலாம்.

$b^2 \geq 4ac$ ஆக இருக்க வேண்டுமாதலால்,

ac		a	c	$4ac$	b	நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை
1.		1	1	4	2, 3, 4, 5, 6	$1 \times 5 = 5$
2.	(அ)	1	2	8	3, 4, 5, 6	$2 \times 4 = 8$
	(ஆ)	2	1			
3.	(அ)	1	3	12	4, 5, 6	$2 \times 3 = 6$
	(ஆ)	3	1			
4.	(அ)	1	4	16	4, 5, 6	$3 \times 3 = 9$
	(ஆ)	4	1			
	(இ)	2	2			
5.	(அ)	1	5	20	5, 6	$2 \times 2 = 4$
	(ஆ)	5	1			
6.	(அ)	6	1	24	5, 6	$4 \times 2 = 8$
	(ஆ)	1	6			
	(இ)	3	2			
	(ஈ)	2	3			
7.	($ac = 7$ ஆக இருக்க முடியாது)					0
8.	(அ)	2	4	32	6	$2 \times 1 = 2$
	(ஆ)	4	2			
9.		3	3	36	6	1
						43

$b^2 \geq 4\,ac$ ஆக இருக்கவும், b^2ன் மீப்பெருமதிப்பு 36 ஆக இருக்கவும்,

ac, 10, 11, 12,... என்ற மதிப்புகளைப் பெறமுடியாது.

எனவே, சாதகமான நிகழ்ச்சிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை = 43.

$\therefore$ தேவையான நிகழ்தகவு $= \frac{43}{216}$

பயிற்சி

1. ஆண் குழந்தை பிறப்பதற்கான நிகழ்தகவு ·55 எனவும், அடுத்தடுத்த இரு குழந்தைகளின் பிறப்பு பால் (*sex*) சார்பற்றவையாகவும் இருக்கும்போது, 5 குழந்தைகள் உள்ள ஒரு பெண்மணிக்கு,

(i) மூன்று ஆண் குழந்தைகளும்,இரண்டு பெண் குழந்தைகளும் இருக்க ;

(ii) இரு இனத்தையும் சேர்ந்த குழந்தைகள் இருக்க ;

iii) மகன், மகள், மகன், மகள், மகன் என்ற வரிசையில் அமைய;

(iv) ஏற்கெனவே இரு ஆண் குழந்தைகள் இருக்கும்போது, இன்னும் இரு ஆண் குழந்தைகள் இருக்க ;

நிகழ்தகவினைக் கணக்கிடுக. (பூனா '65)

[விடை : (i) $5c_3\,(0{\cdot}55)^3\,(0{\cdot}45)^2$

(ii) $1 - (0{\cdot}55)^5\,(0{\cdot}45)^5$

(iii) $(0{\cdot}55)^3\,(0{\cdot}45)^2$]

2. 20 பகடைகள் வீசப்படுகின்றன. சரியாக ஐந்து "6" (புள்ளி முகம்) கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவென்ன?

$$\left[\text{விடை : } \frac{20c_5 \cdot 5^{15}}{20^6}\right]$$

3. n சீட்டுக்கள் விற்கப்பட்ட ஒரு பரிசுக் குலுக்கலில் m பரிசுகள் தரப்படுவதாக உள்ளது. இதில் ஒருவர் 5 சீட்டுகள் வாங்கியுள்ளார் (1) முதல் பரிசைப் பெறுவதற்கான (2) சரியாக ஒரு பரிசைப் பெறுவதற்கான (3) குறைந்தது ஒரு பரிசைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க. (செ. ப. க. 1971)

4. ஒரு பையில் 2 சிவப்பு, 3 நீலம், 5 பச்சைப் பந்துகள் உள்ளன. 3 பந்துகள், பையிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. அவை,

(i) வெவ்வேறு நிறமுடையனவாக இருக்க ;

(ii) இரு பந்துகள் ஒரே நிறமுடையனவாக இருக்க ;

(iii) எல்லாப் பந்துகளும் ஒரே நிறமுடையனவாக இருக்க நிகழ்தகவென்ன?

[விடை : (i) 30/120 (ii) 79/120 (iii) 11/120]

5. (அ) நான்கு நாணயங்கள் வீசப்படும்போது, இரு தலைகளும், இரு பூக்களும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது ?

$$\left(\text{விடை}: \frac{6}{16}\right)$$

(கான்பூர் ப.க.'71)

(ஆ) ஒரு நாணயத்தை 17 முறைகள் வீசும்போது, 10 தலைகள் தொடர்ந்து வருவதற்கான நிகழ்தகவென்ன? (கேரளா ப.க.'70)

6. முகவரி எழுதப்பட்ட 5 உறைகளில், 5 கடிதங்கள் வைக்கப்படுகின்றன. இரு கடிதங்கள் மட்டும் சரியான உறைகளில் வைக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது ? (கல்கத்தா '71)

7. பூனாவிலுள்ள அலாகா தியேட்டரிலிருந்து, பெர்கூசன் கல்லூரி போகும் வழியில், போக்குவரத்தைக் கட்டுப்படுத்தும் மூன்று போலீஸார் ஒவ்வொருவராலும், ஒரு நபர் நிறுத்தப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.6.

(i) மூன்று போலீஸாரும் அவரை நிறுத்துவதற்கான;

(ii) ஒரு போலீஸாருமே நிறுத்தாமலிருக்க;

(iii) முதல் போலீஸார் நிறுத்தவும், மற்ற இருவர் விட்டுவிடுவதற்குமான :

(iv) குறைந்தது இரு போலீஸாராவது நிறுத்துவதற்கான ;

(v) சரியாக இரு போலீஸார் நிறுத்துவதற்கான நிகழ்தகவைக் கணக்கிடுக.

8. ஒரு பையில் 1, 2, ... 50 என்ற எண்கள் குறிப்பிடப்பட்ட 50 சீட்டுகள் உள்ளன. அவற்றில் சமவாய்ப்பு முறையில்

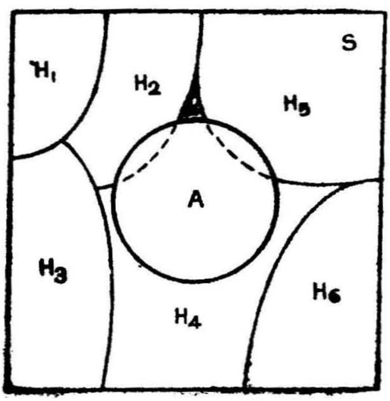
5 சீட்டுக்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு, எண்கள் ஏறு வரிசையில் எழுதப்படுகின்றன. ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$. $x_3 = 30$ ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

[விடை : $\frac{29c_2 \times 20_2}{50c_5}$]

9. எண்முகப் பகடையை வீசி முதலாவதாக புள்ளிமுகம் '1' பெறும் நபர் பந்தயத்தில் வெற்றி பெறுகிறுர். 4 நபர்கள் ஆட்டத்தில் கலந்துகொண்டால், கடைசி நபர் வெற்றி பெறுவதற்கான வாய்ப்பு என்ன ? [விடை : $\frac{343}{1695}$]

10. இரு பகடைகளை வீசும்போது, ஒரு முறையாவது இரட்டை '6' கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ -ஐவிட அதிகமாக இருப்பதற்காகப் பகடையைக் குறைந்தது எத்தனை முறைகள் வீச வேண்டும் ?

11. 50 வயதுடைய ஒரு ஆண் 60 வயதுவரை வாழ்வதற்கான நிகழ்தகவு 0·83 எனவும், 45 வயதுடைய ஒரு பெண் 55 வயதுவரை வாழ்வதற்கான நிகழ்தகவு 0·87 எனவும் தரப்பட்டிருக்கும்போது, 50 வயதுடைய ஒரு ஆணும், 45 வயதுடைய அவரது மனைவியும் இன்னும் 10 ஆண்டுகள் வாழ்வதற்கான வாய்ப்பு என்ன ? (ஆக்ரா ப.க.) [விடை : 0·7221]



படம் 6·21

பேயிஸ் தேற்றம்

(Baye's Theorem)

$H_1, H_2, H_3, \ldots\ldots H_n$ என்பவை ஒரு வினவுக் கணத்தின் தொடர்பற்ற பகுதிகள். அவற்றின் சேர்க்கை கூறுவெளி S ஆகவும், $P(H_i) \neq 0$ ($i = 1, 2, \ldots\ldots n$) எனவும் இருக்கும்போது கூறுவெளி Sல் A ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சியைக் குறிப்பிட்டால்,

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)\,P(A \mid H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P(A \mid H_i)}$$

நிறுவுதல் :

$H_i\ (i = 1, 2, \dots n)$ என்பவை விளைவுக் கணத்தின் தொடர்பற்ற பகுதிக்கணங்கள்.

எனவே $S = H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup \dots\dots \cup H_n$

$$A = A \cap S = A \cap [H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup \dots \cup H_n]$$

$$= (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \dots \cup (A \cap H_n)$$

$$\therefore\ P(A) = P[(A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \dots \cup (A \cap H_n)]$$

$$= P[A \cap H_1] + P[A \cap H_2] + \dots + P[A \cap H_n]$$

(மொத்த நிகழ்தகவுத் தேற்றத்தின்படி)

நிகழ்தகவின் பெருக்கல் விதிப்படி,

$$P(A \mid H_i) = \frac{P(A \cap H_i)}{P(H_i)}$$

$$\therefore\ P(A \cap H_i) = P(H_i)\,P(A \mid H_i)$$

$$\therefore\ P(A) = [A \cap H_1] + [A \cap H_2] + \dots + P[A \cap H_n]$$

$$= P(H_1)\,P(A \mid H_1) + P(H_2)\,P(A \mid H_2) + \dots + P(H_n)\,P(A \mid H_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P(A \mid H_i)$$

மேலும் நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவின் வரையிலக்கணப்படி,

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(A \cap H_i)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A \cap H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P(A \mid H_i)}$$

$$= \frac{P(H_i)\,P(A \mid H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P(A \mid H_i)}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள்

1. மூன்று பாத்திரங்களில் கீழ்க்காணும் வகையில் பந்துகள் காணப்படுகின்றன.

	வெள்ளை	கறுப்பு	சிவப்பு
1 வது பாத்திரம்	1	2	3
2 வது பாத்திரம்	2	1	1
3 வது பாத்திரம்	4	5	3

இவற்றில் ஏதேனும் ஒரு பாத்திரம் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அதிலிருந்து இரண்டு பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. அவை வெள்ளை, சிவப்பு நிறமுடையனவாய் உள்ளன. அவை முதல், இரண்டாவது, அல்லது மூன்ருவது பாத்திரங்களிலிருந்து வருவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

H_1, H_2, H_3 என்பவை முறையே 1 வது, 2 வது, 3 வது பாத்திரங்களைத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட பாத்திரத்திலிருந்து எடுக்கப்படும் இரு பந்துகள் வெள்ளை, சிவப்பு நிறமுடையனவாயிருக்கும் நிகழ்ச்சியை A என்க.

$\therefore$ $P(H_1/A)$ என்பது இரு பந்துகளும் வெள்ளை, சிவப்பு நிறமுடையவையாய் இருக்கும்போது, அவை முதல் பாத்திரத்திலிருந்து எடுக்கப்படும் நிகழ்தகவைத் தருகிறது.

பேயிஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\,P(A/H_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(H_i)\,P(A/H_i)}$$

$P(A/H_1)$ என்பது முதல் பாத்திரத்தைத் தேர்ந்தெடுத்த பிறகு அதிலிருந்து 1 வெள்ளை, 1 சிவப்புப் பந்து எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு.

$$\therefore \quad P(A/H_1) = \frac{1 \times 3C_1}{6C_2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

இதுபோன்றே

$$P(A/H_2) = \frac{2C_1 \times 1}{4C_2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(A/H_3) = \frac{4C_1 \times 3C_1}{12C_2} = \frac{12}{\frac{12 \times 11}{2}} = \frac{2}{11}$$

$$\therefore \quad P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\,P(A/H_1)}{P(H_1)\,P(A/H_1) + (P\,H_2)\,P(A/H_2) + P(H_3)\,P(A/H_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{5}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{11}}$$

$$= \frac{\frac{1}{15}}{\frac{118}{495}} = \frac{33}{118}$$

எடுக்கப்படும் இரு பந்துகளும் சிவப்பு, வெள்ளையாக இருக்கும்போது, அவை 2வது பாத்திரத்திலிருந்து கிடைப்பதற்கான

நிகழ்தகவு $P(H_1/A) = \dfrac{P(H_2)\,P(A/H_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(H)\,P(A/H)}$

ஆனால் $\sum_{i=1}^{3} P(H_i)\,P(A/H_i) = \frac{118}{495}$

$$\therefore \quad P(H_2/A) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{118}{495}} = \frac{55}{118}$$

இது போன்றே

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3)P(A/H_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A/H_i)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{11}}{\frac{118}{495}} = \frac{\frac{2}{33}}{\frac{118}{495}} = \frac{30}{118}$$

$P(H_3/A)$ ஐ வேறு வழியிலும் பெறலாம்.

$$P(H_3/A = 1 - [P(H_1/A) + P(H_2/A)]$$

$$= 1 - \left[\frac{33}{118} + \frac{55}{118}\right] = \frac{30}{118}$$

2. ஒரு தொழிலதிபர் தன் காரில், A, B, C_1 எனும் மூன்று ஊர்களில் ஒன்றிற்குச் சுற்றுலா சென்று வருகிறார். அவ்வூர்களில் மழை பெய்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு முறையே A_1ல் $\frac{1}{3}$ என்றும், B_1ல் $\frac{1}{4}$ என்றும், C_1ல் $\frac{1}{6}$ என்றும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அவர் திரும்பிவரும்போது, காரில் சேறு காணப்படுகிறது. அவர் ஊர் C_1 சென்று வந்ததற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

H_1, H_2, H_3 என்ற நிகழ்ச்சிகள் தொழிலதிபர் முறையே A_1, B_1, C_1 எனும் ஊர்களுக்குச் சென்றுவருவதற்கான நிகழ்ச்சிகளைக் குறிக்கின்றன.

$$\therefore \quad P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$$

A அவர் மழைபெய்துள்ள ஊருக்குச்சென்று காரில் சேறுடன் திரும்பும் நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கட்டும்.

$$P(A/H_1) = \frac{1}{3}; \; P(A/H_2) = \frac{1}{4}; \; P(A/H_3) = \frac{1}{6}$$

காரில் சேறு காணப்படும்போது, அவர் C_1 சென்று வந்தத

கான நிகழ்தகவு $P(H_3/A)$

$$= \frac{P(H_3)\,P(A/H_3)}{P(H_1)\,P(A/H_1)+P(H_2)\,P(A/H_2)+P(H_3)\,P(A/H_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}}$$

$$= \frac{\frac{1}{18}}{\frac{9}{36}} = \frac{2}{9}$$

3. எலிகளின் பெருந்தொகுதி ஒன்றில் 70% ஆண்டியன் (Andean) இனத்தைச் சார்ந்தவை. 30% இமாலயன் (Himalayan) இனத்தைச் சார்ந்தவை. ஆண்டியன் எலிகளில் 30%ம், இமாலயன் எலிகளில் 50% ம் சிவப்புக் காதுகளை உடையவை. சமவாய்ப்பு முறையில் ஏதேனும் ஓர் எலி எடுக்கப்படும்போது அது சிவப்புக் காதுகளை உடையதாகக் காணப்படுகிறது. பேயிஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, அது ஆண்டியன் இனத்தைச் சார்ந்தது என்பதற்கான நிகழ்தகவைக் கணக்கிடுக.

H_1, H_2 என்ற நிகழ்ச்சிகள் முறையே எலிகள் ஆண்டியன், இமாலயன் இனத்தைச் சார்ந்தனவாய் இருப்பதைக் குறிக்கட்டும்.

$P(H_1) = \cdot7 \quad P(H_2) = \cdot3$

A எனும் நிகழ்ச்சி, தேர்ந்தெடுக்கப்படும் எலி சிவப்பு நிறக் காதை உடையதாயிருக்கும் என்பதைக் குறிக்கட்டும்.

$P(A/H_1) = \cdot3 \quad P(A/H_2) = \cdot5$

தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டுள்ள, சிவப்புக்காதை உடைய எலி ஆண்டியன் இனத்தைச் சார்ந்திருக்க நிகழ்தகவு $P(H_1/A)$

$$\therefore\ P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\,P(A/H_1)}{P(H_1)\,P(A/H_1) + P(H_2)\,P(A/H_2)}$$

(பேயிஸ் தேற்றத்தின்படி)

$$= \frac{\cdot7\times\cdot3}{\cdot7\times\cdot3+\cdot3\times\cdot5} = \frac{\cdot21}{\cdot36} = \frac{7}{12}$$

4. ஒரு தொழிற்சாலையில் A, B, என்ற இரண்டு இயந்திரங்கள் மொத்த உற்பத்தியில் முறையே 40%, 60% தருகின்றன. சராசரி

1000 உற்பத்திப் பொருட்களில் 9 பொருட்கள் குறையுள்ளதாக A-யின் உற்பத்தியிலும், B-யின் உற்பத்தியில் 250-க்கு ஒன்று குறையுள்ளதாகவும் காணப்படுகின்றன. ஒரு நாளைய உற்பத்திப் பொருட்களில் ஏதேனும் ஒரு பொருள் சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படும்போது, அது குறையுள்ளதாகக் காணப்படுகிறது. அப்பொருள் இயந்திரம் B-யிலிருந்து கிடைத்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

H_1, H_2 என்பவை இயந்திரங்கள் A, B தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்ச்சிகளாகும்.

$$P(H_1) = \cdot 4 \quad P(H_2) = \cdot 6$$

X, தேர்ந்தெடுக்கப்படும் பொருள் பழுதுடையதாக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கட்டும்.

$$P(X/H_1) = \frac{9}{1000}$$

$$P(X/H_2) = \frac{1}{250}$$

எடுக்கப்படும் பொருள் குறையுள்ளதாக இருக்கும்போது, அது B-யின் உற்பத்தியைச் சார்ந்ததாய் இருப்பதற்கான

நிகழ்தகவு $P(H_2/X) = \dfrac{P(H_2)\,P(X/H_2)}{P(H_1)\,P(X/H_1) + P(H_2)\,P(X/H_2)}$

$$= \frac{\cdot 6 \times \cdot 004}{\cdot 4 \times \cdot 009 + \cdot 6 \times \cdot 004} = \cdot 4$$

5. 3 வெள்ளை, 5 கறுப்புப்பந்துகள் உள்ள ஒரு பாத்திரத்திலிருந்து, 4 பந்துகள் ஒரு காலிப் பாத்திரத்திற்கு மாற்றப்படுகின்றன. இந்த பாத்திரத்திலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்பட்டு, அது வெள்ளையாகக் காணப்படுகிறது. மாற்றப்பட்ட நான்கு பந்துகளில் 3 வெள்ளையாகவும், 1 கறுப்பாகவும் இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

மாற்றப்படும் பந்துகளில் முறையே 0, 1, 2, 3, 4 வெள்ளைப் பந்துகள் இருப்பதை H_0, H_1, H_2, H_3, H_4 எனும் நிகழ்ச்சிகள் குறிக்கட்டும். இவை ஒன்றையொன்று தவிர்க்கும் நிகழ்ச்சிகள்

$$P(H_0) = \frac{5c_4 \times 3c_0}{8c_4}$$

$$P(H_1) = \frac{3c \times 5c_3}{8c_4}$$

$$P(H_2) = \frac{3c_2 \times 5c_2}{8c_4}$$

$$P(H_3) = \frac{3c_3 \times 5c_1}{8c_4}$$

$$P(H_4) = 0$$

எடுக்கப்பட்டுள்ள பந்து வெள்ளையாயிருக்கும் நிகழ்ச்சி A எனின்,

$$P(A/H_0) = 0; \quad P(A/H_1) = \frac{1}{4}; \quad P(A/H_2) = \frac{2}{4}$$

$$P(A/H_3) = \frac{3}{4}; \quad P(A/H_4) = 1.$$

எடுக்கப்பட்டுள்ள பந்து வெள்ளையாய் இருக்கும்போது காலி பாத்திரத்திற்கு மாற்றப்பட்டுள்ள பந்துகளில் 3 வெள்ளையாயும், 1 கறுப்பாயும் இருக்க நிகழ்தகவு $P(H_3/A)$.

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A/H_3)}{\sum_{i=0}^{4} P(H_i)\, P(A/H_i)}$$

$$= \frac{1}{7}$$

6. A, B; C என்ற மூவர் 1975-ல் ஒரு கல்லூரி முதல்வராக வருவதற்குரிய நிகழ்தகவுகள் 4 : 2 : 3 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. A தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டால் கல்லூரியில் கூட்டுக் கல்வி வருவதற்கான நிகழ்தகவு; ·3, B, C-க்கு நிகழ்தகவுகள் முறையே ·5, ·8 ஆகும். 1975-ல் கல்லூரியில் கூட்டுக் கல்வி வருவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

A, கல்லூரி முதல்வராக வருவதற்குரிய நிகழ்தகவு

$$P(A) = \frac{4}{9}$$

$$P(B) = \frac{2}{9}$$

$$P(C) = \frac{3}{9}$$

1975-ல் கூட்டுக் கல்வி வருவதற்குரிய நிகழ்ச்சி H என்க.

$$\therefore \quad P(H/A) = \cdot 3 \; P(H/B) = \cdot 5 \; P(H/C) = \cdot 8$$

$$P(H) = P[(A \cap H) \cup (B \cap H) \cup (C \cap H)]$$

$$= P(A \cap H) + P(B \cap H) + P(C \cap H)$$

$$= P(A)\,P(H/A) + P(B)\,P(H/B) + P(C)\,P(H/C)$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{10} + \frac{3}{9} \cdot \frac{8}{10}$$

$$= \frac{1}{90}[12 + 10 + 24] = \frac{46}{90} = \frac{23}{45}$$

எ. கா. மீனுவிடம் ஒரே மாதிரி தோற்றம் உடைய 2 பைகள் இருந்தன. ஒன்றில் 3 சிவப்பு, 2 வெள்ளை கோலிகளும் மற்றொன்றில் 1 சிவப்பு, 4 வெள்ளை கோலிகளும் இருந்தன. அவள் ப்ரியாவிடம் இரண்டு பைகளில் ஒன்றை சமவாய்ப்பு முறையிலும், அப்பையி லிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு கோலியும் எடுக்குமாறு கூறுகிருள். இக்கோலி முதல் பையிலிருந்து எடுத்த சிவப்பு கோலியாய் இருக்க சாதக விகிதம் என்ன?

தீர்வு

B_1, B_2 என்பவை முறையே முதல், 2-ஆம் பைகளில் இருந்து கோலியை எடுப்பதற்கான நிகழ்ச்சிகளைக் குறிக்கின்றன. A என்பது அவற்றிலிருந்து ஒரு சிவப்புக் கோலியை எடுப்பதற்கான நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கட்டும். நிகழ்ச்சி நிகழுவதற்கான நிகழ்தகவு $P(x)$ என இருக்கட்டும்.

B_1, B_2 என்ற 2 நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

$$P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2} \cdot$$

$$P(A/B_1) = \frac{3}{5}$$

$$P(A/B_2) = \frac{1}{5}.$$

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A/B_1)}{P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2)\, P(A/B_2)}$$

$$P(B_1/A) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}}$$

$$= \frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{5} + \frac{1}{5}}$$

$$= \frac{3}{4}.$$

முதல் பையிலிருந்து, ஒரு சிவப்பு கோலியை எடுப்பதற்கான சாதக விகிதம் $= \frac{3}{4}$.

பயிற்சி

1. ஒரு தொழிற்சாலையில் 3 இயந்திரங்கள் A, B, C முறையே 1000, 2,000, 3,000 திருகுகளை ஒவ்வொரு நாளும் உற்பத்தி செய்கின்றன. அவற்றில் A, 1%ம், B 1·5%ம், C, 2%ம் குறையுள்ளவற்றை உற்பத்தி செய்கின்றன. ஒரு நாளின் உற்பத்தியில் ஒரு திருகு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டபோது அது குறையுள்ளதாகக் காணப்பட்டது. அது இயந்திரம் A-யின் உற்பத்தியிலிருந்து வந்தது என்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(விடை : 0·1)

2. கொடுக்கப்பட்டுள்ள பைகளிலிருந்து, ஏதேனும் ஒரு பையில் இரண்டு பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. அவைகளில் ஒன்று சிவப்பாகவும், மற்றொன்று வெள்ளையாகவும் இருக்கின்றன. அப்படியானால், அவ்விரு பந்துகளும் முதல் பையிலிருந்து எடுக்கப்பட்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(விடை : $\frac{68}{25}$)

3. இரு பெட்டிகளில் முறையே 4 வெள்ளை, 3 சிவப்புப் பந்துகளும், 3 வெள்ளை, 7 சிவப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. அவற்றில் ஒரு பெட்டி ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு, அதிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. பந்து வெள்ளையாக இருந்தால், அது முதல் பெட்டியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டுள்ளதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

4. பத்து கலங்களில், முதல் வகை 3 கலங்களில் ஒவ்வொன்றிலும் 1 வெள்ளை, 9 கறுப்புப் பந்துகளும், இரண்டாம் வகை 3 கலங்களில் ஒவ்வொன்றிலும் 9 வெள்ளை, 1 கறுப்புப் பந்துகளும், மீதமுள்ள மூன்றும் வகை 4 கலங்களில் ஒவ்வொன்றிலும் 5 வெள்ளை, 5 கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. ராண்டமாக ஒரு கலம் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு, அதிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்படும்போது அது வெள்ளையாக உள்ளது. 1 வெள்ளை 9 கருப்புப் பந்துகள் அடங்கிய கலத்திலிருந்து அது எடுக்கப்படுவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

[குறிப்பு : $P(H_1) = \frac{3}{10}$; $P(H_2) = \frac{3}{10}$; $P(H_3) = \frac{4}{10}$.

வெள்ளைப் பந்து எடுக்கும் நிகழ்ச்சி A ஆனால்

$$P(A) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{9}{10} + \frac{4}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

$$P(A/H_1) = \frac{1}{10} \qquad \therefore\ P(H_1/A) = \frac{P(A/H_1)\ P(H_1)}{P(A)}$$

$$= \frac{\frac{1}{10} \times \frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{50}\Bigg]$$

5. ஒரு மாற்றுவிடைத் தேர்வில் ஒரு வினவுக்கு விடையளிக்கும்போது ஒரு மாணவருக்கு உண்மையிலேயே விடை தெரிவதற்குரிய நிகழ்தகவு p, விடை இதுவாக இருக்கலாம் என அனுமானித்து விடை காண்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $1 - p$. விடை தெரிந்த மாணவருக்கு ஒரு கேள்விக்குச் சரியான விடையளிக்க நிகழ்தகவு 1 எனவும், அனுமானித்துச் சொல்பவருக்கு அது $\frac{1}{m}$ எனவும் இருந்தால் (m என்பது மாற்று விடைகளின்

எண்ணிக்கை,) ஒரு மாணவர் ஒரு வினவுக்குச் சரியான விடையளித்திருக்கும் போது, அவர் சரியான விடையைத் தெரிந்து கொண்டே விடையளித்திருத்தார் என்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{mp}{[1+(m-1)p]}$ எனக்காட்டுக.

[குறிப்பு : H_1 = மாணவருக்குச் சரியான விடை தெரிவதற்கான நிகழ்ச்சி.

H_2 = மாணவர் விடையை அனுமானிக்கும் நிகழ்ச்சி.

A = மாணவர் சரியான விடையை எழுதும் நிகழ்ச்சி.

$$P(H_1) = p \qquad P(H_2) = 1-p \qquad P(A/H_1) = 1$$

$$P(A/H_2) = \frac{1}{m}\Big]$$

6. விஜயா, மீனு, ப்ரியா எனும் 3 சகோதரிகளும் தங்கள் வீட்டுப் பாத்திரங்களை இரவில் சுத்தம் செய்வதுண்டு. மூத்த பெண் விஜயா 4 % வேலையையும், இளையவர் இருவரும் மீதி 60 % வேலையைச் சமமாகப் பங்கிட்டும் செய்வதுண்டு. தட்டுகளைக் கழுவும்போது குறைந்தது ஒரு தட்டாவது உடைவதற்கான நிகழ்தகவு முறையே விஜயா, மீனு, ப்ரியாவிற்கு ·02, ·03, ·02. தட்டுகளை யார் கழுவுகிறார்கள் எனப் பெற்றோருக்குத் தெரியாது. ஒரு நாள் இரவில் ஒரு தட்டு உடையும் சத்தம் கேட்கிறார்கள். அப்போது விஜயா, மீனு அல்லது ப்ரியா பாத்திரத்தைக் கழுவிக் கொண்டிருந்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

7. 2 சிவப்பு, 1 கருப்புப் பந்துக்களைக் கொண்ட μ_1 என்ற கலம், 3 சிவப்பு, 2 கருப்புப் பந்துகளைக் கொண்ட μ_2 என்ற கலம், ஒரு சிவப்பு, ஒரு கருப்புப் பந்துகளைக் கொண்ட μ_3 என்ற கலம் ஆகியவற்றில் ஒரு கலம் சம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்து எடுக்கப்படுகிறது. அக்கலத்திலிருந்து 1 பந்து எடுக்கப்படுகிறது. அதன் நிறம் கறுப்பு. அக்கறுப்புப்பந்து μ_3-லிருந்து எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது ?

8. 5 வெள்ளை, 2 கருப்புப் பந்துகளைக் கொண்ட 5 பைகளும், 4 வெள்ளை, 2 கருப்பு பந்துகளைக் கொண்ட 2 பைகளும் உள்ளன.

ஒரு கருப்புப்பந்து அவற்றிலிருந்து எடுக்கப்படுகிறது. அந்த பந்து முதல் தொகுதியில் இருந்து வந்ததற்கான நிகழ்தகவு யாது ?

9. ஒரே மாதிரி தோற்றமுடைய 3 பெட்டிகளில் ஒவ்வொன்றிலும் இரு நாணயங்கள் உள்ளன. முதல் பெட்டியில் இரண்டு நாணயங்களும் தங்கம். 2-ஆவது பெட்டியில் இரண்டும் வெள்ளி. 3-ஆவது பெட்டியில் ஒன்று வெள்ளி, மற்றது தங்கம். சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பெட்டி தேர்ந்து எடுக்கப்பட்டு அதிலிருந்து ஒரு நாணயமும் தேர்ந்து எடுக்கப்படுகிறது. எடுக்கப்பட்ட நாணயம் தங்கமாக இருக்கும்போது, பெட்டியில் உள்ள மற்ற நாணயமும் தங்கமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது ?

7. சமவாய்ப்பு மாறிகள்

(RANDOM VARIABLES)

ஒரே மாதிரியான சூழ்நிலையில் திரும்பத்திரும்பச் செய்தாலும், முடிவுகள் இவைகளாகத்தான் இருக்கும் என முன்கூட்டியே தீர்மானிக்க இயலாத சோதனைகள் ராண்டம் சோதனைகளாகும். ராண்டம் சோதனையின் விளைவுகளே ராண்டம் மாறிகள். பகடையை வீசுவது, சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு மாணவரது உயரம் அல்லது எடை அல்லது மதிப்பெண்ணைக் குறித்திடுவது போன்ற ராண்டம் சோதனைகளின் முடிவுகளை எண்களால் குறிப்பிடலாம். நாணயத்தை வீசுதல், சீட்டுக்கட்டி லிருந்து எடுக்கப்படும் ஒரு சீட்டின் நிறத்தைக் குறித்தல், ஒரு மருத்துவமனையில் குறிப்பிட்ட ஒரு தினத்தன்று பிறக்கும் குழந்தைகளை ஆண், பெண் எனப் பாகுபாடு செய்தல் போன்ற வற்றில் முடிவுகள் எண்களாயிரா. இருப்பினும் நாணயத்தை வீசும்போது தலைவிழுந்தால் 1 எனவும், பூ விழுந்தால் 0 எனவும் குறிக்கலாம். இதுபோல் எடுக்கப்படும் சீட்டின் நிறம் கறுப்பாக இருந்தால் 1 எனவும், சிவப்பாக இருந்தால் 0 என்றும் பிறக்கும் குழந்தை பெண்ணாக இருந்தால், 1 எனவும், ஆணாக இருந்தால் 0 எனவும் நாமே எண்களை ராண்டம் சோதனைகளின் முடிவு களுடன் தொடர்பு படுத்தலாம்.

ஒரு நாணயத்தை இருமுறை வீசுவதை ஒரு சோதனையாகக் கொள்வோம். தலைவிழுவதை 1 எனவும், பூ விழுவதை 0 எனவும் குறித்தால் விளைவு கணம் (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) என்ற விளைவுகளைக் கொண்டதாக உள்ளது.

X என்பது சோதனையின் முடிவில் கிடைக்கும் தலைகளின் கூட்டுத்தொகை எனக் குறிப்போம்.

எனவே X,

$S = \{ (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) \}$ என்ற விளைவு கணத்தில் வரையறுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்பு மாறியாகும். இச்சோதனையில் தலைகளின் எண்ணிக்கை 0, 1, 2 தான் இருக்கமுடியும்.

எனவே, X-ன் வீச்சுகணம் $A = \{0, 1, 2\}$ என்பது $R = (-\infty, \infty)$ என்ற மெய்க்கோட்டில் (real line) அடங்கியுள்ளது.

இதே சோதனையில் Y என்பது "தலைகளின் எண்ணிக்கை — பூக்களின் எண்ணிக்கை" என இருந்தால் Y, $B \{-2, 0, 2\}$ என்பதை வீச்சுகணமாக உடைய ஒரு தனித்த ராண்டம் மாறியாகும்.

ஒரு ஜோடி பகடைகளை வீசுவதைச் சோதனையாகக் கொள்வோம். இரு பகடைகளிலும் காணும் எண்களின் கூட்டுத் தொகையை X எனக் கொண்டால் X, 2, 3, 4 ...... 12 என்ற மதிப்புகளை ஏற்கிற சமவாய்ப்பு மாறியாகும். இங்கு வீச்சு கணம் $\{2, 3, \ldots\ldots 12\}$ ஆகும்.

எனவே, சோதனையின் விளைவுகளை மெய் எண்களோடு தொடர்புபடுத்தல் இயலும்.

எனவே,ஒரு ராண்டாம் மாறி X என்பது கூறுவெளி S-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்டுள்ள மெய்மதிப்புடைய ஒரு சார்பாகும்.

ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து 4 சீட்டுகள் எடுப்பதை ராண்டம் சோதனையாகக் கொள்வோம். X என்பது கிடைக்கக்கூடிய சிவப்பு சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை எனில் X, (0, 1, 2, 3, 4) என்ற மதிப்புகளை ஏற்கின்ற சமவாய்ப்பு மாறி. இதற்குரிய கூறுவெளி $52\,C_4$ கூறுப்புள்ளிகளை உடையது.

தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி (Discrete Random Variable)

X என்ற மாறியின் வீச்சுகணம் முடிவுற்றதாகவோ (finite), அல்லது எண்ணிடத்தக்க அளவு முடிவில்லாததாகவோ (countably infinite) இருப்பின், X ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியாகும். அதாவது X முடிவுற்ற அல்லது எண்ணிடத்தக்க அளவு, முடிவில்லா மதிப்புகளை மட்டுமே ஏற்கிறது.

1. 3 நாணயங்களை வீசிக் கிடைக்கும் பூக்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிப்பதாயின், வீச்சுகணம் $\{0, 1, 2, 3\}$ என்ற ஒரு முடிவுற்ற கணமாகும்.

2. பூ கிடைக்கும்வரை நாணயத்தை வீசிக்கொண்டே இருப்பதாக, சமவாய்ப்பு சோதனையை எடுத்துக்கொள்வோம் r-ஆவது முயற்சியில், தலைவிழுந்தால் சமவாய்ப்பு மாறி $X = r$,

என வரையறுப்போம்: எனவே, இங்கு வீச்சுகணம் $\{1, 2, 3. \ldots n\}$. ஒரு எண்ணிடத்தக்க முடிவில்லா கணமாகும்.

நிகழ்தகவுச் சார்பு (Probabily Function)

x என்ற தனித்த மாறி ஏற்கும் மதிப்புகள் $x_1, x_2, \ldots\ldots$ என்று இருக்கட்டும். x-க்கு வரையுற்ற, அல்லது எண்ணிடத்தக்க வரையற்ற மதிப்புகள்தான் இருக்கமுடியும்·

1. $p(x_i) \geq 0 \; i = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

2. $\sum\limits_i p(x_i) = 1$ என்ற இரு நிபந்தனைகளும் பூர்த்தி செய்யப்பட்டால், $p(x)$ ஒரு நிகழ்தகவுச் சார்பாகும். சமவாய்ப்பு மாறியின் பல்வேறு மதிப்புகள் x_i-ம், அவற்றிற்கான நிகழ்தகவுகள் $f(x_i)$-ம் சேர்ந்து $(i = 1, 2, \ldots\ldots n)$ ஒரு தனித்த நிகழ்தகவும் பரவலைக் குறிக்கின்றன.

(எ.கா.) ஒரு பகடையை வீசும்போது பெறப்படும் நிகழ்தகவுப் பரவல்.

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

(i) $p(x) \geq 0$;

(ii) $\sum p(x) = 1$.

கணக்கு

மூன்று நாணயங்களை வீசும்போது கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கையின் நிகழ்தகவுப் பரவலைக் காண்போம்.

வீச்சுகணம் $\{0, 1, 2, 3\}$ இங்கு சமவாய்ப்பு மாறி 3 நாணயங்களை வீசும்போது கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கை.

$$x \text{ தலைகள் விழுவதற்கான நிகழ்தகவு} = 3\,C_x \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

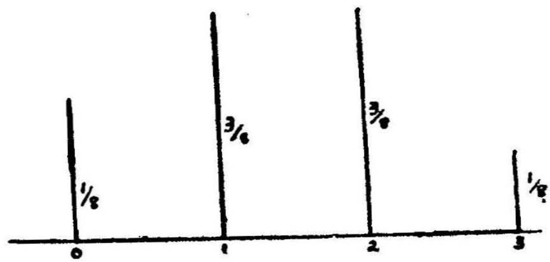
$$= 3\,C_x \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

எனவே நிகழ்தகவுப் பரவல்

x	0	1	2	3
$P(x)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3$

1. $p(x) \geq 0, \ (0 \leq x \leq 3)$

2. $$\sum p(x) = \sum_{x=0}^{3} 3C_x \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1$$



படம் 7·1

எ.கா. 10 மாணவர், 15 மாணவியர், அடங்கிய ஒரு தொகுதியிலிருந்து மூவரை ஒருவர்பின் ஒருவராகத் தேர்ந்தெடுக்கிறோம். தேர்ந்தெடுக்கப்படும் மாணவியரின் எண்ணிக்கை சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனல், X-ன் நிகழ்தகவுப் பரவல் என்ன ?

விடை : $$P(X = x) = 3C_x \left(\frac{3}{5}\right)^x \left(\frac{2}{5}\right)^{3-x}$$

$$x = 0, 1, 2, 3$$

குறிப்பு (i) $p(x)$ என்பது நிகழ்தகவு சார்பானல், $p(2)$ என்பது, சமவாய்ப்பு மாறி X, 2 என்னும் மதிப்பை ஏற்பதற்கான நிகழ்தகவு.

(ii) $P(\alpha < X < \beta)$ என்பது, சமவாய்ப்பு மாறி X, α விற்கும் β விற்கும் இடையிலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு.

எ.கா. ஒரு ஜோடிப் பகடைகளை வீசும்போது கிடைக்கும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை, சமவாய்ப்பு மாறி X, ஆனால், X-ன் நிகழ்தகவுப் பரவலைக் காண்க.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$p(x) = 0$, மற்றெங்கிலும்.

இங்கு (i) $p(x) \geq 0$

(ii) $\Sigma p(x) = 1$ என்ற இரு நிபந்தனைகளும் நிறைவு செய்யப்படுகின்றன.

(i) X ஒரு ஒற்றைப்படை எண்ணாக இருக்க விரும்பினோமானால்,

$$p(x) = p(3) + p(5) + p(7) + p(9) + p(11)$$

$$\frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36}$$

$$= \frac{1}{36} = \frac{1}{2}$$

(ii) சமவாய்ப்புமாறி X, 9ஐ விட அதிகமான மதிப்புக்களை ஏற்க.

$$\text{நிகழ்தகவு} = p(X > 9) = p(10) + p(11) + p(12)$$

$$= \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

குவிவுப் பரவல் சார்பு (Cumulative Distribution Function)

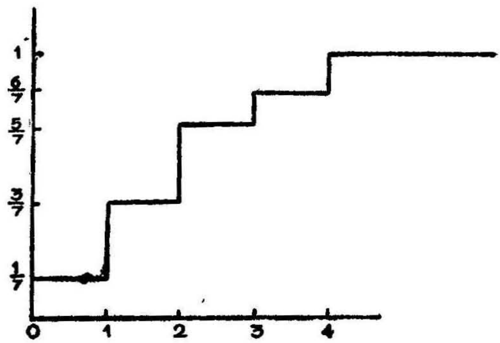
X என்பது ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி.

$F(x) = P(X \leq x)$ என்ற சார்பு, $R(-\infty, \infty)$ என்ற நேர்க்கோட்டில் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளிக்குக் கீழே Xன் மதிப்பு அமைவதற்கான நிகழ்தகவைத் தருகிறது. $F(x)$ குவிவுப் பரவல் சார்பு (அல்லது) பரவல் சார்பு எனக்கூறப்படுகிறது.

எனவே $F(x) = \Sigma\, p(x_i),\ x_i \leq n$ என அமையும், i ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் கூட்டுத் தொகை கணக்கிடப்படுகிறது.

எ. கா. xன் நிகழ்தகவுப் பரவல் வருமாறு.

x	$p(x)$
0	$\frac{1}{7}$
1	$\frac{2}{7}$
2	$\frac{2}{7}$
3	$\frac{1}{7}$
4	$\frac{1}{7}$



படம் 7·2

$p(x) = 0$ மற்றெங்கிலும், பரவல் சார்பைக் காண்க.

$$F(0) = P\ x \leq 0) = \frac{1}{7}$$

$$F(1) = P(x \leq 1) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$$

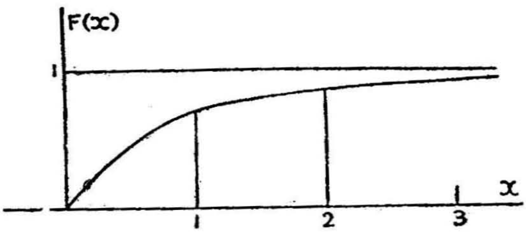
$$F(2) = P(x \leq 2) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

$$F(3) = P(x \leq 3) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

$$F(4) = P(x \leq 4) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = 1$$

$$\therefore \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, (-\infty < x < 0) \\ \frac{1}{7} & x = 0\ (0 \leq x < 1) \\ \frac{3}{7} & x = 1\ (1 \leq x < 2) \\ \frac{5}{7} & x = 2\ (2 \leq x < 3) \\ \frac{6}{7} & x = 3\ (3 \leq x < 4) \\ 1 & x = 4\ (4 \leq x < \infty) \end{cases}$$

என்பதே பரவல் சார்பாகும்.



படம் 7·3

பரவல் சார்பின் பண்புகள்

(i) $F(-\infty) = 0$.

(ii) $F(\infty) = 1$

(iii) $F(a) \leq F(b)$, $a < b$.

X, 1-க்கும் 3-க்கும் இடையே இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7} = P(1 < x \leq 3)$$

இந் நிகழ்தகவு $= F(3) - F(1) = \frac{6}{7} - \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$ எனவும் கணக்கிடலாம்.

பொதுவாக, X ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியாக இருக்கும்போது

$$P[x_0 < X \leq x_0 + \Delta x_0] = \sum_{x_0 < x \leq x_0 + \Delta x_0} P(x)$$

$$= F(x_0 + \Delta x_0) - F(x)$$

இங்கு, $x_0 + \triangle x_0$ என்பது x_0-லிருந்து, $\triangle x_0$ என்ற நேர்க் குறியுடைய அளவால் மாறுபடும் புள்ளியைக் குறிக்கிறது.

கணக்கு

$f(x) = \frac{x}{\sigma}, x = 1, 2, 3$

$= 0$ என அமையும். நிகழ்வெண் பரவலின், மற்ற இடங்களில் பரவல் சார்பைக் காண்க. மற்றும் $y = x^2$ என்ற சார்பிற்கும் பரவல் சார்பைக் காண்க.

(செ.ப.)

$$f(1) = \frac{1}{\sigma}$$

$$f(2) = \frac{2}{\sigma}$$

$$f(3) = \frac{3}{\sigma}$$

$$F(0) = 0$$

$$F(1) = f(1) = \frac{1}{\sigma}$$

$$F(2) = f(1) + f(2) = \frac{1}{\sigma} + \frac{2}{\sigma} = \frac{3}{\sigma}$$

$$F(3) = f(1) + f(2) + f(3) = \frac{6}{\sigma}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{\sigma} & x = 1 \\ \frac{3}{\sigma} & x = 2 \\ \frac{6}{\sigma} & x = 3 \end{cases}$$

என்பதே பரவல் சார்பாகும்.

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = \frac{1}{\sigma}$$

$$f(2) = \frac{4}{\sigma}$$

$$f(3) = \frac{9}{\sigma}$$

$$F(0) = 0$$

$$F(1) = \frac{1}{\sigma}$$

$$F(2) = f(1) + f(2) = \frac{5}{\sigma}$$

$$F(3) = f(1) + f(2) + (3) = \frac{14}{\sigma}$$

எனவே பரவல் சார்பு

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{\sigma} & x = 1 \\ \frac{5}{\sigma} & x = 2 \\ \frac{14}{\sigma} & x = 3. \end{cases}$$

தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி (Continuous Random Variable)

தனித்த கூறுவெளி (dicete sample space) முடிவுற்ற அல்லது எண்ணிடத்தக்க முடிவுற்ற (countably infinite) கூறு புள்ளிகளை உடையதெனவும், தனித்த கூறுவெளியுடன் தொடர்பு படுத்தி வரையறுக்கப்பட்டுள்ள மாறியே தனித்த மாறியெனவும் நாம் அறிவோம்.

ஒரு மக்கட் தொகுதியின் எடைகளைக் குறித்திடும் ஒரு சம வாய்ப்புச் சோதனையில், எடைகள் ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் எந்த மெய்யெண் மதிப்பையும் ஏற்குமாதலால் புள்ளிகளின் மதிப்புகள் தொடரகமாக (continuum) அமையும்.

தனிப்பட்ட அல்லது விடுபட்ட மதிப்புகள் மட்டுமின்றி ஓர் இடைவெளியிலுள்ள எல்லா மதிப்புகளையுமே பெறவல்ல மாறியே தொடர்மாறியாகும். எடுத்துக்காட்டாக, மனிதரின் உடல் வெப்ப

நிலை 99°-க்கு அடுத்து 100°-க்குத் தாவுவதில்லை. 99° — 100° என்ற இடைவெளியில் தொடர்ந்து எல்லா மதிப்புகளையும் பெறு கிறது. இதுபோலவே உயரங்கள், எடைகள், வாயுவின் அழுத்தம் போன்றவையும் தொடர் மாறிகளே. X-ன் வீச்சு வெளியில் எண்ணிடத்தக்க மதிப்புகளே இருக்கும்போது, ஒவ்வொரு மதிப்புடனும் x_i-ன் நிகழ்தகவாகிய $p(x_i)$ என்ற குறை குறியல்லாத எண்ணைத் தொடர்பு படுத்துகிறோம். கொடுக்கப் பட்டுள்ள இடைவெளி (a, b)-யில் சமவாய்ப்பு மாறி X, எல்லா மதிப்புகளையும் தொடர்ந்து பெறுவதால் இந்த இடைவெளியில் X-ன் i ஆவது மதிப்பு பற்றிக் குறிப்பிடவே இயலாது. எனவே $p(x_i)$ என்பது பொருளற்றதாகி விடுகிறது. எனவே, $\left(x - \frac{dx}{2}, x + \frac{dx}{2}\right)$ என்று x-ஐச் சுற்றியுள்ள கழி நுண் (infinite simal) இடைவெளியில் x இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $f(x)\,dx$ எனக் குறிப்பிடப்பட்டால், இத் தொடர்ச் சார்பு $f(x)$ நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு (probability density function) என வரையறுக்கப்படுகிறது.

வரையறை

X என்ற தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாக $f(x)$ இருக்க வேண்டுமானால்,

1. $f(x) \geq 0$ [x-ன் எல்லா மதிப்புகட்கும்]

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$f(x)$ என்ற நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்புக்கு, சமவாய்ப்பு மாறி X, (a, b) என்ற இடைவெளியில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$p[a < x < b] = \int_a^b f(x)\,dx$$

தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியின் பரவல் சார்பு

(Distribution Function of a Continuous Random Variable)

X ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி. $F(x) = P(X \leq x)$ என இருக்குமானால், $F(x)$, X-ன் பரவல் சார்பு எனப்படுகிறது.

$$\therefore \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$$

பரவல் சார்பின் பண்புகள்

(i) $\underset{x \to -\infty}{Lt} F(x) = 0.$ அதாவது $F(-\infty) = 0.$

(ii) $\underset{x \to \infty}{Lt} F(x) = 1.$ அதாவது $F(\infty) = 1.$

(iii) $f(x)$ ஐ நிகழ்தகவு [ஆடர்த்திச் சார்பாகக்கொண்ட தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியின் பரவல் சார்பாக $F(x)$ இருக்கட்டும்.

இதிலிருந்து, F-ன் வகைக்கெழு காணக்கூடிய (differentiable) x-ன் எல்லா மதிப்புகட்கும்,

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

நிறுவுதல்

$$\text{(i)} \quad F(-\infty) = \underset{x \to -\infty}{Lt} \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = 0.$$

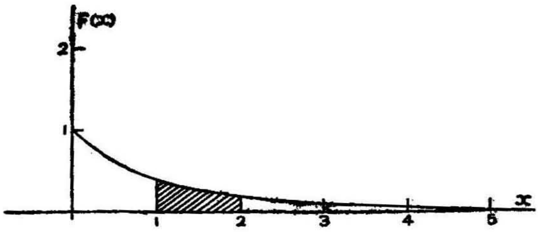
$$\text{(ii)} \quad F(\infty) = \underset{x \to \infty}{Lt} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1.$$

$$\text{(iii)} \quad F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = 1$$

$\therefore \quad F'(x) = f(x)$ [தொகைக்கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றத்திலிருந்து]

தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியின் பரவல் சார்பின் படம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது (படம் 7·4). தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் பரவல் சார்பின் வரை படிபோன்ற அமைப்பில் (step-function) உள்ளது. ஆனால், தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியின் பரவல் சார்பின்

வரையோ இழைத்து வரையப்பட்டுள்ள வரையாக, (smoot curve), மீப்பெரு y தூரம் '1' ஆகவும், மீச்சிறு y தூரம் '0' ஆகவும் கொண்டுள்ளது.



படம் 7·4

எ.கா. அடர்த்திச் சார்பு $f(x) = k\ (2 - x)\ (0 < x < 2)$ $f(x) = 0$, மற்றெங்கிலும் எனில் k-ன் மதிப்பு காண்க.

$f(x)$ என்பது ஒரு அடர்த்தி சார்பு ஆயின்,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} k\,(2 - x)\,dx = 1$$

$$\left[2\,k\,x - k.\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 1$$

$$4\,k - 2\,k = 1$$

$$2\,k = 1 \qquad \therefore\ k = \frac{1}{2}$$

எ கா. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி x-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le -a \\ \frac{1}{a^2}(a+x) & -a < x \le 0 \\ \frac{1}{a^2}(a-x) & 0 < x \le a \\ 0 & x \ge a. \end{cases}$$

(i) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ என நிறுவுக.

(ii) பரவல் சார்பு $F(x)$ ஐக் கணக்கிடுக.

தீர்வு

(i) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-a} 0\,dx + \int_{-a}^{0} \frac{a+x}{a^2}\,dx + \int_{0}^{a} \frac{a-x}{a^2} + \int_{a}^{\infty} 0\cdot dx$$

$$= 2\int_{0}^{a} \frac{a-x}{a^2} = 1.$$

(ii) $-a < x \le 0$ என்ற வீச்சில் உள்ள ஒவ்வொரு x-ற்கும்,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{a} 0\,dt + \int_{-a}^{x} \frac{a+t}{a^2}\,dt$$

$$= \frac{ax + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}a^2}{a^2}$$

$0 < x < a$-ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-ற்கும்,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-a} 0\,dt + \int_{-a}^{0} \frac{a+t}{a^2}\,dt + \int_{0}^{x} \frac{a-t}{a^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{ax - \frac{1}{2}x^2}{a^2}$$

$x \geq a$ ஆக இருக்கும், ஒவ்வொரு x-ற்கும்,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-a} 0\,dt + \int_{-a}^{0} \frac{a+t}{a^2}\,dt + \int_{0}^{\infty} \frac{a-t}{a^2}\,dt$$

$$+ \int_{0}^{x} 0\cdot dt = 1.$$

எ. கா. ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு அடியில் வருமாறு :

$$f(x) = k\,x(1-x) \qquad 0 < x < 1$$

$= 0$ மற்றெங்கிலும்.

k-ன் மதிப்பையும், பரவல் சார்பையும் காண்க.

$f(x)$, நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பானால்.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

$$\therefore \int_{0}^{1} kx(1-x)\,dx = 1.$$

$$k\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1$$

$$\frac{k}{6} = 1$$

$$\therefore \quad k = 6$$

பரவல் சார்பு $F(x)$-ஐக் காணுதல்.

$$F(x) = 0, \quad x \leq 0$$

$$F(x) = \int_0^x 6\,x\,(1 - x)\,dx$$

$$(x < 0 < 1)$$

$$= 3\,x^2 - 2\,x^3.$$

$$F(x) = 1 \quad x \geq 1$$

$\therefore$ X-ன் பரவல் சார்பு, பின்வருமாறு

$$F(x) = 0 \quad x \leq 0$$

$$= 3x^2 - 2x^3 \quad 0 < x < 1.$$

$$= 1 \quad x \geq 1.$$

எ.கா. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் பரவல் சார்பு பின்வருமாறு:

$$F(x) = \{ 1 - 1 + x)\,e^{-x} \quad x \geq 0$$

$$0 \quad x < 0$$

நிகழ்தகவுச் சார்பினைக் கண்டு, அதன்மூலம் $x < 1$ ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx}[1 - (1 + x)\,e^{-x}], \qquad x \geq$$

$$= e^{-x} - e^{-x} + x\,e^{-x}$$

$$= x\,e^{-x}$$

$x = 0$ ஆக இருக்கும்போது இது வரையறுக்கப்படவில்லை.

$$\therefore\ f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x\,e^{-x} & x > 0. \end{cases}$$

$$\therefore\ P(x \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx = \int_0^1 x\,e^{-x}$$

$$= \frac{x \cdot e^{-x}}{-1} + \int e^{-x}\, dn$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x}$$

$$-(1+x)\, e^{-x}$$

$$= 1 - 2\, e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}.$$

குறிப்பு $P(x \leq 1) = F(1) = 1 - (1+1)\ e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}$ எனவும் கண்டறியலாம்.

எ.கா. $F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$ என்றால் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைக் காண்க.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx.$$

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x).$$

$x < 1$, $F(x) = 0$ ஆதலால் $f(x) = 0$.

$x > 1$ எனும்போது

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx}\left[1 - \frac{1}{x}\right]$$

$$= \frac{1}{x^2}$$

$$\therefore\ f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x > 1 \end{cases}$$

$x = 1$ எனும்போது வரையறுக்கப்படவில்லை.

எ. கா. $f(x) = Kx^2 \qquad 0 \leq x \leq 2,$

$= 0$ மற்றெங்கிலும் எனும்போது

$P[x > a) = P[x < a]$ என அமையும்படியாக a-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \text{ (∵ } f(x) \text{ நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு)}$$

$$\therefore \int_{0}^{2} K x^2\, dx = 1$$

$$\frac{K x^3}{3} = \frac{8K}{3} = 1. \quad \therefore \quad K = \frac{3}{8}$$

$x = a$ ஆகும்போது, $F(x) = \cdot 5$ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

$$\therefore \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, d_x = \int_{0}^{x} \frac{3}{8} x^2\, d_x = \frac{x^3}{8}$$

$$F(a) = \frac{a^3}{8} = \frac{1}{2}$$

$$a^3 = 4$$

$$\therefore \quad a = \sqrt[3]{4}$$

எ.கா. பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலுக்கு,

$$dF = y_0\, e^{-|x|}\, dx, \qquad -\infty \leq x \leq \infty \,;$$

$y_0 = \frac{1}{2}$, $\mu_1' = 0$, $\sigma = \sqrt{2}$, சராசரியை ஒட்டிய சராசரி விலக்கம் $= 1$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

$$= y_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\, dx = 1 = 2\, y_0 \int_{0}^{\infty} e^{-|x|}\, dx = 1$$

($e^{-|x|}$ என்பது x-ன் ஒற்றைப்படைச்சார்பு)

$$= 2\, y_0 \int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx = 1 \quad [0 \le x \le \infty,\ |x| = x].$$

$$= 2\, y_0 \left| \frac{e^{-x}}{-1} \right|_0^{\infty} = 1$$

$$2\, y_0 = 1$$

$$y_0 = \frac{1}{2}$$

$\bar{x} = \mu_1'$ (ஆதியை ஒட்டி)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-|x|}\, dx = 0$$

[$\because$ $x\, e^{-|x|}$ என்பது x-ன் ஒற்றைப்படை சார்பு]

$$\mu_2' = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-|x|}\, dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \int_{0}^{\infty} x^2\, e^{-x}\, dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} x^2\, e^{-x}\, dx = \Gamma(3)$$

[காமா தொகையீடு மூலம்].

$$\mu_2' = 2!$$

$$\sigma^2 = \mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = 2$$

$$\therefore\ \sigma = \sqrt{2}$$

கூட்டுச்சராசரியைப்பற்றிய சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-|x|} dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_{0}^{\infty} |x| e^{-|x|} dx$$

$|x| e^{-|x|}$ λ-ன் இரட்டைப்படைச் சார்பு

$$\text{கூட்டுச்சராசரியைப்பற்றிய சராசரி விலக்கம்} = \int_{0}^{\infty} x e^{-x} dx$$

$$= \Gamma(2) = 1.$$

எ.கா. ஒரு பேருந்து நிலையத்தில் ஒருவர் காத்திருக்க வேண்டிய நேரம் பின்வரும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைக் கொண்டுள்ளது.

$$f(x) = 0, \quad x < 0$$

$$= \frac{1}{9}(x+1), \qquad 0 \le x < 1$$

$$= \frac{4}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right), \qquad 1 \le x < \frac{3}{2}$$

$$= \frac{4}{9}\left(\frac{5}{2} - x\right), \qquad \frac{3}{2} \le x < 2$$

$$= \frac{1}{9}(4 - x), \qquad 2 \le x < 3$$

$$= \frac{1}{9} \qquad 3 \le x < 6$$

$$= 0 \qquad 6 \le x.$$

எ.கா. A, B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகள் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகின்றன.

A : ஒருவர் 0 விலிருந்து 2 நிமிடங்கள்வரை காத்திருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி,

B : ஒருவர் 1 லிருந்து 3 நிமிடங்கள்வரை காத்திருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி,

(அ) $P(B/A) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ எனக்காட்டுக.

(ஆ) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{3}$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு

$$P(A) = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{9}(x+1)\,dx$$

$$+ \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{4}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right)dx + \int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{4}{9}\left(\frac{5}{2} - x\right)dx$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 + \frac{4}{9}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right]_1^{\frac{3}{2}}$$

$$+ \frac{4}{9}\left[\frac{5x}{2} - \frac{x^2}{2}\right]_{\frac{3}{2}}^{2}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

$$P(A \cap B) = \int_1^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{4}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right)dx + \int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{4}{9}\left(\frac{5}{2} - x\right)dx$$

$$= \frac{4}{9}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right)_{1}^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{9}\left(\frac{5}{2}x - \frac{x^2}{2}\right)_{\frac{3}{2}}^{2} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

(ஆ) $\bar{A} \cap \bar{B}$ என்பது காத்திருக்கும் நேரம் 3 நிமிடங்களுக்கு மேல் இருக்கும் நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கிறது.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(X > 3) = \int_3^\infty f(x)\,dx = \int_3^6 f(x)\,dx$$

$$+ \int_6^\infty f(x)\,dx$$

$$= \int_3^6 \frac{1}{9}\,dx = \frac{1}{9}\Big[x\Big]_3^6 = \frac{1}{3}$$

எ.கா. ஒரு குறிப்பிட்ட வகையைச் சேர்ந்த வானொலிக் குழலுக்கு, கீழ்க் காணும் அடர்த்தி சார்பு உள்ளது.

$$f(x) = \frac{100}{x^2}, \qquad x \geq 100$$

$$= 0 \text{ மற்றெங்கிலும்.}$$

ஒரு குறிப்பிட்ட வானொலிப் பெட்டியில், முதல் 150 மணி நேர இயக்கத்தில், இத்தகைய மூன்று குழல்களில் ஒன்றுகூட மாற்றியமைக்கப்படாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது? முதல் 150 மணி நேரத்தில், மூன்று குழல்களுமே மாற்றி அமைக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

குழலின் ஆயுட்காலம் x மணிகள் என இருக்கட்டும்.

$$P\{x \le 150\} = \int_{0}^{150} f(x)\,dx = 100 \times \int_{100}^{150} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}.$$

∴ கூட்டு நிகழ்தகவு தேற்றம் மூலம், முதல் 150 மணி நேர இயக்கத்தில், மூன்று குழல்களுமே மாற்றி அமைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

மேலும் $P(x > 150) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

∴ மூன்று குழல்களில் ஒன்றுகூட, முதல் 150 மணி நேர இயக்கத்தில் மாற்றியமைக்கப் படாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}.$$

எ.கா. x மாறியின் பரவற்சார்பு $F(x)$ எனக்கொண்டு, $F(x_1) = 0.5$, $F(x_2) = 0{\cdot}7$, $F(x_3) = 0{\cdot}8$ என இருக்கும்போது, அம்மாறி, [x_1-க்கும், x_2-க்கும்], [x_2-க்கும் x_3-க்கும்] இடையில் அமைந்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது ? X_1, X_2 என்ற இரு சார்பற்ற மாறிகள், $-\infty$-க்கும் x_1-க்கும் x_3-க்கும் ∞-க்கும், இடையில் அமைந்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது ? [x, $-\infty$-லிருந்து, $+\infty$ வரை மதிப்புகள் பெறுகிறது.]

$f(x)$ என்பதை அடர்த்தி சார்பாகக் கொள்வோம்.

எனவே

$$P\{x_1 \le x \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

$$= \int_{-\infty}^{x_2} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx$$

$$= F(x_2) - F(x_1)$$
$$= 0{\cdot}7 - 0{\cdot}5$$
$$= 0{\cdot}2.$$

$$P\ \{ x_2 \le x \le x_3 \} = \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x_3} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{x_2} f(x)\,dx.$$

$$= F(x_3) - F(x_2)$$
$$= 0{\cdot}8 - 0{\cdot}7$$
$$= 0{\cdot}1$$

$$P\{ -\infty < X_1 \le x_1 \} = F(x_1) = 0{\cdot}5$$

$$P\{ x_3 \le X_2 < \infty \} = 1 - F\{ -\infty < X_2 \le x_3 \}$$
$$= 1 - F(x_3) = 1 - 0{\cdot}8 = 0{\cdot}2{\cdot}$$

X_1, X_2 என்பவை சார்பற்ற மாறிகள் ஆதலின் குறிப்பிட்ட இடைவெளிகளில் அவை இரண்டும் இருப்பதற்குத் தேவையான நிகழ்தகவு

$$= (0{\cdot}5)\,(0{\cdot}2) = 0{\cdot}1$$

தொடர் அலைவுப் பரவல் (Continuous Frequency Distribution)

தொடர் நிகழ்வெண் பரவலில் பிரிவுகளின் நீளத்தை மிகச் சிறிதாக்கியும், அதே நேரத்தில் நிகழ்வெண்களின் எண்ணிக்கையை அதற்கேற்றவாறு அதிகரித்தும் வந்தால் இந்தப்பரவலுக்கு வரையப்படும் நிகழ்வெண் பலகோணம் ஒரு வளைவரையைப் போன்று தோன்றும். இந்த வளைவரைதான் நிகழ்வெண் பரவலுக்கு வரையப்படும் நிகழ்வெண் வரையாகும். எனவே நிகழ்வெண் பரவலின் நிகழ்வெண் வரையே பலகோணத்தின் எல்லை எனலாம்.

நிகழ்வுப் பலகோணத்திற்கு இடைப்பட்ட பரப்பு பரவலின் மொத்த நிகழ்வெண்ணிற்குச் சமம். நிகழ்வெண் வரை பலகோணத்தின் எல்லை எனக் கொள்வதால் இதற்கு இடைப்பட்ட

பரப்பும் மொத்த நிகழ்வெண்ணிற்குச் சமம் ஆகும். இந்த தொடர் நிகழ்வெண் வரையின் சமன்பாட்டைக் குறிப்பிட்ட அச்சுகளைப் பொறுத்து $y = f(x)$ எனக் கொண்டால் தொகை நுண்கணிதத் தின்படி இந்த வளைவரை, x அச்சு, $x = c$, $x = d$ இவைகளுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பு,

$$= \int_c^d f(x)\, dx \text{ ஆகும்.}$$

செவ்வகப்படம் தொடர் நிகழ்வெண் பரவலை அணுகுவதால், தனித்தனி மாறியின் நிகழ்வெண் பரவலில் Σ குறியிட்ட இடங் களில் எல்லாம், தொடர் அலைவுப்பரவலில் $\int$ குறியிட வேண்டும். நிகழ்வெண் வரை $x = a$, $x = b$ என்ற வரம்புகளுக்கு உட்பட்டு இருந்தால்,

$$N = \int_a^b f(x)\, dx \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு N மொத்த நிகழ்வெண். இவ்வாறின்றி நிகழ்வெண் வரை $-\infty$ க்கும் $+\infty$ க்கும் இடையே விரிந்து அமைந்தால்,

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \text{ என்பதாகும்.}$$

நிகழ்தகவுச் சார்பு

நிகழ்வெண் வரை, x அச்சு, $x = c$, $x = d$ இவைகளுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பு $\int_c^d f(x)\, dx$. இந்தப் பரப்பு $c \leq x \leq d$ என்ற இடைவெளியிலுள்ள நிகழ்வெண்களின் மொத்த மதிப்பு ஆகும்.

எனவே x, (c, d) என்ற இடைவெளியில் அமைவதற்கான

$$\text{நிகழ்தகவு} = \int_c^d \frac{f(x)\, dx}{N} \text{ ஆகும்.}$$

$p(x) = \frac{f(x)}{N}$ என வரையறுத்தால், $\int_{c}^{d} p(x)\, d(\ )$

என்பது x, (c, d) என்ற பிரிவில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு ஆகும்.

$$\text{மொத்த நிகழ்தகவு} = \frac{\int_{a}^{d} f(x)\, dx}{N}$$

$$= \frac{1}{N} \int_{a}^{b} f(x)\, dx = \frac{N}{N} = 1$$

அதாவது $\int_{a}^{b} p(x)\ x = 1$ எனவே $p(x)$ நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகிறது.

$$\bar{x} = \frac{\int_{a}^{b} x f(x)\, dx}{\int_{a}^{b} f(x)\, dx} = \frac{1}{N} \int_{a}^{b} x.f(x)\, dx$$

$$= \int_{a}^{b} x\, p(x)\, dx.$$

$$\mu_1 = \frac{\int_{a}^{b} (x-\bar{x}) f(x)\, dx}{\int_{a}^{b} f(x)\, d\bar{x}} = \frac{1}{N} \int_{a}^{b} (x-\bar{x}) f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{N} \int_a^b x\, f(x)\, dx - \frac{\bar{x}}{N} \int_a^b f(x)\, dx.$$

$$= \bar{x} - \frac{\bar{x} \cdot N}{N} = \bar{x} - \bar{x} = 0\cdot$$

எனவே கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட தனி அம்சங்களின் விலக்கக் கூடுதல் பூஜ்யமாகும்.

S^2, (மூலப்புள்ளி பூஜ்யத்தோடு இணைந்தது)

$$= \frac{\int_a^b x^2 f(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx} = \frac{1}{N} \int_a^b x^2 f(x)\, dx$$

$$= \int_a^b x^2\, p(x)\, dx$$

$$\sigma^2 = \frac{\int_a^b (x - \bar{x})^2 f(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx}$$

$$= \frac{1}{N} \int_a^b [(x - A) + (A - \bar{x})]^2 f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{N} \int_a^b (x - A)^2 f(x)\, dx + \frac{2}{N} \int_a^b (x - A)(A - \bar{x}) f(x)\, dx$$

$$+ \frac{1}{N} \int_a^b (A - \bar{x})^2 f(x)\, d$$

$$= \frac{1}{N}\int_a^b (x-A)^2 f(x)\,dx +$$

$$\frac{2(A-\bar{x})}{N}\int_a^b (x-A) f(x)\,dx + (A-\bar{x})^2 \int_a^b \frac{f(x)\,dx}{N}$$

$$= S^2 + \frac{2(A-\bar{x})}{N}\int x f(x)\,dx -$$

$$\frac{2A(A-\bar{x})}{N}\int_a^b f(x)\,dx + (A-\bar{x})^2$$

$$= S^2 + \frac{2(A-\bar{x})\quad N\cdot x}{N} - \frac{2(A-\bar{x})}{N}\cdot A\cdot N$$
$$+ (A-\bar{x})^2$$

$$= S^2 + 2(A-\bar{x})(\bar{x}-A) + (A-\bar{x})^2$$

$$= S^2 - 2(A-\bar{x})^2 + (A-\bar{x})^2$$

$$= S^2 - (A-\bar{x})^2$$

$A = 0$ ஆனால் $\sigma^2 = \int x^2 p(x)\,dx - \bar{x}^2$

கூட்டுச் சராசரியோடு இணைந்த k-ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை.

$$\mu_k = \frac{\int_a^b (x-\bar{x})^k f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$= \frac{\int_a^b (x-\bar{x})^k f(x)\,dx}{N}$$

$$= \int_a^b (x - \bar{x})^k \, p(t) \, dx$$

இடைநிலை

$f(x)$ என்பது நிகழ்வெண் சார்பாயின் $\int_a^x f(t)\, dt = \frac{N}{2}$ என்ற சமன்பாட்டில் x-ன் மதிப்பு இடைநிலையைத் தருகிறது. ($\because$ இடைநிலை நிகழ்வெண் வரையின் பரப்பை இரு சமபாகங்களாகப் பிரிக்கிறது)

x மாறியின் பரவற் சார்பு $F(x)$ எனில்,

$F(x) = \int_a^b p(t)\, dt$ என நாம் அறிவோம்.

x மாறி வரையறுக்கப்பட்டுள்ள இடைவெளி (a, b) ஆனால் $\int_a^x p(t)\, dt = \int_a^b p(t)\, dt = \frac{1}{2}$ என்ற சமன்பாட்டில் x-ன் மதிப்பே இடைநிலையாகும்.

x-மாறி வரையறுக்கப்பட்டுள்ள இடைவெளி $(-\infty, \infty)$ எனின் $\int_{-\infty}^x p(t)\, dt = \int_x^\infty p(t)\, dt = \frac{1}{2}$

பொதுவாக,

$F(x) = \int_{-\infty}^x P(t)\, dt = \frac{1}{2}$ இடை நிலையைத் தருகிறது.

இதுபோன்றே நிகழ்வெண் சார்பு $f(x)$ ஆயின்,

$$\int_{-\infty}^{Q_1} f(t)\, dt = \frac{N}{4}.$$

$$\int_{-\infty}^{Q_3} f(t)\, dt = \frac{3N}{4}$$, என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து Q_1, Q_3 கிடைக்கின்றன.

$$\int_{-\infty}^{Q_1} \frac{f(t)\, dt}{N} = \int_{-\infty}^{Q_1} P(t)\, dt = \frac{1}{4}$$

$$= \int_{-\infty}^{Q_3} \frac{f(t)\, dt}{N} = \int_{-\infty}^{Q_3} p(t)\, dt = \frac{3}{4}$$

∴ பரவற் சார்பு $F(x)$ ஆயின் $F(x) = \frac{1}{4}$, $F(x) = \frac{3}{4}$ என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து Q_1, Q_3-ஐ பெறுகிறோம்.

நூற்றுமானங்கள் பத்துமானங்கள்

ஒரு மாறியின் k-ஆவது நூற்றுமானம்

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \frac{KN}{100}$$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்தும், r-ஆவது

பத்துமானம், $\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt) = \frac{r\,N}{10}$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்தும் கிடைக்கின்றன.

பரவற் சார்பு $F(x)$ ஆயின்,

$F(x) = \frac{k}{100} = \cdot 0\, K$, $F(x) = \frac{r}{10} = \cdot r$ என்ற சமன்பாடுகளில் x-ன் மதிப்புகள் முறையே k-ஆவது நூற்றுமானத்தையும், r-ஆவது பத்துமானத்தையும் தருகின்றன.

சராசரி விலக்கம்.

$$= \frac{\int_a^b |x - \bar{x}|\, f(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx} = \frac{1}{N}\int_a^b |x - \bar{x}|\, f(x)\, dx.$$

$$= \int_a^b |x - \bar{x}|\, p(x)\, dx.$$

முகடு

முகட்டு புள்ளியில் $y = f(x)$ என்ற நிகழ்வெண் வரை மீப்பெரு மதிப்பைப் பெறுகிறது. எனவே $f'(x) = 0$ என்ற சமன்பாடு முகடைத் தருகிறது.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)\, dt}{N}.$$

எனவே முகட்டுப் புள்ளியில்

$$F'(x) = p(x) = \frac{1}{N} f(x),$$

$$F''(x) = \frac{1}{N} f'(x) = 0$$

ஆனால் $F''(x) = 0$ என்பது $y = F(x)$ என்ற வரையின் திருகுப் புள்ளியாகும். எனவே ஒகைவின் திருகுப் புள்ளியின் x ஆயத்தூரமே நிகழ்வெண் வரையின் முகடாகும்.

தேற்றம்

இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடப்படும் சராசரி விலக்கம் மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறும் என நிறுவுக.

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் நிகழ்தகவு சார்பு $f(x)$ என இருந்தால், $(a \leq X \leq b_1)$, $x = k$ என்ற புள்ளியைப் பற்றிய சராசரி விலக்கம் $M(k)$, என இருக்கட்டும்.

$$M(k) = \int_a^b |x - k| f(x)\, dx$$

$$= \int_a^k |x - k| f(x)\, dx + \int_k^b |x - k| f(x)\, dx \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$= \int_a^k (k - x) f(x)\, dx + \int_k^b (x - k) f(x)\, dx$$

$M(k)$ மீச்சிறு மதிப்பாய் இருக்க, A-யின் மதிப்பைக் காண வேண்டும், வகை கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி

$$\frac{\partial M(k)}{\partial k} = 0, \quad \frac{\partial^2 M(k)}{\partial k^2} > 0 \qquad \ldots\ldots (2)$$

தொகைக் குறியின் அடியில், k-யைக் பொறுத்து (1)-ஐ வகைப்படுத்தினால்,

$(k - x) f(x)$, $(x - k) f(x)$ என்ற சார்புகள் $x = k$ என்ற புள்ளியில்

$$\frac{\partial M(k)}{\partial k} = \int_a^k f(x)\, dx - \int_k^b f(x)\, dx \qquad \ldots\ldots (3)$$

$$\frac{\partial M(k)}{\partial k} = \int_a^k f(x)\, dx - \left[1 - \int_a^k f(x)\, dx\right]$$

$$\left[\because \int_a^b f(x)\, dx = 1\right]$$

$$= 2\int_a^k f(x)\, dx - 1$$

$$= 2F(k) - 1$$

$F(k)$ என்பது பரவற் சார்பு. மீண்டும் k-யைப் பொறுத்து வகைப்படுத்தினால்,

$$\frac{\partial^2}{\partial k^2} M(k) = 2f(k) \qquad \ldots\ldots \quad (4)$$

(3)-ஐப் பயன்படுத்தி,

$$\frac{\partial M(k)}{\partial k} = 0$$

$$\int_a^k f(x)\, dx = \int_k^b f(x)\, dx,$$

k இடைநிலை மதிப்பாகும்.

மேலும் (4)-லிருந்து,

$$\frac{\partial^2 M(k)}{\partial k^2} > 0$$

$f(x)$ இடைநிலை மதிப்பில் பூஜ்ய மதிப்பைப் பெறுவதில்லை என எடுத்துக் கொண்டு, மேற் கண்ட மதிப்பைப் பெறுகிறோம். எனவே இடைநிலையிலிருந்து பெறப்படும் சராசரி விலக்கம் மீச்சிறு மதிப்பை உடையது.

கணக்கு

$0 \leq x \leq \infty$ என்ற இடைவெளியில், $2mxe^{-mx^2}$ என்ற நிகழ்தகவுப் பரவலின் கால்மான விலக்கத்தைக் காண்க.

[சென்னை 1967]

தீர்வு

Q_1, Q_3 முறையே பரவலின் முதல், மூன்றும் கால்மானங்கள் ஆயின்,

$$\int_0^{Q_1} f(x)\, dx = \frac{1}{4} = \int_0^{Q_1} 2\, x \cdot e^{-mx^2}\, dx = \frac{1}{4}$$

$y = mx^2$ என்க. $\therefore \quad dy = 2mx\, dx$

$$\int_0^{mQ_1^2} e^{-y}\, dy = \frac{1}{4}$$

$$\left[\frac{e^{-y}}{-1}\right]_0^{mQ_1^2} = \frac{1}{4}$$

$$1 - e^{\gamma Q_1^2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad e^{-mQ_1^2} = \frac{3}{4}$$

$$-mQ_1^2 = \log\frac{3}{4} = -\log\frac{4}{3}$$

$$Q_1 = m \cdot \sqrt{\log\left(\frac{4}{3}\right)}$$

இதுபோன்றே

$$\int_0^{Q_3} 2mx\, e^{mx^2}\, dx = \frac{3}{4}$$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$1 - e^{-mQ_3^2} = \frac{3}{4}$$ என வருகிறது.

$$\therefore \quad e^{-mQ_3^2} = \frac{1}{4}$$

$$Q_3 = m\sqrt{\log 4}$$

$$\therefore \quad \text{கால்மான விலக்கம்} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{m}{2}\left[\sqrt{\log 4} - \sqrt{\log\frac{4}{3}}\right]$$

எ. கா. x-என்னும் ஒரு மாறியின் நிகழ்தகவுச் சார்பு $f(x) = \frac{3}{8}(x-2)^2, 0 \leq x \leq 2$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

β_1, β_2-ன் மதிப்புகளைக் காண்க. (அ'ப. 1970)

$$\bar{x} = \int x \cdot p(x)\, dx$$ [நிகழ்தகவுச் சார்பு தரப்பட்டுள்ளது.]

$$\bar{x} = \frac{3}{8}\int_0^2 x(x-2)^2\,dx = \frac{3}{8}\int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 4x)\,dx,$$

$$= \frac{3}{8}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{4\cdot x^3}{3} + \frac{4\cdot x^2}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{3}{8}\left[4 + 8 - \frac{32}{3}\right] = \frac{3}{8}\times\frac{4}{3} = \frac{1}{2}.$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2}.$$

$$\mu_k = \int_0^2 (x - \bar{x})^k\, p(x)\,dx.$$

$$\mu_2 = \frac{1}{1}\int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{3}{8}(x-2)^2\,dx.$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (x-2)^2\,dx.$$

$$= \frac{3}{8}\left[\frac{x^5}{5} - \frac{5x^4}{4} + \frac{33}{4}\cdot\frac{x^3}{3} - 5\cdot\frac{x^2}{2} + x\right]_0^2$$

$$= \frac{3}{4}\times\frac{2}{5} = \frac{3}{20}.$$

$$\mu_2 = \frac{3}{20} = \cdot 15$$

$$\mu_3 = \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 (x-2)^2\,d\bar{x}.$$

$$= \int_0^2 \left(x^5 - \frac{11}{2} \cdot x^4 + \frac{43}{4} x^3 - \frac{73}{8} x^2 + \frac{7}{2} x - \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^6}{6} - \frac{11}{2} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{43}{4} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{73}{8} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{7}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} x. \right]_0^2$$

$$= \frac{64}{6} - \frac{176}{5} - \frac{73}{3} + 49.$$

$$= \frac{320 + 1470 - 1056 - 730}{30.} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}.$$

$$\mu_3 = \frac{2}{15}.$$

$$\mu_4 = \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)^4 (x-2)^2 \, dx.$$

$$= \int_0^2 \left(x^6 - 6x^5 + \frac{27}{2} x^4 - \frac{29}{2} \cdot x^3 + \frac{129}{16} x^2 - \frac{9}{4} x + \frac{1}{4}\right) dx.$$

$$= \left[\frac{x^7}{7} - x^6 + \frac{27}{10} x^5 - \frac{29}{8} x^4 + \frac{129}{48} x^3 - \frac{9}{8} x^2 + \frac{1}{4} x\right]_0^2$$

$$= \frac{128}{7} - 64 + \frac{27}{10} \times 32 - \frac{29}{} \times 16 + \frac{129}{48} \times 8 - \frac{9}{2} \times 4 + \frac{1}{4} \times 2$$

$$= 18{\cdot}23 - 64 + 86{\cdot}4 + 58 + 21{\cdot}5 - 4.5 + {\cdot}5$$

$$= {\cdot}18$$

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{\left(\frac{2}{15}\right)^2}{\left(\frac{3}{20}\right)^3} = 5{\cdot}267$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\cdot 18}{\left(\frac{3}{20}\right)^2} = \frac{\cdot 18 \times 20 \times 20}{3 \times 3} = 8$$

குறிப்பு μ_1', μ_2', μ_3', μ_4' இவற்றைக்கண்டபின், μ_2, μ_3, μ_4 இவற்றைச் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தியும் கணக்கிடலாம்.

எ.கா. ஒரு தொடர்மாறிப் பரவலில், நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$f(x) = \frac{3}{4} x\,(2-x) \quad (0 < x < 2).$$

(i) பரவல் $x = 1$-ஐக் கூட்டுச்சராசரியாகவும், பரவற்படி $\frac{1}{5}$ ஆகவும் கொண்டு சமச்சீருடைய பரவல் எனக்காட்டுக.

(ii) $x=0$ ஐப்பற்றிய மூன்றும் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை $= \frac{1}{5}$ என நிறுவுக.

$$\bar{x} = \mu_1' \text{ (ஆதியை ஒட்டி)} = \frac{3}{4} \int_0^2 x^2 (2 - x)\, dx = 1$$

$$\mu_2' \text{ (ஆதியை ஒட்டி)} = \frac{3}{4} \int_0^2 x^3 (2 - x)\, dx = \frac{6}{5}$$

$$\mu_3' \text{ (ஆதியை ஒட்டி)} = \frac{3}{4} \int_0^2 x^4 (2 - x)\, dx = \frac{8}{5}$$

$$\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\,(\mu_2')\,(\mu_1') + 2\,(\mu_1')^3$$

$$= \frac{8}{5} - \frac{18}{5} + 2 = 0.$$

எனவே பரவல் சமச்சீருடையது.

எ·கா. 'a' அலகுகள் நீளமுள்ள ஒரு நேர்க்கோடு இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. இரு பகுதிகளும் உண்டாக்கும் செவ்வகத்தின் சராசரி மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

'a' அலகுகள் நீளமுள்ள நேர்க்கோட்டில் ஒருபகுதி x, ஆனுல் மற்றொருபகுதி $a-x$ ஆகும். இருபகுதிகளும் ஏற்படுத்தும் செவ்வகம் $x(a-x)$. x-ன் மதிப்புகளும் $(0, a)$-க்கு இடையில் இருக்கலாம்.

$$\therefore \text{சராசரி} = \frac{\int_0^a x(a-x)\,dx}{\int_0^a dx}$$

$$= \frac{\left[\frac{a x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a}{\left[x\right]_0^a} = \frac{a^2}{6}$$

எ.கா. $(-3, 3)$ என்ற இடைவெளியில், ஒரு நிகழ்வெண் சார்பு,

$$f(x) = \frac{1}{16}(3+x)^2 \qquad -3 \le x \le -1$$

$$= \frac{1}{16}(6-2x^2) \qquad -1 \le x \le 1$$

$$= \frac{1}{6}(3-x)^2 \qquad 1 \le x \le 3$$

என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. அப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரியையும், திட்டவிலக்கத்தையும் காண்க.

[ஆக்ரா M.Sc. 1948, B.Sc. 1959]

$$\text{மொத்த நிகழ்வெண்} = \int_{-3}^{3} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{16}\int_{-3}^{-1} (3 + x)^2\, d$$

$$+ \frac{1}{16}\int_{-1}^{1}(6 - 2x^2)dx + \frac{1}{16}\int_{1}^{3} (3 - x)^2\, dx.$$

$$= \frac{1}{8}\int_{1}^{3} (3 - x)^2\, dx + \frac{1}{8}\int_{0}^{1} (6 - 2x^2)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[-\frac{(3 - x)^3}{3} \right]_1^3 + \frac{1}{8}\left(6 - \frac{2}{3}\right)$$

$$= 1$$

$$\bar{x} = \int_{-3}^{3} x f(x)\, dx = \int_{-3}^{-1} x(3 + x)^2\, dx$$

$$+ \frac{1}{16}\int_{-1}^{1} x(6 - 2x^2)\, dx + \frac{1}{16}\int_{1}^{1} x(3 - x)^2\, dx$$

முதல் தொகைக்கு x-ஐ, $-x$ ஆக மாற்றினால்,

$$\bar{x} = \frac{-1}{16}\int_{1}^{3} x(3 - x)^2\, dx + \frac{1}{16}\int_{-1}^{1} x(6-2x^2)\, dx$$

$$+ \frac{1}{16}\int_{1}^{3} x(3 - x)^2\, dx$$

$$= \frac{1}{16}\int_{-1}^{1} x(6 - 2x^2)\, dx = 0.$$

$$\therefore \quad \mu_2 = \int_{-3}^{3} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{16}\int_{-3}^{-1} x^2 (3+x)^2\,dx$$

$$+\frac{1}{16}\int_{-1}^{1} x^2 (6-2x^2)\,dx + \frac{1}{16}\int_{1}^{3} x^2 (3-x)^2\,dx.$$

முதல் தொகைக்கு x-ஐ $-x$ ஆக மாற்றினால்,

$$\mu_2 = \frac{1}{8}\int_{1}^{3} x^2 (3-x)^2\,dx + \frac{1}{8}\int_{0}^{1} x^2 (6-2x^2)\,dx.$$

$$= \frac{1}{8}\int_{1}^{3} x^2 (x^2-6x+9)\,dx$$

$$+\frac{1}{8}\int_{0}^{1} (6x^2-2x^4)\,dx.$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}x^4 + 3x^3\right]_1^3$$

$$+\frac{1}{8}\left[2x^3 - \frac{2}{5}x^5\right]_0^1$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$$

$\therefore$ **திட்ட விலக்கம்** $= 1$

எ.கா. $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$, எனின்

(i) $F(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[x - \dfrac{x^3}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{2!}\,\dfrac{x^5}{2^2\cdot 5} + \cdots\right],$

(x-ன் மதிப்பு சிறியது)

(ii) $F(x) = 1 - \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$
$\left[1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} + \cdots\right]$, x பெரியது எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

$$\text{(i)} \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$ (x சிறியதாக இருக்கும்போது)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

$$+ \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{0}^{x} \left\{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\frac{x^6}{2^3} + \cdots\right\} dx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[x - \frac{x^3}{2\cdot 3}\frac{1}{2!} + \frac{x^5}{2^2\cdot 5} - \frac{1}{3!}\frac{x^7}{2^3\cdot 7} + \cdots\right]$$

$$\text{(ii)} \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \frac{x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}}{x}\, dx$$

$x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ஐ ஒரு காரணியாகக் கொண்டு, பகுதிவாரியாகத் தொகை காணும்போது,

$$F(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\left(\frac{1}{x} \left\{ -e^{-\frac{1}{2}x^2} \right) \right\}_x^{\infty} - \int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{x^2}\, dx \right]$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{2}x^2} - \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{2}x^2} + \int_0^{\infty} \frac{3 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^1}}{x}\, dx \right\}$$

$$= 1 - \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{x\sqrt{2\pi}} \left[1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} + \cdots\cdots\cdots \right]$$

(x பெரியதாக இருக்கும்போது.)

எ.கா. $dF = 6(2-x)(x-1)\, dx,\ 1 \leq x \leq 2$ என்ற பரவலின் பெருக்கு சராசரி G ஆனால் $6 \log (16\, G) = 19$ எனக் காட்டுக.

$$\log G = 6 \int_1^2 \log x\, (2-x)(x-1)\, dx.$$

$$= 6 \int_0^1 y(-y+1) \log (1+y)\, dy \ [\text{இங்கு } y = x-1]$$

$$= 6\left[\left|\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\log(y+1)\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{y+1}\left\{\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right\}dy\right]$$

$$= \log 2 - 3\int_0^1 \left\{y-1+\frac{1}{y+1}\right\}dy + 2\int_0^1\left(y^2-y+1-\frac{1}{y+1}\right)dy$$

$$= \log 2 - 3\left\{\frac{y^2}{2}-y\right\}_0^1 + 2\left\{\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}+y\right\}_0^1 - 5\,|\log(y+1)|_0^1$$

$$= \frac{19}{6} - 4\log 2 = \frac{19}{6} - \log(2^4)$$

$$\therefore\ \log G + \log 2^4 = \frac{19}{6}$$

$$6\log(16\,G) = 19$$

எ.கா. $(0, \infty)$ என்ற இடைவெளியில் வரையறுக்கப் பட்டுள்ள x மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $\frac{x^n e^{-x}}{n!}$ எனில், அதன் இசைச்சராசரி n என நிறுவுக. (n நேர்க்குறி உடையது)

தீர்வு :

$$\frac{1}{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^{\infty} \frac{1}{x}\cdot x^n e^{-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{n!} \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx$$

$$= \frac{1}{n!} \Gamma(n) = \frac{1}{n} \left[\because \quad \Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n) \right.$$

$$= (n-1)(n-2) \ldots \Gamma(1)$$

$$\left. = (n-1)! \right]$$

$\therefore \quad H = n$

எ.கா. (0, 2) என்ற இடைவெளியில், ஒரு மாறியின் பரவல்

$$f(x) = x^3 \qquad 0 < x \leq 1$$

$$= (2-x)^3 \qquad 1 < x \leq 2.$$

என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. இப்பரவலுக்கு கூட்டு சராசரி, திட்டவிலக்கம், கூட்டுசராசரி பற்றி சராசரி விலக்கம் இவற்றைக் காண்க. [D.U. B.Sc., 1970]

மொத்த நிகழ்வெண் $= \int_0^2 f(x)\, dx$

$$= \int_0^1 x^3\, dx + \int_1^2 (2-x)^3\, dx$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \mu_1'(0) = 2 \int_0^2 x\, f(x)\, dx.$$

$$= 2 \int_0^1 x^4\, dx + 2 \int_1^2 x(2-x)^3\, dx$$

$$= \frac{2}{5} + 2\left\{\left[-\frac{(2-x)^4}{4}\cdot x\right]_1^2 + \frac{1}{4}\int_1^2 (2-x)^4\,dx\right\}$$

$$= \frac{2}{5} + 2\left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{20}\right\}$$

$$= 1$$

$$'(0) = 2\int_0^2 x^2 f(x)\,dx = 2\int_0^1 x^5\,dx + 2\int_1^2 x^2(2-x)^3\,dx$$

$$= \frac{1}{3} + 2\left\{\left[-\frac{(2-x)^4}{4}\cdot x^2\right]_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 x(2-x)^4\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \left\{\left[-\frac{(+2-x)^5}{5}\cdot x\right]_1^2 + \frac{1}{5}\int_1^2 (2-x)^5\,dx\right\}$$

$$= \frac{5}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{30} = \frac{16}{15}$$

$$\mu_2 = \frac{16}{15} - 1 = \frac{1}{15}.$$

$\therefore$ திட்ட விலக்கம் $= \dfrac{1}{\sqrt{15}}$

சுட்டுசராசரி பற்றிய சராசரி விலக்கம் $\Big\}$ $= \int_0^2 |x-1| \, f(x)\, dx.$

$$= 2\int_0^1 (1-x)\, x^3\, dx + 2\int_1^2 (x-1)(2-x)^3\, dx.$$

$$= \frac{1}{10} + 2\left\{\left[-\frac{(2-x)^4}{4}(x-1)\right]_1^2 + \frac{1}{4}\int_1^2 (2-x)^4\, dx\right\}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}.$$

எ.கா. $f(x) = \frac{1}{2a}\, dx, -a \leq x \leq +a$, என்ற பரவலுக்கு, ஆதியை மூலமாகக் கொண்ட முதல் மூன்று விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் கணக்கிட்டு, கோட்டளவையைக் காண்க.

[செ.ப 1973]

$$\int f(x)\, dx = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} dx = \frac{1}{2a}(a+a) = 1$$

எனவே $f(x)\, dx = \frac{1}{2a}\, dx$ என்பது ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகும்.

$$\mu_1' \text{ (ஆதியை ஒட்டி)} = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} x\, dx$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\frac{x^2}{2}\right)_{-a}^{a}$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right] = 0$$

$$\mu_2' = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} x^2\, dx = \frac{1}{2a} \left(\frac{x^3}{3}\right)_{-a}^{a}$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3}\right] = \frac{2a^3}{6a}$$

$$= \frac{a^2}{3}.$$

$$\mu_3' = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} x^3\, dx = \frac{1}{2a}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-a}^{a} = 0$$

கோட்டளவை $= \beta_1 = \dfrac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$

$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2' d^2 + 2d^3 = 0 \quad [\because \ \mu_3' = 0 = d]$

எனவே $\beta_1 = 0 \qquad \therefore$ பரவல் சமச்சீருடையது.

எ. கா. ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

என இருந்தால் கூட்டு சராசரி, முகடு, இடைநிலை, முதல் மூன்றும் கால்மானங்கள், பரவல் சார்பு இவற்றைக் காண்க.

பரவல் சார்பு $F(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{dx}{1+x^2} =$

$$\frac{1}{\pi}\left\{\tan^{-1} x + \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \tan^{-1} x + \frac{1}{2}.$$

இடைநிலைக்கு,

$$F(x) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad x = 0$$

முதல் கால்மானத்திற்கு,

$$F(x) = \frac{1}{4}$$

$$\text{அல்லது } \frac{1}{\pi} \tan^{-1} x + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\tan^{-1} x = \frac{-\pi}{4}$$

$$\therefore \quad x = -1$$

மூன்றாவது கால்மானத்திற்கு, $F(x) = \frac{3}{4}$

$$\therefore \quad x = 1.$$

$$\text{கூட்டுச் சராசரி} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1 + x^2}\, dx = 0$$

முகட்டு மதிப்பு x-க்கு, $f'(x) = 0$

$$\therefore \quad \frac{1}{\pi} \frac{-2x}{(1 + x^2)^2} = 0$$

$$\therefore \quad \text{முகடு} = 0.$$

$\therefore$ கூட்டுச் சராசரி = முகடு = இடைநிலை = 0.

$$Q_1 = 1 \quad Q_3 = -1$$

$\therefore$ பரவல் சமச் சீருடையது.

எ. கஎ. ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x) = \frac{1}{(1 + x)^2}$ $(0 \leq x \leq \infty)$ எனத் தரப்பட்டு உள்ளது. இதன் பரவற் சார்பைக் காண்க. இதிலிருந்து (i) $P(x > 2)$ (ii) பரவலின் இடைநிலையையும், கால்மானங்களையும் கணக்கிடுக.

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{(1 + x)^2}\, dx = \left[-\frac{1}{1 + x} \right]_0^x$$

$$= 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \qquad x \geq 0.$$

$F(x) = 0, x < 0.$

(i) $\therefore \quad P(x > 2) = 1 - P(x \leq 2)$

$$= 1 - F(2)$$

$$= 1 - \frac{2}{1+2}$$

$$= \frac{1}{3}$$

(ii) இடை நிலை மதிப்பிற்கு, $F(x) = \frac{1}{2}$

அல்லது $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{2}$

$$\therefore \quad x = 1$$

முதல் கால்மான மதிப்பு x-க்கு, $F(x) = \frac{1}{4}$

$$\frac{x}{1+x} = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{3}.$$

மூன்றும் கால்மான மதிப்பு x-க்கு, $F(x) = \frac{3}{4}$

$$\frac{x}{1+x} = \frac{3}{4}$$

$$x = 3.$$

கூட்டுச்சராசரி $= \int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^2}\, dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+x}\, dx$

$$- \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^2}$$

$$= \Big[\log(1+x)\Big]_0^{\infty} - 1$$

$x \to \infty$ எனும் போது, $\log(1+x) \to \infty$ எனவே, கூட்டு சராசரியை வரையறுக்க இயலாது. எனவே பரவற்படியையும் வரையறுக்க இயலாது.

எ. கா. ஒரு பரவற் சார்பு பின் வருமாறு வரையறுக்கப் படுகிறது.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ \dfrac{1}{16}(x-1)^4 & 1 \le x \le 3 \\ 1 & x > 3. \end{cases}$$

அடர்த்தி சார்பு $f'(x)$-ஐ காண்க. x-ன் கூட்டுசராசரியையும் இடை நிலையையும் காண்க.

அடர்த்தி சார்பு,

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{4}(x-1)^3, \quad 1 \le x \le 3$$

$$= 0 \qquad \text{மற்றெங்கிலும்}$$

$$\therefore \text{ சராசரி} = \frac{1}{4}\int_1^3 x(x-1)^3\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left[\frac{(x-1)^4}{4}x\right]_1^3 - \frac{1}{4}\int_1^3 (x-1)^4\,dx\right\}$$

$$= 3 - \frac{1}{80}\Big[(x-1)^5\Big]_1^3$$

$$= 3 - \frac{2}{5}$$

$$= 2{\cdot}6$$

இடைநிலை, $F(x) = \frac{1}{2}$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைக்கிறது.

$$\therefore \quad F(x) = \frac{1}{16}(x-1)^4 = \frac{1}{2}$$

$$x = 1 + (8)^{\frac{1}{4}}$$

எ. கா. கீழ்க்கண்ட சார்பு ஒரு அடர்த்தி சார்பானால், m-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le -1 \\ m(x+1) & -1 < x \le 3 \\ 4m & 3 < x \le 4 \\ 0 & x > 4 \end{cases}$$

சராசரி விலக்கம் மீச்சிறு மதிப்பைப்பெறும்போது, x-ன்மதிப்பு யாது? [I. A. S. 1962]

$f(x)$ நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாதலால்,

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = 1$$

$$= \int_{-1}^{3} m(x+1)\,dx + \int_{3}^{4} 4m\,dx = 1$$

$$m\left[\frac{(x+1)^2}{2}\right]_{-1}^{3} + 4m\left[x\right]_{3}^{4} = 1$$

$$8m + 4m = 1$$

$$m = \frac{1}{12}$$

இடை நிலையைப் பொறுத்து, சராசரி விலக்கம் மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறுவதால், இடை நிலையைக் காணுதல் வேண்டும். இடைநிலை 'a' என இருக்கட்டும்.

$$\text{எனவே} \int_{-1}^{a} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

$$= m \int_{-1}^{3} (x+1)\, dx + 4n \int_{3}^{a} dx = \frac{1}{2}$$

$$8m + 4m(a-3) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}(a-3) = \frac{1}{2} - 8m = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$$

$\therefore$ $a \not> 3$ அதாவது, $a < 3$

$$\therefore\ m \int_{-1}^{a} f(x+1)\, dx = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{1}{12} \times \frac{(a+1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ $(a+1)^2 = 12$ $\therefore$ $a = 2\sqrt{3} - 1$

எ.கா. ஒரு பெண் மணி தொலைபேசியில் பேசும் நேரம் (நிமிடங்களில்) $f(x) = A e^{-\frac{x}{5}}$ $x \geq 0$

$= 0$ மற்றெங்கிலும். என்ற நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பைக் கொண்ட பரவலைத் தழுவுகிறது.

(அ) $f(x)$ ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பாக இருப்பதற்கு A-யின் மதிப்பு என்ன?

(ஆ) (i) 10 நிமிடங்களுக்கு மேலாக. (ii) 5 நிமிடங்களுக்குக் குறைவாக (iii) 5-லிருந்து 10 நிமிடங்களுக்குள்ளாக அப்பெண் மணி தொலைபேசியில் பேசுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(இ) b என்ற ஏதேனும் ஒரு மெய் எண்ணுக்கு $A(b)$ என்பது, பேச்சு மேலும் b நிமிடங்கள் நீடிப்பதற்கான நிகழ் தகவைத் தருகிறது. $P[A(b)]$-ஐக் காண்க.

$a > 0$, $b > 0$ ஆக இருக்கும்போது $P[A(a+b)/A(a)] = P[A(b)]$ எனக் காட்டுக

(அ) $f(x)$ என்பது ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

ஆனால், $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$

$$= \int_0^{\infty} A\, e^{\frac{-x}{5}}\, dx = 1$$

$$= A\left[\frac{e^{\frac{-x}{5}}}{-\frac{1}{5}}\right]_0^{\infty} = 1$$

$$A = \frac{1}{5}$$

(ஆ) (i) $P(x \geq 10) = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{5}\, e^{\frac{-x}{5}}\, dx$

$$= \left[e^{\frac{-x}{5}}\right]_{10}^{\infty} = \frac{1}{e^2}$$

(ii) $P(x \leq 5) = \int_{-\infty}^{5} f(x)\, dx = \int_0^{5} \frac{1}{5}\, e^{\frac{-x}{5}}\, dx$

$$= \left[-e^{\frac{-x}{5}}\right]_0^5 = \frac{e-1}{e}.$$

(iii) $P(5 \leq x \leq 10) = \int_5^{10} f(x)\, dx.$

$$= \left[-e^{-\frac{x}{5}}\right]_5^{10}$$

$$= -\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e}$$

$$= \frac{e-1}{e^2}$$

(இ) X = தொலைபேசியில் பேசுகின்ற நேரம்.

$$\text{இங்கு } A = \frac{1}{5}$$

$$P[A(b)] = P(X>b) = \int_b^\infty f(x)\,dx.$$

$$= \frac{1}{5}\int_b^\infty e^{-\frac{x}{5}}\,dx = e^{-\frac{b}{5}}$$

$$P[A(a+b)] = P[X > (a+b)] = e^{-\frac{(a+b)}{5}}$$

$$P[A(a+b)/A(a)] = P[X > (a+b)/(X > a)]$$

$$= \frac{P[X > (a+b),\ X > a)]}{P(X > a)}$$

$$= \frac{P(X > a+b)}{P(X > a)}$$

$$= \frac{P[A(a+b)]}{P[A(a)]}$$

$$= \frac{e^{-\frac{a+b)}{5}}}{e^{-\frac{a}{5}}} = e^{-\frac{b}{5}} = P[A(b)]$$

எ.கா. $0 \leq x \leq 10$ என்ற இடைவெளியில் ஒரு குறிப்பிட்ட மாறி மொத்த நிகழ்வெண் 1000 எனக் கொண்டு $y = 2x^2(15-x)$ என்ற கீழின வளர் நிகழ்வெண் வரையின் சமன்பாட்டைக் கொண்டுள்ளது.

பரவலின் நிகழ்வெண் சார்பையும், முகடையும் காண்க.

(அண்ணாமலை 1971)

விடை

$F(x)$ என்பது பரவல் சார்பானால்,

$$F(x) = 30x^2 - 2x^3$$

நிகழ்வெண் சார்பு $f(x) = F'(x) = 60x - 6x^2$

$$f'(x) = 60 - 12x$$

$f'(x) = 0$-ன் தீர்வே முகடாகும்.

$$\therefore \quad 60 - 12x = 0$$

$$\therefore \quad x = 5$$

முகடு $= 5$

$$\left\{ \int_0^{10} f(x)\,dx = \left[30x^2 - 2x^3\right]_0^{10} \right.$$

$= 1000$ [மொத்த நிகழ்வெண்] }

எ.கா. $(0, a)$ என்ற இடைவெளியில் அமைந்திருக்கும் செவ்வகப் பரவலின் மாறுபாட்டுக்கெழுவைக் காண்க. இதற்கான நிகழ்தகவு விதி $P\{x \leq t\} = \frac{t}{a}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

(அண்ணாமலை ப.க. '71)

$$\mu' = \bar{x} = \frac{1}{a}\int_0^a x\,dx = \frac{a}{2}$$

$$\mu_2 = \mu'_2 - (\mu_1')^2$$

$$\mu_2' = \int f(x) \cdot x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^2}{3}.$$

$$\therefore \quad \mu_2 = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12}$$

$$\sigma = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

30

$$\therefore \quad \text{மாறுபாட்டுக்கெழு} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{a}{2\sqrt{3}} \times \frac{2}{a} \times 100$$

$$= \frac{100}{\sqrt{3}} = \mathbf{57{\cdot}73}$$

மாறிகளின் உருவமாற்றங்கள் (Transformation of Variables)

சமவாய்ப்பு மாறியின், ஒரு சார்பின் பரவலை அறிய பின்வரும் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

x-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு $f(x)$. $y = h(x)$ என்ற சார்பு வகைப்படுத்தக் கூடியதும், x-ன் வீச்சிற்குள் காணும் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்,ஒரே முறை ஏறும் அல்லது இறங்கும் (monotonic increasing or decreasing) சார்பாயின்,

y-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு

$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|, \quad \frac{dy}{dx} \neq 0$$

என்பதன் மூலம் தரப்படுகிறது.

எ.கா. (அ) x-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

$u = \frac{1}{x}$ ன் அடர்த்திச் சார்பைக் காண்க.

$$u = \frac{1}{x}$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dx}{du} = -x^2$$

$$f(u) = f(x)\left|\frac{dx}{du}\right|$$

$$= e^{-x} \cdot x^2$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{u}}}{u^2} = \frac{1}{u^2} \cdot e^{-\frac{1}{u}} \; (u > 0)$$

(ஆ) $f(x) \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$ எனின் $u = 3x + 1$-ன் பரவலைக் காண்க

$$\frac{du}{dx} = 3$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{3}$$

$$f(u) = f(x)\frac{dx}{du}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} & 1 \le u \le 4 \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்.} \end{cases}$$

(இ) $f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} & x > 0 \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும் என்றால்} \end{cases}$

(i) $Y = X^2$

(ii) $Y = \log X$ இவற்றின் அடர்த்திச்சார்புகள் என்ன ?

(i) $y = x^2$

$$\frac{dy}{dx} = 2x = 2y^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \; f(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

$$= y^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}, \; 0 < y < \infty$$

$$= 0 \; (\text{மற்ற மதிப்புகளில்})$$

(ii) $y = \log x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dx}{dy} = x = e^y$$

$$f(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

$$= x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^y$$

$$= e^y \, e^{-\frac{1}{2} e^{2y}} \cdot e^y.$$

$$= e^{2y - \frac{1}{2} e^{2y}} \quad (-\infty < y < \infty)$$

எ.கா. x-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad -\infty < x < \infty \text{ எனின்,}$$

$y = x^2$-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைப் பெறுக.

தீர்வு

x-ன் குறை குறியுடைய மதிப்புகளுக்கு சார்பு குறையுஞ் சார்பாதலாலும் x-ன் நேர்க்குறியுடைய மதிப்புகளுக்கு அதிகரிக்கும் சார்பாதலாலும், இது ஒரே முறை ஏறும் அல்லது இறங்கும் சார்பல்ல. இருப்பினும், x-ன் அடர்த்திச்சார்பு சமச் சீருடையதாதலால்,

$$f(-x) = f(x)$$

$$y(-x) = y(+x)$$

எனவே நிகழ்தகவு அடர்த்தி $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad x > 0$

$= 0$ மற்றெங்கிலும்

எனவே நிபந்தனைகள் நிறைவு செய்யப்படுகின்றன.

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2x}$$

$$f(y) = f(x)\,\frac{dx}{dy}\,.$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\;2x}\,e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\,y^{-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}y} \qquad (y > 0)$$

எ.கா. X-ன் குவிவுப் பரவல் சார்பு $F(x)$ ஆனால், பின் வருவனவற்றின் குவிவுப் பரவல் சார்புகளைக் காண்க.

(i) $Y = X + a$ (ii) $Y = X - b$ (iii) $Y = aX$

(iv) $Y = X^3$ (v) $Y = X^2$

அவற்றிற்குரிய நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்புகளையும் காண்க.

Y-ன் குவிவுப் பரவல் சார்பு $G(x)$ என கொள்வோம்.

(i) $G(x) = P(Y \le x) = [X + a \le x]$

$= P[X \le x - a] = F(x - a)$

(ii) $G(x) = P[Y \le x] = P[X - b \le x]$

$= P[Y \le x + b] = F(x + b)$

(iii) $G(x) = P[aX \le x] = P\left[X \le \frac{x}{a}\right]$

$= F\left(\frac{x}{a}\right) \cdot a > 0$ ஆனால்,

$G(x) = P\left[X \ge \frac{x}{a}\right]$

$= 1 - P\left[X \le \frac{x}{a}\right]$

$= 1 - F\left(\frac{x}{a}\right) \qquad a \le 0$ ஆனால்

(iv) $G(x) = P[Y \le x] = P[X^3 \le x]$

$$= P\left[X \le x^{\frac{1}{3}}\right] = F\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$$

(v) $$G(x) = P(X^2 \le x) = P\left[-x^{\frac{1}{2}} \le X\, x^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= P\left[X \le x^{\frac{1}{2}}\right] - P\left[X \le x^{\frac{1}{2}}\right]$$

$= 0 \quad (x < 0$ ஆனால்)

$= F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x} - 0)\ x > 0$ ஆனால்

$\therefore \quad G(x) = 0 \quad (x < 0)$

$= F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x} - 0), \ (x > 0)$

$= 0 \quad (x = 0)$

மாறி	பரவற் சார்பு	நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு
X	$F(x)$	$f(x)$
$X - a$	$F(x + a)$	$f(x + a)$
$aX,\ a > 0$	$F\left(\frac{x}{a}\right)$	$\frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)$
$a < 0$	$1 - F\left(\frac{x}{a}\right)$	$-\frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)$
$X^2,\ x > 0$	$F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x} - 0)$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}[f\sqrt{x} + f(-\sqrt{x})]$ $x > 0$
$x \le 0$	0 மற்றெங்கிலும்	$= 0,\ x \le 0$
X^3	$F\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$	$\frac{1}{3} f\left(x^{\frac{1}{3}}\right)\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$

எ.கா, X மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு வருமாறு.

$$f(x) = \frac{2x}{3}, \qquad 0 < x < 1$$
$$= \frac{3-x}{3}, \qquad 1 \le x < 3$$
$$= 0 \text{ மற்றெங்கிலும்.}$$

$Y = X^2 + 1$-ன் பரவலைக் காண்க.

தீர்வு

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

$$f_1(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

$$= \frac{2x}{3} \cdot \frac{1}{2x} = \frac{1}{3} \qquad 1 < y < 2.$$

$$f_2(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

$$= \frac{3-x}{3} \cdot \frac{1}{2x} = \frac{3-x}{6x}$$

$$= \frac{3-\sqrt{y-1}}{6\sqrt{y-1}} = \frac{1}{2\sqrt{y-1}} - \frac{1}{6}$$
$$= 0 \text{ மற்றெங்கிலும்.}$$

பயிற்சி

1. $f(x) = kx(1-x) \qquad 0 < x < 1$
$= 0$ மற்றெங்கிலும்.

(i) $k = \frac{1}{5}$.

(ii) $F(x) = 0, \quad x \le 0; \quad F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{5}}, \; x > 0$
எனக்காட்டுக.

$F(x)$-ஐப் பயன்படுத்தி,

(iii) $P(3 < X \le 5) = 0{\cdot}1809$

(iv) $P(X < 4) = 0{\cdot}5507$

(v) $P(X > 6) = 0{\cdot}3012$ எனக்காட்டுக.

2. சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு கீழ்க்காணும் வகையில் அமைந்துள்ளது.

$$f(x) = \begin{cases} a & x = 0 \text{ ஆனால்} \\ 2a & x = 1 \quad ,, \\ 3a & x = 2 \quad ,, \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்.} \end{cases}$$

'a' ஏதேனும் ஒரு எண் ஆகும்.

(i) a-யின் மதிப்பைக் காண்க.

(ii) $P(X < 3)$, $P(X \leq 3)$, $P(0 < X < 2)$ இவற்றைக் காண்க.

(iii) X-ன் பரவற் சார்பைக் காண்க.

3. பின்வரும் நிகழ்தகவு சார்புக்கு,

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	0	C	$2C$	$2C$	$3C$	C^2	$2C^2$	$7C^2$

(i) C-யின் மதிப்பைக் காண்க.

(ii) $P(x \geq 5)$, $P(X < 3)$ இவற்றைக் கண்டுபிடி.

(iii) $P(X \leq k) > \frac{1}{2}$ ஆக இருப்பதற்கு k-ன் மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்க.

(iv) X-ன் பரவற் சார்பு காண்க.

4. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் பரவற் சார்பு பின் வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ ஆக இருந்தால்,} \\ \frac{1}{8} & 0 \leq x < 1 \quad ,, \\ \frac{3}{8} & 1 \leq x < 2 \quad ,, \\ \frac{6}{8} & 2 \leq x < 3 \quad ,, \\ \frac{7}{8} & 3 \leq x < 4 \quad ,, \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

(i) $f(x)$-ன் வரைபடத்தை வரைக.

(ii) $P(1 < X \leq 4)$-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

(iii) பரவற்சார்பு X-ஐக் கண்டுபிடித்து, ஒரு நிகழ்தகவு பட்டியலை அமைக்க.

[விடை (ii) $\frac{5}{8}$. (iii) $f(0) = \frac{1}{8}, f(1) = \frac{2}{8}$,

$f(3) = \frac{1}{8}$ $f(4) = \frac{1}{8}$, $f(x) = 0$ மற்றெங்கிலும்]

5. பின்வரும் சார்புகள் நிகழ்தகவு சார்புகள் ஆகுமா? அப்படி இருந்தால் அவற்றின் பரவற்சார்புகளைக் காண்க.

(i) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & x = -1 \text{ ஆனல்} \\ \frac{1}{3} & x = 1 \quad ,, \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = -1 \\ \frac{1}{3} & x = 0 \\ \frac{1}{3} & x = 5 \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்.} \end{cases}$

[விடை : (i) இல்லை. (ii) ஆமாம்.

$F(x) = 0, \quad x < -1;$

$F(x) = \frac{1}{3}, \quad -1 \leq x < 0;$

$F(x) = \frac{2}{3}, \quad 0 \leq x < 5;$

$F(x) = 1, \quad x \geq 5.$

6. x, 0 விலிருந்து 2 வரை வீச்சாக உள்ள ஒரு தொடர் பரவலில் $f(x) = (x+1)\ (3-x)$ என்ற நிகழ்வெண் சார்பு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. $x = 1$ என்பதைக் கொண்டு பரவல் சமச்சீராக உள்ளது எனவும், பரவற்படி $\frac{17}{55}$ எனவும் காட்டுக. $x = 0$ என்னும் மூலத்தை ஒட்டி 2-ஆவது, 3-ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் காண்க. $\mu_3 = 0$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

7. பின் கண்ட நிகழ்வெண் வரை $y = \frac{1}{2}\sin x\ 0 \le x \le \pi$-க்கு முகடு, இடைநிலை இவற்றைக் காண்க.

[**விடை :** முகடு $x = \frac{\pi}{2}$ · இடைநிலை $x = \frac{\pi}{2}$]

8. (அ) ஒரு தொடர்·மாறி பரவலின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு,

$$f(x) = \frac{3}{4}\ (2-x), \qquad 0 \le x \le 2.$$

கூட்டுச் சராசரி 1-ஐ கொண்டு, பரவல் சமச்சீராக உள்ளது எனவும், பரவற்படி $\frac{1}{5}$ எனவும் காட்டுக. மேலும் $x = 0$ என்பதை ஒட்டி 2-வது, 3-ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் $\frac{6}{5}, \frac{8}{5}$ எனக்காட்டுக. மேலும் கோட்டளவை 0 எனவும்; கூட்டு சராசரியை ஒட்டிய சராசரி விலக்கம் $\frac{3}{8}$ எனவும் காட்டுக.

பரவலுக்கு $\mu_{2n+1} = 0$ என நிறுவுக. β_2-வை கணக்கிடுக.

(ஆ) $f(x) = Cx^{\frac{1}{2}}\ (1-x)^{\frac{3}{2}}$, $0 \le x \le 1$ ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாயின், $C = \frac{16}{\pi}$ எனக் காட்டுக. மேலும் $\mu_2 = \frac{3}{64}$ என நிறுவுக.

9. (0, 1) என்ற இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள சமவாய்ப்பு மாறி x-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு $f(x) = kx^2\ (1-x^3)$. k-ன் மதிப்பைக் காண்க. பரவலின் கூட்டுச் சராசரியையும், பரவற்படிவையும் காண்க.

10. (0, 4) எனும் இடைவெளியில் பரவியிருக்கும் மாறி x-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு $f(x) = Ax^3 (4 - x)^2$. பரவலின் கூட்டுச்சராசரியையும், திட்ட விலக்கத்தையும் காண்க.

11. x என்ற மாறி (0, a) என்ற இடைவெளியில் அமைந்துள்ளது. இதன் நிகழ்தகவு வரையின் சமன்பாடு,

$$= A (a - x)^2 \quad (0 \leq x \leq a)$$

A, a மாறிலிகள் வரையின் அடியில் உள்ள பரப்பின் மதிப்பும்; சராசரியின் மதிப்பும் 1 ஆகும்.

(i) A, a-ன் மதிப்புகள் $\frac{3}{64}$, 4 எனக்காட்டுக.

(ii) 10 ஆவது நூற்றுமானம், 90 ஆவது நூற்றுமானம் இவை முறையே 0·138, 2·143 எனக்காட்டுக.

12. (0, 1) என்ற இடைவெளியில் X என்ற தொடர்மாறி பரவியுள்ளது. அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு $ax^2 + bx$. (a, b மாறிலிகள்). கூட்டுச்சராசரி $\bar{X}$, 0.5 என இருந்தால் a, b இவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

13. x மாறியின் அடர்த்திச்சார்பு,

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta}, \; 0 < x < \theta, \; \theta > 0.$$

$= 0$ மற்றெங்கிலும் எனில்

$y = 3x + 5$-ன் அடர்த்திச்சார்பைச் காண்க.

[விடை $f(y) = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{3}$, $(5 < y < 3\theta + 5)$ $f(y) = 0$ மற்ற மதிப்புகளில்]

14. X என்பது $F(x) = 0, \; x \leq 0; \; \frac{x^2}{25}, \; 0 \leq x \leq 5; \; 1, \; x > 5$ என்ற பரவல் சார்பைக்கொண்ட சமவாய்ப்புமாறி. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $F(x)$ ஒரு பரவல் சார்பு

(ii) $P(X \leq 3) = \frac{9}{25}$

(iii) $P(1 \le X < 4) = \frac{3}{5}$

(iv) $P(-10 \le X \le -3) = 0 = P(6 < X < 12)$

(v) $P(x = 2), P(x = 4), P(x = 10) = 0.$

(vi) $P(x \le l) = \frac{1}{2}$ எனின் $k = 5/\sqrt{2}.$

ஒரு நிகழ்வெண் பரவல் வருமாறு.

X-ன் மதிப்புக்கள்	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(x)$	0	k	$2k$	$2k$	$3k$	k^2	$2k^2$	$7k^2 + k$

(i) k-ஐக் காண்க.

(ii) $P(X < 6), P(X \ge 6), P(0 < X < 5)$-ஐக் காண்க.

(iii) X-ன் பரவல் சார்பைக் காண்க.

(i) $\sum_{x=1}^{7} p(x) = 1$ ஆதலால்

$$k + 2k + 2k + 3k + k^2 + 2k^2 + 7k^2 + k = 1$$

$$\therefore \quad k = \frac{1}{10}$$

(ii) $P(X < 6) = P(X=0) + P(X=1) + \dots + P(X=5)$

$$= \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{100} = \frac{81}{100}$$

$$P(X \ge 6) = 1 - P(X < 6) = \frac{19}{100}.$$

$$P(0 < X < 5) = P(X = 5) - P(X = 0) = \frac{1}{100}.$$

(iii) $F(x) = 0, \; x < 0$

$$= \frac{1}{10}, \; 0 \le x > 1$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3}{10}, \; (2 \leq x < 2)$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} = \frac{5}{10}, \; (2 \leq x < 3)$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10}, (3 \leq x < 4)$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{100} = \frac{81}{100} \; (4 \leq x < 5)$$

....

....

....

$$= \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \cdots + \frac{7}{100} + \frac{1}{10} = 1, \; (x > 7)$$

15. ஒரு நிகழ்தகவுச் சார்பு பின்வருமாறு உள்ளது.

(i) k-யின் மதிப்பையும், கூட்டுச்சராசரி, பரவற்படியையும் காண்க.

(ii) பரவல் சார்பு $F(x)$-ஐக் காண்க. அதன் வரைபடம் வரைக.

[விடை (i) 0·1, 0·8, 2·16.

(ii) $F(x)$ = 0·1, 0·2, 0·4, 0·6, 0·9, 1·0.]

8. கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்

(MATHEMAT CAL EXPECTATION)

ஒரு பந்தயத்தில் ஒருவர் வெற்றி பெறுவதற்குரிய வாய்ப்பு p எனவும், வெற்றி பெற்ருல் கிடைக்கும் தொகை M எனவும் கொண்டால் pM என்பது எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பாகும்.

A, B என்ற இருவர் a, b என்ற தொகைகளைப் பணயமாக வைத்து சீட்டு விளையாடுகிருர்கள் எனக் கொள்வோம். அவர்கள் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே p, q என்க.

A வெற்றி பெற்ருல், அவர் தன் பணயப் பொருள் aயைத் தானே வைத்திருப்பதோடு, Bயின் பணயப் பொருளான bயையும் பெறுகிருர்.

Aயின் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $= p$. Bயின் வெற்றி பெறுவதற்கான அல்லது Aயின் தோல்வி அடைவதற்கான நிகழ்தகவு $= q$. எனவே Aயின் கணக்கியல் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு $pa-qb$ என்ருகிறது.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு:

இரு பகடைகளை ஒரேமுறை வீசுவதில் B '4' பெறுவதற்கு முன், தான் '7' பெறுவதாகக் கூறி A ரூ 5க்கு, ரூ 2 எனப் பந்தயம் கட்டி விளையாடுகிருர். ஒவ்வொருவரும் தம்மிடமுள்ள ஒரு ஜோடி பகடைகளை எவரேனும் ஒருவர் வெற்றி பெறும்வரை, ஒரே சமயத்தில் வீசுகின்றனர். (இருவருக்கும் ஒரே முயற்சியில் வெற்றி கிடைத்தால் அது எடுத்துக் கொள்ளப்படுவதில்லை.) Aயின் எதிர்பார்த்தல் என்ன ?

இரு பகடைகளை ஒருமுறை வீசும்போது (1, 6) (2, 5) (3, 4) (4, 3) (5, 2) (6, 1) என்ற எண்கள் கிடைக்கும்போது, அவற்றின்

கூட்டுத்தொகை 7 ஆவதால், A வெற்றி பெறுவதற்கான வாய்ப்பு $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

அதுபோல ஒரு முயற்சியில் (2, 2), 1, 3), (3, 1) என எண்கள் கிடைத்தால், B வெற்றி பெறுவதால்

யின் வெற்றியின் வாய்ப்பு $= \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

எனவே ஒரு முயற்சியில் Aயின் வெற்றிக்கான வாய்ப்பு B யினுடையதைப் போல் இருமடங்காகும்.

இருவரில் ஒருவராவது வெற்றி காணும் வரை, பகடைகளை வீசிக் கொண்டிருந்தால், Bயின் எதிர்பார்த்தலைக் கணக்கிடுவோம்.

Aயின் வாய்ப்பு + Bயின் வாய்ப்பு = 1

$2x + x = 1$ (x என்பது Bயின், பெருமளவு முயற்சிகளின் இறுதியில் வெற்றி காணும் வாய்ப்பு)

$\therefore \quad x = \frac{1}{3}$.

எனவே Bயின் எதிர்பார்த்தல் :

$= \frac{1}{3} \times 5 - \frac{2}{3} \times 2 =$ ரூ. 1.

எ. கா. A ஒரு பகடையை வீசும்போது புள்ளிமுகம் 2, 4 அல்லது 6 கிடைத்தால் 10 ரூபாயைப் பெறுகிறார். 1, 3 அல்லது 5 கிடைக்கும்போது 8 ரூபாயை இழக்கிறார். காலப்போக்கில் (in the long run) அவரது எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பென்ன ?

Aயின் வெற்றிக்கான வாய்ப்பு $= \frac{1}{2}$

Aயின் தோல்விக்கான வாய்ப்பு $= \frac{1}{2}$

எனவே Aயின் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு

$= \frac{1}{2} \times 10 - \frac{1}{2} \times 8 =$ ரூ. 1

3 நாணயங்களை வீசும் ஒரு சோதனையை எடுத்துக் கொள்வோம். நாம் பெறும் தலைகளின் எண்ணிக்கை

$f(x) = 3C_x \left(\frac{1}{2}\right)^3, x = 0, 1, 2, 3$ எனும் ஈருறுப்புப் பரவலைச் சார்ந்துள்ளது.

இவ்வாறு 1000 முறைகள் 3 நாணயங்களை வீசினால் $1000 \times 3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 125$ முயற்சிகளில் கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கை பூஜ்யமாகும்.

1 தலை $1000 \times \frac{3}{8} = 375$ முயற்சிகளிலும், 2 தலைகள் $1000 \times \frac{3}{8}$ 375 முயற்சிகளிலும், 3 தலைகள் $1000 \times \frac{1}{8} = 125$ முயற்சிகளிலும் பெறுகின்றோம்.

எனவே 1000 முயற்சிகளில் நாம் பெறக் கூடிய தலைகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $= 125 \times 0 + 375 \times 1 + 375 \times 2 + 125 \times 3 = 1500$, எனவே ஒரு முயற்சியில் சராசரியாக எதிர்பார்க்கப் படும் தலை $= \frac{1500}{1000} = 1{\cdot}5$. இதுவே x-ன் சராசரி அல்லது எதிர் பார்க்கப்படும் மதிப்பாகும்.

x-ன் எல்லா மதிப்புகளையும், அவற்றிற்கான நிகழ்தகவு களால் பெருக்கி, விடைகளைக் கூட்டினாலும், எதிர்பார்த்தலுக்கு இதே மதிப்பைப் பெற இயலும்.

$$0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = 1{\cdot}5.$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு ஒரு கணக்கியல் அளவேயாகும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு முயற்சியில், எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பை x பெருமலேயே இருக்கலாம். சில சமயங்களில் எப்போதுமே (மேல் தரப்பட்டுள்ள எடுத்துக் காட்டில் உண்மையில் தலைகளின் எண்ணிக்கை ஒருபோதும் 1·5 இருக்க முடியாது) x எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பைப் பெருமலேயே இருக்கலாம். எனினும் பெருவாரியான முயற்சிகளில் xன் சராசரி மதிப்பு, அதன் எதிர்பார்த்தலாக மிக அண்மையில் இருக்கும்.

கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்

வரையறை : X ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி: அது $x_1, x_2, \dots x_n$ என்ற மதிப்புகளை, முறையே நிகழ்தகவுகள் $p_1, p_2, \dots p_n$ எனக் கொண்டு ஏற்கிறது. $(p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1)$.

X-ன் எதிர்பார்த்தல் அல்லது கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$ என்று

வரையறுக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு : $g(X)$ என்பது X-ன் ஒரு சார்பு $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ என்ற மதிப்புகளை முறையே நிகழ்தகவுகள் $p_1, p_2, \dots p_n$ இவற்றைக்கொண்டு ஏற்பதானல்,

$$E[g(X)] = p_1 g(x_1) + p_2 g(x_2) + \dots + p_n g(x_n)$$
$$\Sigma p_i = 1$$

$X = x_1, x_2, \dots\ p_i = p_1, p_2, \dots$ என்றபோது

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$$ என்றவாறு

வரையறுக்கவேண்டுமாயின், இத்தொடர் ஒரு குவி தொடராக இருத்தல் வேண்டும்.

$X = 0!, 1!, 2!, \dots$ என்ற மதிப்புகளை

$P[X = x_i] = \dfrac{e^{-1}}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \dots\dots$ என்ற நிகழ்தகவு களுடன் பெறுவதாகக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad E[X] = \sum_{x=0} \frac{e^{-1}}{x!} x! = e^{-1} \sum_{x=0}^{\infty} 1$$

இரு ஒரு விரிதொடராதலால், இங்கு $E(X)$-ஐ வரையறுக்க இயலாது.

$g(X) = X^r$ ஆனால்,

$E[X^r] = \sum_i p_i x_i^r = \mu_r'$ [நிகழ்தகவுப் பரவலின், ஆதியை மூலமாக ஒட்டிய r-வது விலக்கப் பெருக்குத்தொகை]

$$\therefore \quad \mu_1' = E[X]$$
$$\mu_2' = E[X^2]$$

எனவே கூட்டுச்சராசரி $= \bar{x} = \mu_1' = E[X]$

பரவற்படி $= \mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = E[X^2] - \{E[X]\}^2$

$g(X) = (X - \bar{X})^r$ ஆனால்

$E[X - \bar{X}]^r = \sum p_i (x_i - \bar{x})^r$ என்பது கூட்டுச்சராசரியை ஒட்டிய r-ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகையாகும்.

$$\therefore \quad \mu_2 = E[X - \bar{X}]^2 = E[X - E(x)]^2 = \sum_i p_i (x_i - \bar{x})^2$$

தேற்றம்

C என்பது ஒரு மாறிலியானால்

$$E(C) = C$$

நிறுவுதல்

$E(C) = \sum f(x)\, C$, $(-\infty < x < \infty)$ இது ஒரு நிகழ்தகவுச் சார்பு ஆகும்.

$$\therefore \quad E(C) = C \cdot \sum f(x)$$

$$= C \cdot 1 = C$$

X தொடர் மாறியானால்

$$E(C) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot C\, dx,$$

$$= C \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx.$$

$f(x)$ ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாதலால்

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

$$\therefore \quad E(C) = C \cdot 1 = C.$$

தேற்றம்

$$E(aX + b) = a \cdot E(X) + b.$$

நிறுவுதல்

x தனித்த மாறியானால்

$$E(aX + b) = \sum (ax_i + b)\, p_i$$

$$= \sum (a x_i p_i + b\, p_i)$$

$$= \Sigma\, a x_i p_i + \Sigma\, b p_i$$
$$= a \Sigma\, x_i p_i + b \Sigma\, p_i$$
$$= a E(X) + b \qquad [\because \; \Sigma p_i = 1]$$

x ஒரு தொடர் மாறியானல்

$$E(aX+b) = \int_{-\infty}^{\infty} (aX+b) f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [aX \cdot f(x) + b \cdot f(x)]\, dx.$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} X f(x)\, dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

$$= a E(X) + b \quad \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \right]$$

$$E(aX+b) = a E(X) + b$$

$V(aX+b) = a^2 \cdot V(X)$ என நிறுவுதல்

$$V(aX+b) = E[(aX+b) - E(aX+b)]^2$$
$$= E[\overline{aX+b} - \overline{aE(X)+b}]^2$$
$$= E[aX - aE(X)]^2$$
$$= a^2 E[X - E(X)]^2$$
$$= a^2 \cdot V(X)$$

கிளைத்தேற்றம்

$V(X+b) = V(X)$, b ஒரு மாறிலி.

எ.கா. கீழ்க்காணும் பட்டியலுக்கு $E(2X-7)$, $E(4X+5)$, $V(2X-7)$, $V(4X+5)$ காண்க.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P(X)$	·05	·1	·3	0	·3	·15	·1

$$E(2X-7) = 2 E(X) - 7$$
$$E(X) = \Sigma\, x_i p_i$$

$$= -3 \times \cdot 05 + -2 \times \cdot 1 - 1 \times \cdot 3$$

$$+ (0 \times 0) + (1 \times \cdot 3) + (2 \times \cdot 15) + (3 \times \cdot 1)$$

$$= -.15 - 0\,2 - 0 \cdot 3 + 0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3$$

$$= \cdot 6 - \cdot 35$$

$$= \cdot 25$$

$$E\ (2X - 7) = 2 \times \cdot 25 - 7$$

$$= 0 \cdot 5 - 7$$

$$= -6 \cdot 5$$

$$E\ (4X + 5) = 4\ E(X) + 5$$

$$= 4 \times \cdot 25 + 5$$

$$= 1 + 5$$

$$= 6$$

$$V\ (2X - 7) = 2^2\ V\ (X)$$

$$V(X) = E(X^2) - [E\ (X)]^2$$

$$E\ (X^2) = 9 \times \cdot 05 + 4 \times \cdot 1 + 1 \times \cdot 3 + 0 \times 0 + 1 \times \cdot 3 + 4 \times \cdot 15 + 9 \times \cdot 1$$

$$= \cdot 45 + \cdot 4 + \cdot 3 + 0 + \cdot 3 + \cdot 6 + \cdot 9$$

$$= 2 \cdot 95$$

$$[E\ (X)]^2 = (\cdot 25)^2$$

$$= \cdot 0625$$

$$V\ (X) = 2 \cdot 95 - \cdot 0625$$

$$= 2 \cdot 8875$$

$$V\ (2X - 7) = 4 \times 2 \cdot 28875$$

$$= 11 \cdot 55$$

$$V\ (4X + 5) = 4^2\ V\ (X)$$

$$= 16 \times V\ (X)$$

$$= 16 \times 2 \cdot 8875$$

$$= 46 \cdot 2$$

எ.கா. X ன் நிகழ்தகவு. 0·2 0·3 0·2 0·2 0·1

X-ன் மதிப்பு, 1 2 3 4 5

என்ற நிகழ்தகவுப் பரவல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) $E(3x-7)$ (ii) $E(x-2{\cdot}7)$ (iii) μ_3, μ_4 இவற்றைக் காண்க.

$$E(3x-7) = E(3x)-7$$
$$= 3E(x)-7$$

$$\therefore\ E(x) = 1\times0{\cdot}2+2\times0{\cdot}3+3\times0{\cdot}2 + 4\times0{\cdot}2+5\times0{\cdot}1$$
$$= 0{\cdot}2+0{\cdot}6+0{\cdot}6+0{\cdot}8+0{\cdot}5$$
$$= 2{\cdot}7$$

$$\therefore\ E(3x-7) = 3\times2{\cdot}7-7$$
$$= 8{\cdot}1-7 = 1{\cdot}1$$

(ii) $$E(x-2{\cdot}7) = E(x)-(2{\cdot}7)$$
$$= 2{\cdot}7-2{\cdot}7$$
$$= 0$$

(iii) $$\mu_3 = E[x-E(x)]^3 = E(x-\bar{x})^3 \quad [\bar{x}=E(x)]$$
$$= E[x^3-3x^2\bar{x}+3x\bar{x}^2-\bar{x}^3]$$
$$= E[x^3)-3\bar{x}E(x^2)+3\bar{x}^2E(x)-\bar{x}^3]$$
$$\bar{x} = 2{\cdot}7$$

$E(x^2) = \Sigma x_i^2\, p(x_i)$. இங்கு x_i என்பது மாறி. $p(x_i)$ என்பது அதன் நிகழ்தகவு.

$$\therefore\ E(x^2) = 1\times0{\cdot}2+4\times0{\cdot}3+9\times0{\cdot}2 + 16\times0{\cdot}2+25\times0{\cdot}1$$
$$= 8{\cdot}9$$

$$E(x^3) = 1\times0{\cdot}2+8\times0{\cdot}3+27\times0{\cdot}2 + 64\times0{\cdot}2+125\times0{\cdot}1$$
$$= 33{\cdot}3.$$

$$\mu_3 = 33{\cdot}3 - 3 \times 2{\cdot}7 \times 8{\cdot}9 + 2\,(2{\cdot}7)^3.$$
$$= 33{\cdot}3 - 72.09 + 2 \times 19{\cdot}683$$
$$= 33{\cdot}3 - 72{\cdot}09 + 39{\cdot}366$$
$$= 0{\cdot}576$$

$$\mu_4 = E\,(x - \bar{x})^4.$$
$$= E\,[x^4 - 4x^3\bar{x} + 6x^2\,\bar{x}^2 - 4x\bar{x}^3 + \bar{x}^4]$$
$$= E\,(x^4) - 4\bar{x}\,E\,(x^3) + 6\bar{x}^2\,E\,(x^2) - 3\bar{x}^4$$

$$E\,(x^4) = 1 \times 0{\cdot}2 + 16 \times 0{\cdot}3 + 81 \times 0{\cdot}2 + 256 \times 0{\cdot}2 + 625 \times 0{\cdot}1$$
$$= 0{\cdot}2 + 4{\cdot}8 + 16{\cdot}2 + 51{\cdot}2 + 62{\cdot}5$$
$$= 134{\cdot}9.$$

$$\mu_4 = 134{\cdot}9 - 4 \times 27 \times 33{\cdot}3 + 6\,(2{\cdot}7^2) \times 8{\cdot}9 - 3\,(2{\cdot}7)^4$$
$$= 524{\cdot}186 - 519{\cdot}6723$$
$$= 5{\cdot}1137$$

$$E\,(3x - 7) = 1{\cdot}1$$
$$E\,(x - 2{\cdot}7) = 0$$
$$\mu_3 = 0{\cdot}576$$
$$\mu_4 = 5{\cdot}1137$$

ஒரு மாநிலத்தின் பரிசு சீட்டுத் திட்டத்தில், முதல் பரிசின் மதிப்பு 1,00,000 ரூ. 10,000 ரூ மதிப்புள்ள 10 2-ஆம் பரிசுகள், 1000 ரூ. மதிப்புள்ள 100 3-ஆம் பரிசுகள், 100 ரூ. மதிப்புள்ள 500 4-ஆம் பரிசுகள் வழங்கப்படுகின்றன. 10 லட்சம் சீட்டுகள் உள்ள வரிசையில் ஒருவர் ஒரு ரூபாய் கொடுத்து ஒரு சீட்டை வாங்கினால், அவரின் இலாபத்தின் எதிர் பார்த்தல் என்ன ?

X என்பது லாபத்தைக் குறித்தால், இலாபத்தின் எதிர் பார்த்தல் $E\,(X)$.

நிகர லாபம் : $E\,(X) - 1.$

எ. கா. கீழ்க்கண்ட அட்டவணை X-ன் மதிப்புகளையும் அவற்றிற்கான நிகழ்தகவுகள் $P(X)$,-ஐயும் குறிக்கிறது.

X	1,00,000	10,000	1000	100
$P(X)$	$\frac{1}{10,00,000}$	$\frac{10}{10,00,000}$	$\frac{100}{10,00,000}$	$\frac{500}{10,00,000}$

$$E(X) = \Sigma \times P(X)$$

$$= \frac{1}{10,00,000}\,[1,00,000 + 1,00,000 + 1,00,000 \quad 50,000$$

$$= \frac{3,50,000}{10,00,000} = \frac{35}{100} = 35 \text{ பைசா.}$$

லாபத்தின் எதிர் பார்த்தல் = 35 பைசா — 1 ரு.

= — 65 பைசா.

நிகர நஷ்டம் = 65 பைசா.

ஒரு நாணயம் தொடர்ந்து 6 முறைகள் வீசப்படுகின்றது. 1-வது 2-வது, 3-வது, 4-ஆவது, 5-ஆவது, 6-ஆவது, வீச்சுகளில் தலை கிடைத்தால், முறையே 1, 2, 0, 4, 5, 6 ரூபாய்கள் ஒருவருக்குக் கிடைக்கும். இதைப் போலவே பூ விழுந்தால் அதே மதிப்புள்ள தொகையை அவர் கொடுக்க வேண்டும். பரவற்படியையும், அவரது லாபம் எதிர் பார்த்தலையும் கணக்கிடுக.

$E(X = \Sigma x_i P_i$. இங்கு X என்பது தலை அல்லது

முதல் வீச்சில் தலை விழுந்தால் லாபம் $= \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$ ரூ.

" பூ " நஷ்டம் $= \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$ ரூ.

2-ஆம் வீச்சில் தலை " லாபம் $= \frac{1}{2}(2) = 1$ ரூ.

2-ஆம் வீச்சில் பூ " நஷ்டம் $= \frac{1}{2}(-2) = -1$ ரூ.

3-ஆம் " தலை " லாபம் $= \frac{1}{2}(0) = 0$

3-ஆம் வீச்சில் பூ விழுந்தால் நஷ்டம் $= \frac{1}{2}(0) = 0$

4-ஆம் ,, தலை ,, லாபம் $= \frac{1}{2}(4) = 2$ ரூ.

4-ஆம் ,, பூ ,, நஷ்டம் $= \frac{1}{2}(-4) = -2$ ரூ.

5-ஆம் ,, தலை ,, லாபம் $= \frac{1}{2}(+5) = 2\frac{1}{2}$ ரூ.

5-ஆம் ,, பூ ,, நஷ்டம் $= \frac{1}{2}(-5) = -2\frac{1}{2}$ ரூ.

6-ஆம் ,, தலை ,, லாபம் $= \frac{1}{2}(6) = 3$ ரூ.

6-ஆம் ,, பூ ,, நஷ்டம் $= \frac{1}{2}(-6) = -3$ ரூ.

∴ லாபத்தின் எதிர்பார்த்தல் $E(x) = \Sigma x_i p_i$

$= 0$

= லாபமும் இல்லை
நஷ்டமும் இல்லை

X-ன் பரவற்படி $V(X) = E(x^2) - [E(x)]^2 = E(x^2)$

$= \Sigma x_i^2 p_i$

$= \frac{1}{2}[1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2$

$+ 4^2 + 4^2 + 5^2 + 5^2 + 6^2 + 6^2.]$

$= 1 + 4 + 16 + 25 + 36 = 82.$

சமவாய்ப்பு மாறிகளின் கூட்டுத்தொகையின் எதிர்பார்க்கப் படும் மதிப்பு;

X, Y என்பவை இரு சமவாய்ப்பு மாறிகள். $X = x_1, x_2 \dots x_m$ என்னும் மதிப்புகளையும், $Y = y_1, y_2 \dots y_n$ என்னும் மதிப்புகளையும் ஏற்கின்றன.

$X = x_1, x_2, \dots x_m$ என்னும் மதிப்புகளை $p_1, p_2 \dots p_m$ என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் பெறுகிறது.

$Y = y_1, y_2, \dots y$ என்னும் மதிப்புகளை $p_1', p_2' \dots p_n'$ என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் பெறுகிறது.

மாறிகளின் கூட்டுத்தொகை $(Y + Y)$-யும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி. இது $m \times n$ மதிப்புகளை ஏற்கிறது.

அவை
$$\begin{array}{l} x_1 + y_1, \quad x_1 + y_2, \dots\dots\dots x_1 + y_n \\ x_2 + y_1, \quad x_2 + y_2, \dots\dots\dots x_2 + y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_i + y_1, \quad x_i + y_2, \dots\dots\dots x_i + y_n \\ x_m + y_1, \quad x_m + y_2, \dots\dots\dots x_m + y_n \end{array}$$

X, x என்ற மதிப்பை ஏற்கவும், Y, y_j என்ற மதிப்பை ஏற்கவும் உரிய நிகழ்தகவு P_{ij} எனக் குறிப்பிடுவோம். $(i = 1, 2, 3 \dots\dots m, \quad j = 1, 2, 3 \dots\dots n)$

X, x_i என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பை ஏற்கும்போது $Y, y_1, y_2, \dots y_n$ என்ற மதிப்புகளில் ஏதேனும் ஒன்றை ஏற்கிறது.

எனவே $$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = p_i$$ இதுபோன்றே

இதுபோன்றே $$\sum_{i=1}^{m} p_{ij} = p'_j$$

$$\therefore \quad E(X + Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_i + y_j)\, p_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \cdot x_i + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_{ij}\, y_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} p_{ij} + \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot \sum_{i=1}^{m} p_{ij}'$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i p_i + \sum_{j=1}^{n} y_j p_j'$$

$$= E(X) + E(Y)$$

$$\therefore \quad E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

இத்தேற்றத்தை இரண்டிற்கும் மேற்பட்ட சமவாய்ப்பு மாறிகளுக்கும் விரித்துக் கூறலாம்.

(எ கா.) $E(X+Y+Z) = E(X+\overline{Y+Z})$

$$= E(X) + E(Y+Z)$$

$$= E(X) + E(Y) + (Z)$$

இவ்வாறே $E(X+Y+Z+ \ldots\ldots K) = E(X) + E(Y) + E(Z) + \ldots\ldots + E(K)$

சார்பற்ற சமவாய்ப்பு மாறிகளின் பெருக்கற தொகையின் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்

சார்பற்ற சமவாய்ப்பு மாறிகளின் பெருக்கற் தொகையின் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல் அவைகளின் தனித்தனி எதிர்பார்த்தல் களின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமம்.

$X, Y, Z, \ldots\ldots R$ என்பவை n சார்பற்ற சமவாய்ப்பு மாறிகளாயின்

$$E(XYZ, \ldots\ldots R) = E(X)\, E(Y)\, E(Z) \ldots\ldots E(R)$$

நிறுவுதல்

X என்னும் சமவாய்ப்பு மாறி $x_i \ (i = 1, 2 \ldots\ldots n)$ மதிப்புகளை முறையே நிகழ்தகவுகள் $p_i \ (i = 1, 2, 3 \ldots\ldots n)$ என்பவற்றோடு ஏற்கட்டும்.

Y என்பது மற்றொரு சமவாய்ப்பு மாறி. இது $y_j \ (j = 1, 2, \ldots m)$ என்னும் மதிப்புகளை $p_j' \ (j = 1, 2, 3 \ldots\ldots m)$ என்னும் நிகழ்தகவு களுடன் ஏற்கட்டும்.

வரையறையின்படி $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$, $E(Y) = \sum_{j=1}^{m} p_j' y_j$

X, x_i என்னும் மதிப்பையும், Y, y_j என்னும் மதிப்பையும் ஏற்பதற்குரிய நிகழ்தகவு p_{ij} ஆக இருக்கட்டும். X, Y சார்பற்ற மாறிகள் ஆதலால் $p_{ij} = p_i \cdot p_j'$

X, Y -யும் $m \times n$ மதிப்புகளை ($i = 1, 2, 3, n$, $= 1, 2, 3, \ldots\ldots m$) ஏற்கின்ற ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி ஆகும்.

எனவே வரையறையின்படி

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i \cdot y_j \cdot p_i \cdot p_j'$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \left(\sum_{j=1}^{m} y_j p_j' \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i E(Y) = E(Y) \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$$= E(X) \cdot E(Y).$$

இதனை இரண்டிற்கு மேற்பட்ட சார்பற்ற மாறிகளுக்கும் விரிவு படுத்தலாம்.

(எ.கா.) X, Y, Z என்பவை 3 சார்பற்ற சமவாய்ப்பு மாறிகள் ஆனால் $E(XYZ) = E[(X)(YZ)]$

$$= E(X) \cdot E(YZ)$$

$$= E(X) \cdot E(Y) \cdot E(Z)$$

இவ்வாறே $X, Y, Z, \ldots\ldots R$ என்பவை n சார்பற்ற சமவாய்ப்பு மாறிகளானால்

$$E(XYZ \ldots\ldots R) = E(X)\, E(Y)\, E(Z) \ldots\ldots E(R)$$

தொடர் சமவாய்ப்பு மாறிகளின் கூட்டல் தேற்றம்

X, Y என்பவை இரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறிகளானால்

நிறுவுதல்

வரையறையின்படி

$$E(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y) f(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, y)\, dx\, dy$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, y)\, dy\right] dx$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(x, y)\, dx\right] dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_y(y)\, dy$$

$$= E(X) + E(Y)$$

சார்பற்ற தொடர் சமவாய்ப்பு மாறிகளின் பெருக்கல் தேற்றம்

X, Y என்பவை சார்பற்ற தொடர் சம வாய்ப்பு மாறிகளானுல் $E(XY) = E(X)\, E(Y)$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_x(x)\, f_y(y)\, dx\, dy$$

[X, Y சார்பற்ற மாறிகளாதலால் $f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$]

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_y(y)\,dy$$

$$= E(X) \cdot E(Y)$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

n பகடைகளை வீசும் போது கிடைக்கும் எண்களின்

(i) கூட்டுத்தொகையின்,

(ii) பெருக்குத் தொகையின் எதிர் பார்த்தலைக் காண்க.

(i) முதல் பகடையில் காணப்படும் எண்ணை X_1 எனவும், 2-வது பகடையில் காணும் எண்ணை X_2 எனவும், ... n-வது பகடையில் காணப்படும் எண்ணை X_n எனவும் குறித்தால் அவற்றின் கூட்டுத் தொகை $Z = X_1 + X_2 + \ldots\ldots X_n$

எதிர்பார்த்தலின் கூட்டல் தேற்றத்தின் படி $E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \ldots + E(X_n)$ X_i என்பது i ஆவது பகடையில் கிடைக்கும் எண் ஆதலால் அது, 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்ற மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றையும் சம நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$ உடன் பெறுகின்றது. எனவே, $E(X_1) = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{7}{2}$

இதுபோன்றே $E(X_2) = E(X_3) = \ldots\ldots = E(X_n) = \frac{7}{2}$.

எனவே $E(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots X_n) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} + \ldots\ldots n$ தடவைகள்.

$$= \frac{7}{2} \times n = \frac{7n}{2}$$

(ii) ஒரு பகடையில் கிடைக்கும் எண் மற்றொரு பகடையில் கிடைப்பதைப் பொறுத்து அமையாததால் X_i ($i = 1, 2, 3 \ldots\ldots n$) சார்பற்ற சமவாய்ப்பு மாறிகள்.

எனவே $E(X_1 X_2 \ldots\ldots X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \; E(X_3) \ldots E(X_n)$

$$= \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} \ldots n \text{ தடவைகள்}$$

$$= \left(\frac{7}{2}\right)^n$$

இணை பரவற்படி (Co-variance)

X, Y என்பவை இரு சமவாய்ப்பு மாறிகளானால் அவற்றிற்கிடையே உள்ள இணைபரவற்படி அல்லது உடன் மாறுபாடு (Co-variance) σxy ஆகும்.

$\sigma_{xy} = \text{cov}(XY) = E\{(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})\}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$E\{(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})\} = E\{XY - \bar{X}Y - X\bar{Y} + \bar{X}\bar{Y}\}$$

$$= E(XY) - \bar{X}E(Y) - \bar{Y}E(\bar{Y}) + E(\bar{X}\bar{Y})$$

$$= E(XY) - \bar{X}\bar{Y} - \bar{Y}\bar{X} + \bar{X}\bar{Y}$$

$$= E(XY) - E(X)\,E(Y)$$

$$\therefore \text{cov}(XY) = E(XY) - E(X)\,E(Y)$$

குறிப்பு : (1) X, Y சார்பற்ற மாறிகளானால்

$E(XY) = E(X)\,E(Y)$. எனவே அவைகளின் இணை பரவற்படி $\text{cov}(XY) = E(XY) - E(XY) = 0$

2. $\text{cov}(aX, bY) = E[\{(aX - E(aX)\}\{bY - E(bY)\}]$

$$= E[a\{X - E(X)\}\,b\{Y - E(Y)\}]$$

$$= ab\,E[\{X - E(X)\}\{Y - E(Y)\}]$$

$$= ab\,\text{cov}(XY)$$

எடுத்துக் காட்டுக் கணக்குகள்

X, Y என்னும் இரு சமவாய்ப்பு மாறிகள் கீழ்க்காணும் வகையில் நிகழ் தகவுகளைக் கொண்டுள்ளன.

$$P(X = 0,\ Y = 0) = \frac{2}{9},\ P(X = 0,\ Y = 1) = \frac{1}{9}$$

$$P(X = 1,\ Y = 0) = \frac{1}{9},\ P(X = 1,\ Y = 1) = \frac{5}{9}$$

X, Y சார்பற்ற சம வாய்ப்பு மாறிகளா என ஆராய்க.

மேற்கண்ட நிகழ்தகவுகளை ஒரு பட்டியலில் குறித்துக் கொள்வோம்.

Y \ X	0	1	
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{6}{9}$
	$\frac{3}{9}$	$\frac{6}{9}$	1

$$P(X = 0) = P(X = 0,\ Y = 0) + P(Y = 0,\ Y = 1)$$

$$= \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$$

$$P(X = 1) = P(X = 1,\ Y = 0) + P(X = 1,\ Y = 1)$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{5}{9} = \frac{6}{9}$$

இவ்வாறே $P(Y = 0) = \frac{3}{9}$, $P(Y = 1) = \frac{6}{9}$ எனக்காட்டலாம்.

$$E(X) = 0 \cdot \frac{3}{9} + 1 \cdot \frac{6}{9} = \frac{6}{9}$$

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{3}{9} + 1 \cdot \frac{6}{9} = \frac{6}{9}$$

$$E(wY) = 0\cdot 0 \cdot \frac{2}{9} + 0\cdot 1 \cdot \frac{1}{9} \times 1\cdot + 1\cdot 0 \cdot \frac{1}{9} + 1\cdot 1 \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{9}$$

$$E(X)\,E(Y) = \frac{6}{9} \cdot \frac{6}{9} = \frac{36}{81}$$

$\therefore \quad E(XY) \neq E(X)\,E(Y)$

எனவே X, Y சார்பற்ற மாறிகள் அல்ல.

எ.கா. X, Y என்பவை இரு சமவாய்ப்பு மாறிகள். அவற்றின் கூட்டு நிகழ்தகவுச் சார்பு $p(xy) = \frac{1}{n^2}$ $x = 1, 2, 3 \ldots\ldots n$

$y = 1, 2, 3 \ldots\ldots n$

$= 0$ மற்றெங்கிலும்

X, Y சார்பற்றவையா என ஆராய்க.

X \ Y	1	2	3	………	n	மொத்தம்
1	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n^2}$	………	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n}$
2	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n^2}$	………	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n}$
3	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n^2}$	………	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n}$
…	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n^2}$	………	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n}$
…	…	…	…	………	…	…
…	…	…	…	………	…	…
n	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n^2}$	………	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n}$
மொத்தம்	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	………	$\frac{1}{n}$	1

$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots\ldots p_n x_n$

$$p(X=1)=p(X=1\ y=1)+\ldots\ldots p(X=1,y=n)=n\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$=\frac{1}{n}$$

இவ்வாறே $p(X=2)=p(X=3)\ldots\ldots p(X=n)=\frac{1}{n}$

$$E(X)=1\times\frac{1}{n}+2\cdot\frac{1}{n}+3\cdot\frac{1}{n}+\ldots\ldots n\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}$$

$$P(Y=1)=p(X=1,y=1)+p(X=2,Y=1)$$
$$+\ldots\ldots p(X=n,Y=1)$$

$$=n\times\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}$$

இவ்வாறே $P(Y=1)=P(Y=2)\ldots\ldots P(Y=n)=\frac{1}{n}$

$$E(Y)=1\cdot\frac{1}{n}+2\cdot\frac{1}{n}+3\cdot\frac{1}{n}+\ldots\ldots+n\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2\cdot n}=\frac{n+1}{2}$$

$$E(XY)=\left(1\times\frac{1}{1}\times\frac{1}{n^2}+1\cdot2\cdot\frac{1}{n^2}+1\cdot3\cdot\frac{1}{n^2}+1\cdot4\cdot\frac{1}{n^2}\right.$$

$$\left.+\ldots\ldots+1\cdot n\frac{1}{n^2}\right)+\left(2\cdot1\cdot\frac{1}{n^2}+2\cdot2\cdot\frac{1}{n^2}+2\cdot3\cdot\frac{1}{n^2}\right.$$

$$\left.+\ldots\ldots+2\cdot n\cdot\frac{1}{n^2}\right)+\left(3\cdot1\cdot\frac{1}{n^2}+3\cdot2\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots\ldots\right.$$

$$\left.+3\cdot n\cdot\frac{1}{n^2}\right)+\ldots\ldots$$

$$+\left(n\cdot1\cdot\frac{1}{n^2}+n\cdot2\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots\ldots+n\cdot n\cdot\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}[1+2+3\ldots\ldots n]+\frac{2}{n^2}[1+2+3\ldots\ldots n]$$

$$+\ldots\ldots+\frac{n}{n^2}[1+2+3\ldots\ldots n]$$

$$= \frac{1}{n^2}[1+2+3 \ldots\ldots n][1+2+3 \ldots\ldots n]$$

$$= \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$E(X)\,E(Y) = \frac{(n+1)}{2} \cdot \frac{(n+1)}{2} = \frac{(n+1)^2}{4}$$

$\therefore \quad E(X) \cdot E(Y) = E(XY)$

$\therefore \quad X, Y$ சார்பற்றவை.

$X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ என்பவை n சமவாய்ப்பு மாறிகளானுல் $V(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots\ldots + a_n X_n)$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j \operatorname{cov}(X_i X_j)$$

நிறுவுதல்

$$u = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots\ldots + a_n X_n$$

$$E(u) = a_1 E(X_1) + a_2 E(X_2) + \ldots + a_n E(X_n)$$

$$u - E(u) = a_1 [X_1 - E(X_1)] + a_2 [X_2 - E(X_2)] + \ldots\ldots a_n [X_n - E(X_n)]$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்தி எதிர்பார்த்தலைக் கணக்கிட்டால்,

$$E[u - E(u)]^2 = a_1^2 E[X_1 - E(X_1)]^2 + a_2^2 E[X_2 - E(X_2)]^2 + \ldots\ldots + a_n^2 E[X_n - E(X_n)]^2$$

$$+ 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i n_j \cdot E[\{X_i - E(X_i)\}\{X_j - E(X_j)\}]$$

$$V(u) = a_1^2 V(X_1) + a_2^2 V(X_2) + \ldots\ldots + a_n^2 V(X_n)$$

$$+ 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j \operatorname{cov}(X_i X_j)$$

$$V(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots\dots + a_n X_n) = a_1^2 V(X_1) + a_2^2 V(X_2) + \dots\dots + a_n^2 V(X_n) + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j \operatorname{cov}(X_i X_j)$$

கிளைத்தேற்றம்

(i) $a_i = 1 \ (i = 1, 2, 3 \dots\dots n)$ ஆனால்,

$$V(X_1 + X_2 + \dots\dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots\dots + V(X_n) + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

(ii) $X_1, X_2, \dots\dots X_n$ சார்பற்றவையானால் $\operatorname{cov}(X_i X_j) = 0 (i \neq j)$

$$\therefore V(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots\dots\dots + a_n X_n) = a_1^2 V(X_1) + a_2^2 V(X_2) + \dots\dots + a_n^2 V(X_n)$$

பொதுவாக, $V(X_1 + X_2 + \dots X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots\dots + V(X_n)$

(iii) $a_1 = 1 = a_2, \ a_3 = a_4 = \dots = a_n = 0$ எனில்

$$V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2 \operatorname{cov}(X_1 X_2)$$

$a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = a_4 = \dots = a_n = 0$ எனில்

$$V(X_1 - X_2) = V(X_1) + V(X_2) - 2 \operatorname{cov}(X_1, X_2)$$

$$\therefore V(X_1 \pm X_2) = V(X_1) + V(X_2) \pm 2 \operatorname{cov}(X_1, X_2)$$

X_1, X_2 சார்பற்றவையெனில் $(\operatorname{cov}(X_1, X_2) = 0$

எனவே $V(X_1 \pm X_2) = V(X_1) + V(X_2)$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள் :

1. X, Y இரு சார்பற்ற மாறிகள். அவற்றின் கூட்டுச் சராசரி கள் முறையே 10, 20; பரவற் படிகள் முறையே 2, 3. $5x + 7y$ ன் பரவற் படியை காண்க.

$$V(a_1 X + a_2 Y) = a_1^2 V(X) + a_2^2 V(Y)$$

இங்கு $a_1 = 5, \quad a_2 = 7$

$V(X) = 2, \; V(Y) = 3$

$$\therefore \quad V(5X + 7Y) = 25 \times 2 + 49 \times 3$$
$$= 50 + 147$$
$$= 197$$

2. $X_1, \quad X_2, \quad X_3$ என்பவை 3 சமவாய்ப்பு மாறிகள். அவற்றின் கூட்டுச் சராசரி முறையே 3, 4, 5. பரவற் படிகள் 10, 20, 10. இணை பரவற் படிகள் $\sigma_{x_1 x_2} = 0 \quad \sigma_{x_2 x_3} = 0$ $\sigma_{x_1 x_3} = 5$. $Y = 2 \; X_1 + 3 \; X_2 + 4 \; X_3$ ன் பரவற்படி காண்க.

$V(a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3) = a_1^2 \; V(X_1) + a_2^2 \; V(X_2)$
$+ a_3^2 \; V(X_3) + 2 \, a_1 \, a_2 \operatorname{cov}(X_1, X_2) + 2 \, a_2 \, a_3 \operatorname{cov}(X_2, X_3)$
$+ 2 a_3 \, a_1 \operatorname{cov}(X_3, X_1)$

$$= 4{\cdot}10 + 9{\cdot}20 + 16{.}10 + 16{\cdot}5$$
$$= 460$$

இணைபரவற்படி (Co-Variance)

திட்ட விலக்கம் ஒரு மாறி பரவலில் பரவுகை அளவாக உள்ளது. அதுபோலவே X, Y என்னும் இரு மாறிகளின் இணைந்த பரவலின் பரவுகை அளவையாக இணை பரவற்படியைக் கொள்கிறோம். X-ன் பெரிய மதிப்புகளுக்கு Y-ன் · பெரிய மதிப்பு களும், X-ன் குறைந்த மதிப்புகளுக்கு Y-ன் குறைந்த மதிப்பு களுமாகப் பரவலில் இருந்தால், இணைபரவற்படி நேர்குறி உடையதாக உள்ளது· X-ன் பெரிய மதிப்புகளுக்கு, Y-ன் சிறிய மதிப்புகளும், X-ன் சிறிய மதிப்புகளுக்கு, Y-ன் பெரிய மதிப்புகளுமாக இருந்தால், இணைபரவற்படி எதிர் குறி உடைய தாக இருக்கும். X, Y சார்பற்றவையாக இருந்தால் உடன்மாறு பாடு (இணை பரவற்படி) பூஜ்ஜியமாகும்.

ஒட்டுறவுக்கெழு Correlation Co-efficient)

X, Y என்னும் இரு சமவாய்ப்பு மாறிகளின் இடையே உள்ள

ஒட்டுறவுக்கெழு $r_{xy} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \dfrac{E\left[\{X - E(X)\}\{Y - E(Y)\}\right]}{\left\{E[X - E(X)]^2 E[Y - E(Y)]^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$

என்று வரையறுக்கப்படுகிறது·

$\sigma_x = X$-ன் திட்ட விலக்கம். $\sigma_y = Y$-ன் திட்ட விலக்கம். r_{xy}-ன் அளவுகளின் அலகுகள் வருவதில்லை. ஆதலால் அது ஒரு தனி எண். ($\because$) நாம் இணை பரவற்படியை X, Y-ன் திட்ட விலக்கங்களின் பெருக்குத் தொகையால் வகுக்கின்றோம்.) ஒட்டுறவுக் கெழு r_{xy}, X, Y என்றும் இருமாறிகளுக்கு இடையே உள்ள உறவைக் காண்பதில் பெரிதும் பயன்படுகிறது. $-1 \leq \gamma_{xy} \leq 1$ என நாம் வரும் பகுதிகளில் நிறுவுவோம்.

X, Y என்ற இரு சமவாய்ப்பு மாறிகளுக்கான கூட்டுப் பரவல் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது.

$Y \backslash X$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{18}$	0	0	$\frac{1}{18}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	0	0	$\frac{1}{18}$	0
4	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	0	0	0	0
6	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{18}$	0	$\frac{1}{36}$	0

(i) $E(X+Y)$, (ii) $E(XY)$, (iii) $V(X)$ (iv) $V(Y$
(v) $cov(XY)$ இவற்றைக் காண்.

(i) $$E(X+Y) = \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{3}{18}$$

$$+ \frac{5}{18} + \frac{7}{18} + \frac{5}{18} + \frac{7}{18} + \frac{9}{18} + \frac{8}{6} + \frac{6}{36}$$

$$+ \frac{8}{18} + \frac{9}{18} + \frac{11}{36} + \frac{7}{12} + \frac{8}{18} + \frac{10}{36}$$

$$= \frac{54}{36} + \frac{61}{18} + \frac{23}{12} = \frac{54+122+69}{36} = \frac{245}{36}$$

(ii) $E(XY) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{2}{18}$

$+ \frac{6}{18} + \frac{10}{18} + \frac{6}{18} + \frac{12}{18} + \frac{18}{18} + \frac{16}{6} + \frac{5}{36}$

$+ \frac{15}{18} + \frac{20}{18} + \frac{30}{36} + \frac{6}{12} + \frac{12}{18} + \frac{24}{36}$

$= \frac{80}{36} + \frac{101}{18} + \frac{38}{12} = \frac{80 + 202 + 114}{36}$

$= \frac{396}{36} = 11$

(iii) $E(X) = 1\left(\frac{6}{36}\right) + 2\left(\frac{3}{18}\right) + 3\left(\frac{3}{18}\right)$

$+ 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{6}{36}\right) + 6\left(\frac{6}{36}\right)$

$= \frac{6 + 12 + 18 + 24 + 30 + 36}{36} = \frac{128}{36} = \frac{7}{2}$

$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{6}{36} + 4 \cdot \frac{3}{18} + 9 \cdot \frac{3}{18} + 16 \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{6}{36}$

$+ 36 \cdot \frac{6}{36}$

$= \frac{1}{36}[6 + 24 + 54 + 96 + 150 + 216]$

$= \frac{546}{36} = \frac{91}{6}$

$V(X) = E(X^2) = [E(X)]^2$

$= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182 - 147}{12} = \frac{35}{12}$

(iv) $E(Y) = 1 \cdot \frac{7}{36} + 2 \cdot \frac{5}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{12}{36} + 5 \cdot \frac{3}{36}$

$+ 6 \cdot \frac{4}{3}$

$$= (7 + 10 + 15 + 48 + 15 + 24)\ \frac{1}{36}$$

$$= \frac{119}{36}$$

$$E(Y^2) = \frac{7}{36} + 4\cdot\frac{5}{36} + 9\cdot\frac{5}{36} + 16\cdot\frac{12}{36} + 25\cdot\frac{3}{36} + 36\cdot\frac{4}{36}$$

$$= (7 + 20 + 45 + 192 + 75 + 144)\ \frac{1}{36}$$

$$= \frac{483}{36} = \frac{161}{12}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$= \frac{161}{12} - \left(\frac{119}{36}\right)^2$$

$$= \frac{161}{12} - \frac{1416}{1296}$$

$$= \frac{161}{12} - \frac{59}{54} = \frac{1449 - 118}{108} = \frac{1331}{108}$$

(v) $COV(XY) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$

$$= 11 - \frac{7}{2}\cdot\frac{119}{36} = \frac{792 - 833}{72}$$

$$= -\frac{41}{72}$$

எ. கா. கொடுக்கப்பட்ட X, Y என்ற சமவாய்ப்பு மாறிகளின் கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு, $f(x, y) = e^{-x-y}$ $(x>0, y>0)$ மற்றெங்கிலும் $f(x, y) = 0$. இதிலிருந்து x-க்கும் y-க்கும் இடையிலுள்ள ஒட்டுறவு கெழுவைக் காண்க.

$$f(x) = \int_0^\infty f(x, y)\, dy = \int_0^\infty e^{-x-y}\, dy$$

$$= e^{-x}\Big[-e^{-y}\Big]_0^{\infty} = e^{-x}. \qquad 0 < x < \infty \text{க்கு}$$

$$f(y) = e^{-y}$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} x\, e^{-x}\, dx = \Big[[x\ (-e^{-x}) + \int e^{-x}\, dx\Big]_0^{\infty}$$

$$= (-e^{-x})_0^{\infty} = 1$$

$$E(Y) = \int_0^{\infty} y\, e^{-y}\, dy = 1$$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 = e^{-x}\, dx.$$

$$= \Big[x^2(-e^{-x}) + \int e^{-x} = 2x\, dx\Big]_0^{\infty}$$

$$= \Big[2\,[x\,(-e^{-x}) + \int e^{-x}\, dx\Big]_0^{\infty}$$

$$= 2\Big[-e^{-x}\Big]_0^{\infty} = 2$$

$$E(Y^2) = \int_0^{\infty} y^2\, e^{-y}\, dy = 2$$

$$E(XY) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} xy\, f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{\infty} x\, e^{-x} \int_0^{\infty} y\, e^{-y}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} x\, e^{-x}\, dx = 1$$

$$ஒட்டுறவுக்கெழு = \frac{\text{cov}\ (x \cdot y)}{\sqrt{E\ (x^2)\ \ E\ (y)^2}}$$

$$= \frac{1 - 1 \cdot 1}{\sqrt{2 \cdot 2}} = 0$$

மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் (Central Moments):

A எனும் ஏதேனும் ஒரு மூலத்தையொட்டிய r ஆவது விலக்கப்பெருக்குத் தொகை $\mu'_r = E\ (X - A)^r$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \mu'_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - A)^r f(x)\ dx \ (X \text{ தொடர் மாறியானால்})$$

$$= \sum_{-\infty \angle x \angle \infty} (x - A)^r f(x) \quad X \text{ (தனித்த மாறியானால்)}$$

$A = (E\,(X) =$ கூட்டுச்சராசரி ஆனால்,

$\mu_r = r$ ஆவது மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

$$= E\{[X - E\,(X)^r]\}$$

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^r f(x)\ dx \ (X \text{ தொடர் மாறியானால்})$$

$$= \sum_{-\infty < x < \infty} (x - \bar{x})^r f(x)\ dx \ (X \text{ தனித்தனி மாறியானால்})$$

$$\mu_r = E\,[X - \bar{X}]^r = E\,[X^r - r\,C_1\ X^{r-1}\ \bar{X} + r\,C_2\ X^{r-2}\ (\bar{X})^2 - \dots + (-1)^r\ (\bar{X})^r]$$

$$= E\,[X^r] - r\,C_1\ \bar{X}\ E\,[X^{r-1}] + r\,C_2\ \bar{X}\ E\,[X^{r-2}] + \dots + (-1)^r\ \bar{X}^r\ E\,(1)$$

$$= \mu'_r - r\,C_1\ \bar{X}\ \mu'_{r-1} + r\,C_2\ \mu'_{r-2}\ (\bar{X})^2 \dots + (-1)^r\ (\bar{X})^r$$

தனிவிலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் (Absolute Moments):

A எனும் மூலத்தையொட்டிய r ஆவது தனி விலக்கப் பெருக்குத் தொகை $M_r = E\,|\,X - A\,|^r$ ஆகும்.

$$M_1 = E \mid X - A \mid$$
$$M_2 = E \mid X - A \mid^2$$
$$M_3 = E \mid X - A \mid^3$$ என வரையறுக்கலாம்.

$A = E(X) = \bar{X}$ ஆக இருக்கும் போது, கூட்டுச் சராசரியை யொட்டிய தனி விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் கிடைக்கின்றன. கூட்டுச் சராசரியை ஒட்டிய $M_2 = E \mid X - \bar{X} \mid^2 = E(X - \bar{X})^2 = \mu_2 = V(x)$

கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை அல்லது முகடு போன்ற ஏதேனும் ஒரு மையப் போக்களவை Cயை ஒட்டிய தனிவிலக்கப் பெருக்குத் தொகை $M_1 = E \mid X - C \mid$ என்பது சராசரி விலக்கமாகும்.

காரணீய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் (Factorial Moments):

சமவாய்ப்பு மாறி Xன் rஆவது காரணீய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

$$\mu[r] = E[X(X-1)(X-2)\dots(X-r+1)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(x-1)(x-2)\dots(x-r+1 f(x)\,dx$$

(X தொடர் மாறியானல்)

$$= \sum_{-\infty < x < \infty} x(x-1)(x-2)\dots(x-r+1 f(x)$$

(X தனித்த மாறியானல்)

எ. கா. பின்கண்ட நிகழ்தகவுப் பரவலின் சமச்சீரையும், அதன் மாறுபாட்டுக் கெழுவையும் காண்க.

$f(x) = \frac{1}{4}$, $x = 2$ என இருக்கும்போது,

$= \frac{1}{2}$, $x = 3$,, ,,

$= \frac{1}{4}$, $x = 4$,, ,,

மற்றெங்கிலும் $f(x) = 0$.

$$E(X) = \Sigma x f(x).$$

$$= 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1 = 3.$$

$$\mu^{3} = E[x - E(x)]^{3} = E[(x - 3)]^{3}$$

$$= E[x^{3} - 27 - 9X^{2} + 27X]$$

$$= E(X^{3}) - 27 - 9E(X^{2}) + 27E(x)$$

$$= 3. \frac{1}{2} - 27 - 9 \times 9\frac{1}{2} + 27 \times 3.$$

$$= 31\frac{1}{2} - 27 - \frac{171}{2} + 81$$

$$= 4\frac{1}{2} - \frac{171}{2} + 81$$

$$= \frac{9 - 171 + 162}{2} = 0.$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\mu_2}$$

$$\mu_2 = E[X - E(X)]^{2}$$

$$= E[X^{2} + 9 - 2 \times {}^{3}]$$

$$= E(X^{2}) + 9 - 6E(X)$$

$$= \frac{19}{2} + 9 - 6 \cdot 3$$

$$= \frac{19}{2} + 9 - 18 = \frac{19}{2} - 9 = \frac{1}{2}$$

$$\sigma^{2} = \frac{1}{2}, \quad \sigma^{3} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\mu_3}{\sigma_3} = \frac{0}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{8}} = \frac{0}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{0}{4\sqrt{3}} = 0.$$

எனவே பரவல் முற்றிலும் சமச்சீருடையது.

$$\text{மாறுபாட்டுக்கெழு} = \frac{\text{திட்ட விலக்கம்}}{\text{சராசரி}} = \frac{\sigma}{E(\bar{X})}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{3} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

எ.கா. பின்வரும் பரவலுக்கான (i) இடைநிலை (ii) 2-வது பத்துமானம் (iii) புவியீர்ப்பு மையம் $E(x)$ (iv) திட்டவிலக்கம் இவற்றைக் காண்க.

$$f(x) = \frac{1}{\theta}, \text{ இங்கு } 0 < x < \theta.$$

$$= 0 \text{ மற்றெங்கிலும்}$$

தீர்வு

$$P(X \leq M) = \int_{-\infty}^{M} f(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

$$\int_{-\infty}^{M} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{M} f(x)\,dx.$$

[M, 0-க்கும் θ-விற்கும் இடையில் அமைந்து உள்ளது.]

$$= \frac{1}{2}.$$

$$= 0 + \int_{0}^{M} \frac{1}{\theta}\,dx = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{\theta} M = \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad M = \frac{\theta}{2} = d_{50}.$$

(ii) $P(x \leq d_{20}) = \cdot 2.$

$$\int_{-\infty}^{d_{20}} f(x)\,dx = \cdot 2.$$

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{d_{20}} f(x)\,dx = \cdot 2.$$

$$\int_0^{d_{20}} \frac{1}{\theta} \cdot d_{20} = \cdot 2$$

$$\frac{1}{\theta} \cdot d_{20} = \cdot 2$$

$$d_{20} = \cdot 2\theta = \frac{\theta}{5}$$

(iii) $E(x) = \int_0^{\theta} x f(x)\, dx = \int_0^{\theta} x \cdot \frac{1}{\theta}\, dx$

$$= \frac{1}{\theta}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\theta} = \frac{\theta^2}{\theta \cdot 2} = \frac{\theta}{2}.$$

(iv) $E(X^2) = \int_0^{\theta} x^2 f(x)\, dx = \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta} x^2\, dx.$

$$= \frac{1}{\theta}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\theta}$$

$$= \frac{\theta^2}{3}$$

X-ன் பரவற்படி $= E(X^2) - [E(x)]^2$

$$= \frac{\theta^2}{3} - \frac{\theta^2}{4}$$

$$= \frac{4\theta^2 - 3\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{12}$$

X-ன் திட்ட விலக்கம் $= \sqrt{\frac{\theta^2}{12}} = \frac{\theta}{2\sqrt{3}}$

விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் : X, Y என்பவை இரு சமவாய்ப்பு மாறிகளானுல், ஆதியை மூலமாகக் கொண்ட m ஆவது n ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

$$\mu'_{mn} = E(X^m Y^n)$$

$$= \sum_x \sum_y x^m y^n f(x, y)\ [X, Y \text{ தனித்த மாறிகள்}]$$

X, Y தொடர் மாறிகளானுல்

$$\mu'_{mn} = \int_x \int_y x^m y^n f(x, y)\, dx\, dy$$

X, Y-ன் m ஆவது, n ஆவது மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை $\mu_{mn} = E\{[X - \bar{X}]^n [y - \bar{Y}]\}^n$

$$= \sum_x \sum_y \bar{X} (x - \bar{x})^m \; (y - \bar{y})^n \; f \; (x, y)$$

[X,Y தனித்த மாறிகள்]

X, Y தொடர் மாறிகளானுல் $\int_x \int_y (x - \bar{x})^n (y - \bar{y})\, dx dy$

எ.கா. (அ) கீழ்க்கண்ட பரவலுக்கு μ_{20}', μ_{02}', μ_{11}', μ_{12}' இவற்றைக்காண்க.

$$f(-1, 0) = \frac{1}{8},\ (-1, 1) = \frac{2}{8},\ f(1, 0) = \frac{3}{8},\ f(1, 1) = \frac{2}{8}$$

மற்றெங்கிலும் $f(x,y) = 0$.

$$\mu'_{20} = E(x^2 y^0) = E(x^2)$$

$$= \sum_y \sum_x x^2 f(x, y) = \sum_x x^2 [f(x, 0) + f(x, 1)]$$

$$= (-1)^2 [f(-1, 0) + f(-1, 1)] + (1)^2 [f(1, 0) + f(1, 1)]$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{8}{8} = 1.$$

$$\mu'_{02} = E(x^0 y^2) = E(y^2)$$

$$= \sum_x \sum_y y^2 f(x, y) = \sum_y y^2 [f(-1, y) + f(1, y)]$$

$$= (0)^2 [f(-1, 0) + f(1, 0)] + 1^2 [f(-1, 1) + f(1, 1)]$$

$$= \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

$$\mu'_{11} = E(xy) = \sum_x \sum_y xy\, f(x, y)$$

$$= \sum_x x\,[0\, f(x, 0) + 1\, f(x, 1)]$$

$$= \sum_x [x \times 0\, f(x, 0) + x \times 1\, f(x, 1)]$$

$$= \sum_x x\, f(x, 1) = -1\, f(-1, 1) + 1\, f(1, 1).$$

$$= -\frac{2}{8} + \frac{2}{8} = 0.$$

$$\mu'_{12} = E(xy^2) = \sum_x \sum_y xy^2 f(x, y)$$

$$= \sum_x x\, 0^2 f(x, 0) + x \cdot 1^2 f(x, 1)$$

$$= \sum x\, f(x, 1) = -1\, f(-1, 1) + 1\, f(1, 1)$$

$$= -\frac{2}{8} + \frac{2}{8} = 0.$$

எ.கா. பின்வரும் பரவலுக்கு μ'_{20}, μ'_{02}, μ'_{11}, μ'_{12}, இவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

$$f(x, y) = 3x\, e^{-3\frac{y}{2}} \text{ இங்கு } 0 < x < 2;\ y > 0$$

மற்றெங்கிலும் $f(x, y) = 0$.

$$\mu'_{20} = \int_x \int_y x^2 y^0 f(x, y)\, dx\, dy.$$

$$= \int_0^2 \int_0^\infty x^2 \cdot 3x\, e^{-3\frac{y}{2}}\, dx\, dy.$$

$$= \int_0^2 x^2 \cdot 3x \left[-\frac{2}{3} e^{-\frac{3y}{2}}\right]_0^\infty dx$$

$$= \int_0^2 3\, x^3 \left[\frac{2}{3}\right] dx$$

$$= 2\int_0^2 x^3\,dx = 2\left(\frac{x^4}{4}\right)_0^2 = 8 - 0 = 8.$$

$$\mu'_{12} = \int_0^2 \int_0^\infty xy^2 f(x, y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \int_0^\infty xy^2\, 3x\, e^{-3\frac{y}{2}}\,dx.\,dy.$$

$$= \int_0^2 3x^2 \left[y^2\left(-\frac{2}{3} e^{-3\frac{y}{2}}\right) \right.$$

$$\left. - \int 2y\left(-\frac{2}{3} e^{-\frac{3}{2}y}\right) dy \right]_0^\infty dx.$$

$$= \int_0^2 3x^2.\frac{4}{3} \int y\, e^{-3\frac{y}{2}}\,dy\,.\,dx\,.$$

$$= \int_0^2 4x^2.\,\frac{2}{3}\left[e^{-\frac{3y}{2}}\, y\left(-\frac{2}{3}\right) \right.$$

$$\left. + \int \frac{2}{3} e^{-\frac{3y}{2}}\,dy \right]_0^\infty dx.$$

$$= \int_0^2 4x^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\left[-\frac{2}{3} e^{-3\frac{y}{2}}\right]_0^\infty dx.$$

$$= \int_0^2 4x^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)dx = \frac{16}{9}\int_0^2 x^2\,dx$$

$$= \frac{16}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \frac{16}{9} \times \frac{8}{3} = \frac{128}{27}$$

$$f(x, y) = 3x\, e^{-\frac{3y}{2}}.$$

$$\mu_{02} = \int_0^2 \int_0^\infty y^2\, dx\, dy\, f(x, y)$$

$$= \int_0^\infty y^2\, e^{-\frac{3y}{2}} \cdot 3 \int_0^2 x\, dx\, dy$$

$$= \int_0^\infty 3y^2\, e^{-\frac{3y}{2}} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 dy$$

$$= \int_0^\infty 3y^2\, e^{-\frac{3y}{2}} \cdot 2\, dy$$

$$= 6\left[y^2\, e^{-\frac{3y}{2}}\left(-\frac{2}{3}\right)\right.$$

$$\left. + \int \frac{2}{3} e^{-\frac{3y}{2}}\, 2y\, dy\right]_0^\infty$$

$$= 8\int y \cdot e^{-\frac{3y}{2}}\, dy = 8\left[y \cdot e^{-\frac{3y}{2}}\left(-\frac{2}{3}\right)\right.$$

$$\left. + \int \frac{2}{3} e^{-\frac{3y}{2}}\, dy\right]$$

$$= \frac{16}{3}\left[e^{-\frac{3y}{2}}\left(\frac{2}{3}\right)\right]_0^\infty = \frac{32}{9}$$

$$\mu_{11} = \int_0^2 \int_0^\infty xy\, 3x\, e^{-\frac{3y}{2}}\, dx\, dy.$$

$$= \int_0^2 3x^2 \int_0^\infty y\, e^{-\frac{3y}{2}}\, dy\, dx.$$

$$= \int_0^2 3x^2 \Big[e^{-\frac{3y}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)$$

$$+ \int \frac{2}{3} e^{-\frac{3y}{2}}\, dy \Big]_0^\infty dx.$$

$$= \int_0^2 2x^2 \left[y\, e^{-\frac{3y}{2}} \left(-\frac{2}{3}\right) \right]_0^\infty dx$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^2 x^2\, dx.$$

$$= 4\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{9}.$$

எ.கா. *A*யும், *B*யும் ரூ. 44ஐப் பரிசுப் பொருளாக வைத்து ஒரு பகடையை வீசுகிறார்கள். முதலில் புள்ளி முகம் '6' பெறுவோருக்கு வெற்றியெனக் கொள்ளப்படுகிறது. முதலில் பகடையை வீசுவது *A* யானால், அவர்களது தனித்தனி எதிர் பார்க்கும் மதிப்புகளைக் காண்க.

ஒரு வீச்சில் புள்ளி முகம் '6' கிடைப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$. இதுவே வெற்றியின் நிகழ்தகவாகும்.

1, 2, 3, 4, 5 எனும் மற்ற புள்ளி முகங்கள் கிடைத்தால் வெற்றி கிட்டுவதில்லை. எனவே தோல்வியின் நிகழ்தகவு $= \frac{5}{6}$

A வெற்றி பெற வேண்டுமாயின் கீழ்க்காணும் முடிவற்ற வகைகளில் நடைபெறலாம்.

(1) முதல் வீச்சிலேயே *A*-யின் வெற்றி

அல்லது (2) முதல் வீச்சில் *A*-யின் தோல்வி, இரண்டாவதில் *B*-யின் தோல்வி, மூன்றுவது வீச்சில் *A*-யின் வெற்றி

அல்லது (3) *A* தோல்வி, *B* தோல்வி, *A* தோல்வி, *B* தோல்வி, *A* வெற்றி என ஐந்தாவது வீச்சில் ஏற்படலாம்.

இவ்வாறே முடிவற்ற தொடர் நிகழ்ச்சிகளாக நடக்கக் கூடிய யாவும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை உடையவையாதலால் *A*-யின் வெற்றியின் நிகழ்தகவு இப்பல்வேறு நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாகும்,

$$\therefore \; A\text{-யின் வெற்றிக்கான வாய்ப்பு} = \frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \cdots\cdots\infty$$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{6}{11}$$

இது போன்றே *B*யின் வெற்றிக்கான வாய்ப்பு $\frac{5}{11}$ ஆகும். [*A*, *B* இருவரில் ஒருவர் வெற்றி பெறுவது உறுதியான நிகழ்ச்சியாதலால், *B*யின் வெற்றியின் நிகழ்தகவு $= 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$ எனவும் கணக்கிடலாம்]. வெற்றி பெற்றுல் பரிசு ரூ. 44 தோல்வியடைந்தால், மற்றவருக்கு எதையும் தருவதோ அல்லது பெறுவதோ கிடையாது. எனவே *A*, $\frac{6}{11}$ ஐ நிகழ்தகவாகக் கொண்டு ரூ. 44 ஐயும், $\frac{5}{11}$ ஐ நிகழ்தகவாகக் கொண்டு ரூ. 0ம் பெறுவதால், எனவே *A*யின் எதிர் பார்த்தல்

$$= 44 \times \frac{6}{11} + 0 \times \frac{5}{11} = \text{ரூ. } 24$$

B, $\frac{5}{11}$ நிகழ்தகவாகக் கொண்டு ரூ. 44 ஐயும், $\frac{6}{11}$ ஐ நிகழ்தகவாகக் கொண்டு ரூ. 0ம் பெறுவதால்,

Eயின் எதிர் பார்த்தல் $= 44 \times \frac{5}{11} + 0 \times \frac{6}{11} =$ ரூ. 20.

எ. கா. (அ) தலைகிடைக்கும் வரை ஒரு நாணயம் வீசப் படுகிறது. வீச்சுகளின் எதிர் பார்க்கப்படும் மதிப்பென்ன?

(ஆ) புள்ளி முகம் '4' கிடைக்கும் வரை ஒரு பகடை வீசப் படுகிறது. வீச்சுகளின் எதிர் பார்க்கப்படும் மதிப்பென்ன?

ஒரு குறிப்பிட்ட வீச்சில் வெற்றியின் நிகழ்தகவு p எனக் கொள்வோம்.

முதல் வெற்றி முதல், இரண்டாவது, மூன்றாவது... வீச்சுகளில் கிடைப்பதற்குரிய நிகழ்தகவுகள் முறையே p, qp, q^2p ... என்றாகும்.

இங்கு $q =$ தோல்வியின் நிகழ்தகவு $= 1 - p$

வீச்சு X	1	2	3	4 ...
வெற்றியின் நிகழ்தகவு	p	qp	q^2p	q^3p ...

$$\therefore \quad E[X] = 1 \cdot p + 2 \cdot qp + 3 \cdot q^2 p + 4 q^3 p + \ldots$$

$$= p(1-q)^{-2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

(அ) இங்கு $p =$ தலை கிடைப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2}$

எனவே வீச்சுகளின் எதிர் பார்க்கப்படும் மதிப்பு,

$$E[X] = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

(ஆ) $p =$ ஒரு பகடையை வீசும்போது புள்ளி முகம் '4' கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{6}$

எனவே பகடையின் வீச்சுகளின் எதிர் பார்க்கப்படும் மதிப்பு

$$= \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$$

எ.கா. (அ) ஒரு பகடையை வீசும்போது கிடைக்கக் கூடிய எண்ணின் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பென்ன ?

(ஆ) ஒருதலைச் சார்பற்ற இரு பகடைகள் வீசப்படுகின்றன. அவற்றில் காணப்படுகின்ற எண்களின் கூட்டுத் தொகையின் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

(அ) ஒரு பகடையை வீசும்போது கிடைக்கக் கூடிய எண்ணை X எனக் கொள்வோம் பகடையின் ஆறு புள்ளிமுகங்கள் 1, 2, 3, 4, 5, 6 இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று சமவாய்ப்புடன் கிடைக்குமாதலால், X எனும் சம வாய்ப்பு மாறி 1, 2, 3, 4, 5, 6 எனும் மதிப்புகளை ஒவ்வொன்றிற்கும் நிகழ்தகவை $\frac{1}{6}$ ஆகக் கொண்டு ஏற்கிறது.

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \cdots + \frac{1}{6} \cdot 6.$$

$$= \frac{1}{6}[1 + 2 + 3 + \quad + 6]$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{6 \times 7}{2} = \frac{7}{2}.$$

(ஆ) இரு ஒருதலைச் சார்பற்ற பகடைகளை வீசும்போது பெறக்கூடிய எண்களின் கூட்டுத்தொகை X ஆனால், அதன் நிகழ்தகவுப் பட்டியல் கீழ்க்காணுமாறு அமையும்.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
நிகழ்தகவு	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$.

Xன் மதிப்பு 5 ஆக இருக்க, பகடைகளில் கிடைக்கும் எண்கள் (1, 4), (4, 1), (2, 3) (3, 2) ஆக இருக்கலாம். சாதகமான நிகழ்ச்சிகள் நான்காகவும், மொத்த நிகழ்ச்சிகள் முப்பத்தாறுகவும் இருப்பதால்,

$$P(X = 5) = \frac{4}{36}.$$

இதுபோன்றே மற்ற நிகழ்தகவுகளையும் கணக்கிடலாம்.

$$E(X) = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + 4\cdot\frac{3}{36} + 5\cdot\frac{4}{36} + 6\cdot\frac{5}{36}$$

$$+ 7\cdot\frac{6}{36} + 8\times\frac{5}{36} + 9\cdot\frac{4}{36} + 10\cdot\frac{3}{36} + 11\cdot\frac{2}{36} + 12\cdot\frac{1}{36}$$

$$= \frac{1}{36}[2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12]$$

$$= \frac{1}{36}\times 252 = 7$$

எ.கா. ஒரு நாணயத்தை வீசும் போது, ஒருவர், தலை கிடைத்தால் ஒரு ரூபாயைப் பெறுகிறார். பூ விழுந்தால் ஒரு ரூபாயை இழக்கிறார். ஒரு முறை நாணயத்தை வீசியவுடன் வெற்றி கிடைத்தால், ஆட்டத்திலிருந்து விலகிக் கொள்கிறார். ஆனால் முதல் முறை தோல்வியடைந்தால், இரண்டாவது முறையும் நாணயத்தை வீசி முயற்சி செய்கிறார். அவர் பெறக்கூடிய இலாபத்தின் கணக்கியல் எதிர் பார்த்தல் என்ன?

தீர்வு

முதல் தடவை நாணயத்தை வீசும்போதே தலை கிடைத்தால் பெறும் தொகை ரூ. 1.

முதல் தடவை பூ விழுந்து, இரண்டாம் முயற்சியில் தலை விழுந்தால் இழப்பு ரூ. 1.-ம், இலாபம் ரூ. 1.-ம் ஆகிறது.

இரு முயற்சிகளிலுமே பூ விழுந்தால், அவரது இழப்பு 2 ரூ. எனவே பெறக்கூடிய லாபம் X ஆனால், அது

1, 0, — 2 எனும் மதிப்புகளை, முறையே $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ எனும் நிகழ்தகவுகளுடன் ஏற்கிறது.

$$\therefore \quad E(X) = 1\times\frac{1}{2} + 0\times\frac{1}{4} + (-2)\times\frac{1}{4} = 0$$

எ.கா. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X, $x_k = \dfrac{(-1)^{k}, k}{k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ எனும் மதிப்புகளை, நிகழ்தகவுகள் $p_k = 2^{-k}$ கொண்டு ஏற்கிறது. $E(X)$ காண்க.

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{k} \cdot 2^{-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \cdots$$

$$-\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4} \cdots\cdots\right]=-\log 2.$$

எ.கா. ஒரு சோதனையில் வெற்றியின் நிகழ்தகவு p ஒரு மாறிலி. தொடர்ந்து வரும் சார்பற்ற சோதனைகளின் எண்ணிக்கை முடிவிலியாக இருக்கும்போது, முதல் வெற்றிக்கு முன்பு ஏற்படக் கூடிய தோல்விகளின் எண்ணிக்கையின் எதிர் பார்த்தலைக் காண்க.

தீர்வு :

முதல் வெற்றிக்கு முன்பு ஏற்படக்கூடிய தோல்விகளின் எண்ணிக்கையை x எனக் கொள்வோம்.

x, 0, 1, 2, 3 ...... எனும் மதிப்புகளை முறையே p, qp, q^2p, q^3p, ... எனும் நிகழ்தகவுகளுடன் பெறுகிறது. இங்கு தோல்வியின் நிகழ்தகவு $q=1-p$.

$$\therefore \quad E(x)=0 \cdot p+1 \cdot qp+2 \cdot q^2 p+3 \cdot q^3 p+\cdots\cdots$$

$$=pq(1+2q+3q^2+\cdots\cdots)$$

$$=pq(1-q)^{-2}=\frac{pq}{p^2}=\frac{q}{p}.$$

எ.கா. X கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது. $E(X)$ காண்க.

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x \leq 1 \\ \dfrac{3-x}{4} & 1<x \leq 3 \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்.} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \; dx$$

$$+ \int_{0}^{1} x \cdot x \, dx + \int_{1}^{3} x \, \frac{3-x}{4} \, dx + \int_{3}^{\infty} x \cdot 0 \cdot dx.$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^1 + \frac{1}{4}\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)_1^3 = \frac{7}{6}.$$

எ.கா. ஒரு பெட்டியில் 'a' வெள்ளை பந்துகளும் 'b' சிவப்பு பந்துகளும் உள்ளன. c பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன எடுக்கப் படுகின்ற வெள்ளை பந்துகளின் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பென்ன ?

தீர்வு :

பந்து k வது முறை எடுக்கப்படுவதோடு X_k எனும் மாறியைப் பொருத்திப் பின்வருமாறு வரையறுப்போம்.

$X_k = 1$, எடுக்கப்படும் k-வது பந்து வெள்ளையாக இருப்பின்.

$X_k = 0$, k-வது பந்தின் நிறம் சிவப்பாக இருப்பின். எனவே தேர்ந்தெடுக்கப்படும் C பந்துகளில் காணப்படும் வெள்ளை பந்துகளின் எண்ணிக்கை S ஆனால்,

$$S = X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_c$$

$$= \sum_{k=1}^{c} X_k.$$

$E(S) = E(X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_c) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots\cdots + E(X_c)$.

$P(X_k = 1) =$ வெள்ளை பந்து தேர்ந்தெடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \dfrac{a}{a+b}$.

$P(X_k = 0) =$ சிவப்புப் பந்து எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \dfrac{b}{a+b}$.

$$E(X_k) = 1 .\ P(X_k = 1) + 0 .\ P(X_k = 0)$$

$$= 1 .\ \frac{a}{a+b} + 0 .\ \frac{b}{a+b} = \frac{a}{a+b} .$$

$$E(S) = \sum_{k=1}^{c} E(X_k) = \sum_{k=1}^{c} \frac{a}{a+b} = \frac{a\ c}{a+b}$$

எ.கா. ஒரு பெட்டியில் 2^n சீட்டுகள் உள்ளன. இவற்றில் $n\ C_k$ சீட்டுகளில் காணப்படும் எண் k. $(k = 0, 1, 2, \ldots\ldots n)$. m சீட்டுகள் எடுக்கப்படுகின்றன. சீட்டுகளில் காணப்படும் எண்களின் கூட்டுத் தொகையின் எதிர்பார்த்தல் காண்க.

X_k $(k = 1, 2, \ldots\ldots m)$ என்பது k-வது சீட்டில் காணப்படும் எண்ணைக் குறிக்கும் மாறி.

எடுக்கப்படும் சீட்டுகளிலுள்ள எண்களின் கூட்டுத்தொகை,

$$S = X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_m = \sum_{k=1}^{m} X_k$$

$$E(S) = \sum_{k=1}^{m} E(X_k$$

சமவாய்ப்பு மாறி X_k, $0, 1, 2, \ldots\ n$ எனும் மதிப்புகளில் ஏதேனுமொன்றை, முறையே $\frac{n\ C_0}{2^n}, \frac{n\ C}{2^n}, \ldots\ldots \frac{n\ C_n}{2^n}$ எனும் நிகழ்தகவுகளுடன் பெறுகிறது.

$$\therefore\ E(X_k) = \left[0 .\ \frac{n\ C_0}{2} + 1 \frac{n\ C_1}{2} + 2 \frac{n\ C_2}{2^n} + 3 \frac{n\ C_3}{2^n}\right.$$

$$\left. + n \frac{n\ C_n}{2^n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 .\ n\ C_1 + \frac{2\ n\ (n - 1)}{1 \cdot 2}\right.$$

$$\left. + \frac{3\ n\ (n-1)\ (n-2)}{1.2.3} + \ldots\ldots + n \cdot 1\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[1+n-1\,C_1+n-1\,C_2+\dots+n-1\,C_{n-1}\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[1+1\right]^{n-1} = \frac{n}{2}.$$

$$\therefore\ E(S) = \sum_{k=1}^{m} E(X_k) = \frac{mn}{2}.$$

எ.கா. ஒருவர் தன்னிடமுள்ள n சாவிகளைத் தனித்தனியாக, சரிசமவாய்ப்பு முறையில் (at random) பயன்படுத்தி, தனது கதவைத் திறக்க விரும்புகிறார்.

(1) மீண்டும் தேர்ந்தெடுக்கப்படாத வகையில், கதவைத் திறக்க இயலாத சாவிகளை அவ்வப்போது நீக்கிவிட்டால்,

(2) நீக்காமல் வைத்திருந்தால், கதவைத் திறக்க எடுக்கும் முயற்சிகளின் எண்ணிக்கையின் கூட்டுச் சராசரியையும், பரவற்படியையும் காண்க.

(1) முதல் வெற்றி x ஆவது முயற்சியில் கிடைத்தால், முதல் $x-1$ முயற்சிகளில் கதவைத் திறக்க இயலவில்லை. கதவைத் திறக்க இயலாத சாவிகளை அவ்வப்போது நீக்கிவிட்டால், X $1, 2, \dots\dots n$ எனும் மதிப்புகளில் ஏதேனும் ஒன்றைப் பெறுகிறது.

முதல் முயற்சியில் வெற்றியின் நிகழ்தகவு $= \frac{1}{n}$.

இரண்டாவது முயற்சியில் வெற்றியின் நிகதகவு $= \frac{1}{n-1}$

மூன்றாவது முயற்சியில் வெற்றியின் நிகழ்தகவு $= \frac{1}{n-2}$ ..... எனுமாறு அமையும்.

எனவே இரண்டாவது முயற்சியில் முதல் வெற்றியின் நிகழ்தகவு $= \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$.

மூன்றாவது முயற்சியில் முதல் வெற்றியின் நிகழ்தகவு

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n-1}\right)\frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}$$

இவ்வாறே கணக்கிட்டுச் சென்றால்,

x ஆவது முயற்சியில் முதல் வெற்றியின்

$$\text{நிகழ்தகவு} \quad p(x) = \frac{1}{n}.$$

$$\therefore \quad E(X) = \sum_{x=1}^{n} x \cdot p(x) = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} x$$

$$= \frac{n(n+1)}{n \times 2} = \frac{n+1}{2}$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{n} x^2 \cdot p(x) = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} x^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(n+1)}{12}[4n + 2 - 3n - 3] = \frac{(n+1)(n-1)}{12}$$

$$= \frac{n^2 - 1}{12}.$$

(2) கதவைத்திறக்க இயலாத சாவிகளை அவ்வப்போது நீக்காவிட்டால், X 1, 2, 3, ... ∞ இவற்றில் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பைப் பெறுகிறது.

முதல் முயற்சியில் வெற்றியின் நிகழ்தகவு $= \frac{1}{n}$.

முதல் முயற்சியில் தோல்வியின் நிகழ்தகவு $= 1 - \frac{1}{n}$.

கையிலிருக்கும் சாவிகளின் எண்ணிக்கை குறையாது n ஆகவே இருப்பதால்,

ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் வெற்றி, தோல்வியின் நிகழ்தகவுகள் மாறுமல் இருக்கும்.

எனவே x ஆவது முயற்சியில் முதல் வெற்றியின் நிகழ்தகவு $= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{x-1} \cdot \frac{1}{n}$.

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x\, p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{x-1} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{x-1}$$

$$E(X) = \frac{1}{n}\left[1 + 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 3\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \dots\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]^{-2} = n.$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{x-1} \cdot \frac{1}{n}.$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{x-1} = \frac{1}{n}\left[1 + 2^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right.$$

$$\left. + 3^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \dots\dots\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\left\{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right\} \right] \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right]^{-2}$$

$$= (2n - 1)\, n$$

$$\therefore \quad V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = (2n-1)\,n - n^2$$

$$= n^2 - n = n\,(n-1).$$

எ.கா. ஒரு பரிசுச்சீட்டுக் குலுக்கலில் 1 லிருந்து n வரை எண்களுள்ள சீட்டுகளில், m சீட்டுகள் எடுக்கப்படுகின்றன. எடுக்கப்பட்டுள்ள சீட்டுகளில் காணும் எண்களின் கூட்டுத் தொகையின் எதிர்பார்த்தலையும், பரவற்படியையும் காண்க.

தீர்வு :

i ஆவது சீட்டில் காணப்படும் எண் X_i ஆக இருக்கட்டும். m சீட்டுகளில் காணப்படும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை

$$S = X_1 + X_2 + \dots\dots X_m = \sum_{i=1}^{m} X_i$$

$$\therefore \quad E(S) = \sum_{i=1}^{m} E(X_i)$$

ஒவ்வொரு X_i-ம் 1, 2, 3, …… n எனும் மதிப்புகளை சம நிகழ்தகவு $\frac{1}{n}$ ஆகக் கொண்டு பெறுகிறது.

$$E(X_i) = \frac{1}{n}\cdot 1 + \frac{1}{n}\cdot 2 + \dots\dots + \frac{1}{n}\cdot n = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

$$\therefore \; E(S) = \sum_{i=1}^{m} \frac{n+1}{2} = \frac{m(n+1)}{2}.$$

$$V(S) = V(x_1 + x_2 + \dots\dots + x_m)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} V(X_i) + 2 \sum_{i} \sum_{j} \operatorname{cov}(X_i, X_j),$$

$$E[X_i^2] = \frac{1}{n}[1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6 \times n}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$V[X] = E[X_i^2] - \{E[X_i]\}^2$$

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$

$$\text{cov}(X_i X_j) = E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j]$$

$X_i X_j$ $n(n-1)$ மதிப்புகளைப் பெறமுடியும் என்பதைக் கீழ்க்காணும் பட்டியல் மூலம் அறியலாம்.

X_i	X_j
1	2, 3, ... $n-1$
2	1, 3, ... n
3	1, 2, ... n
⋮	
n	1, 2, ... $n-1$

$$\therefore \quad P[X_i = u,\ X_j = v] = \frac{1}{n(n-1)}\ u \neq v$$

$$E[X_i X_j] = \frac{1}{n(n-1)}\left[\begin{array}{c} 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + \ldots + 1\cdot n \\ + 2\cdot 1 + 2\cdot 3 + \ldots + 2\cdot n \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + n\cdot 1 + n\cdot 2 + \ldots + n(n-1) \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{n(n-1)}\left[\begin{array}{c} 1(1+2+3+\ldots+n) - 1^2 \\ 2(1+2+\ldots+n) - 2^2 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + n(1+2+\ldots+\overline{n-1}+n) - n^2 \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{n(n-1)} [(1 + 2 + \dots\dots + n)^2 - (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)]$$

$$= \frac{1}{n(n-1)} \left[\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right]$$

$$= \frac{(n+1)(3n^2 - n - 2)}{12(n-1)}$$

$$\text{Cov}(X_i X_j) = \frac{(n+1)(3n^2 - n - 2)}{12(n-1)} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(n+1)}{12(n-1)} [3n^2 - n - 2 - 3(n^2 - 1)]$$

$$= -\frac{(n+1)}{12}.$$

$$\therefore \quad V(S) = \sum_{i=j}^{m} \left(\frac{n^2 - 1}{12}\right) + 2 \sum_{i<j}\sum \left[\frac{-(n+1)}{12}\right]$$

$$= \frac{m(n^2 - 1)}{12} + \frac{2\, m(m-1)}{2!} \left[\frac{(-n+1)}{12}\right]$$

(∵ $\text{Cov}(X_i X_j)$யில் mC_2 உறுப்புக்கள் உள்ளன)

$$V(S) = \frac{m(n+1)}{12} [(n-1) - (m-1)]$$

$$= \frac{m(n+1)(n-m)}{12}.$$

பயிற்சி

1. (அ) ஒரு "ராண்டம் மாறியின்" எதிர்பார்க்கப்படுவதின் மதிப்பு" E (x)— இதை வரைந்து பொருள் கூறுக. x, y இவைகள் இரண்டு ராண்டம் மாறிகளாக இருந்தின், கீழ்க்கண்ட சமன் பாடுகளை நிறுவுக.

(i) $E(x+y) = E(x) + E(y)$

(ii) $E(xy) = E(x)\,E(y)$ x, y இரண்டும் சார்பற்ற தன்மை உடையவை.

(ஆ) எல்லையற்ற தொடருள்ள ஒரு சார்பற்ற சோதனையில் வெற்றியின் நிகழ்தகவு 'p' ஆனால், முதல் வெற்றிக்கு முன் ஏற்படும் தோல்விகளின் எண்ணிக்கைகளின் எதிர்பார்க்கப் படுவதின் மதிப்பு என்ன? [செ. ப. 1973]

2. A, B இருவர் ஒரு பகடையை, 40 ரூபாயைப் பரிசுப் பொருளாக வைத்து வீசுகிறார்கள். முதலில் புள்ளிமுகம் '6' பெறு பவர் வெற்றி பெறுகிறார். முதலில் A பகடையை வீசினால், Aயின் எதிர்பார்த்தல் என்ன? Bயின் எதிர்பார்த்தலென்ன?

[I A S 1963]

3. ஒரு வியாபாரி .6ஐ நிகழ்தகவாகக் கொண்டு 300 ரூபாயை இலாபமாகப் பெறலாம். அல்லது ·4ஐ நிகழ்தகவாகக் கொண்டு ரூ. 100ஐ இழக்கலாம். அவரது எதிர்பார்த்தலென்ன?

[விடை : ரூ 140]

4. 1, 2, 3, 4, 5 நபர்கள் இடங்கிய குழுக்களாய் ஒரு கலைக் கண்காட்சிக்கு வருகை தருவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே .29, 50, ·20, .07, .03 ஆகும். ஒவ்வொரு குழுவிலும் எதிர்பார்க்கப் படும் நபர்களின் எண்ணிக்கை என்ன? [விடை : 2.23]

5. கீழ்க்காணும் பட்டியலுக்கு,

$E(X)$, $E(X^2)$, $E(X-\bar{X})^2$ காண்க.

X	8	12	16	20	24
$P(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

[விடை: $E(X) = 16$; $E(X^2) = 276$. $E(X-\bar{X})^2 = 20$]

6. கீழ்க்காண்பனவற்றை நிறுவுக.

(i) $E(a^n) = a^n$ [a மாறிலி]

(ii) $E[a' g(X)] = a^n E\{g(X)\}$

(iii) $E[a_1 X_1 + a_2 X_2] = a_1 E(X_1) + a_2 E[X_2]$.

7. X. Y என்பவை இரு பகடைகளை வீசும்போது கிடைக்கும் புள்ளி முகங்கள்.

X, $X-Y$, $2X+Y$ன் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்புகள் யாவை ?

8. ஒரு நாணயம் தொடர்ந்து 6 முறைகள் வீசப்படுகிறது. முதல் இரண்டாவது, மூன்றுவது, நான்காவது, ஐந்தாவது, ஆறுவது முயற்சிகளில் முறையே 1, 2, 3, 4, 5, 6 ரூபாய்கள் பெறுகிறுன். பூ கிடைத்தால் அதே தொகையைத் திருப்பித் தருகிறுன். இலாபத்தின் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பையும், பரவற்படியையும் காண்க. (செ.ப. '64, 68)

9. X ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியானுல்,

(1) $|E(X)| \leq E|X|$)

(2) $E[(X-C)^2] = V(X) + [E(X)-C]^2$, C ஒரு மாறிலி.

10. $f(x) = \frac{3}{(x+1)^4}$ $0 < x < \infty$ ஆனுல், xன் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க.

11. (அ) $P(x) = \frac{6}{\pi^2 x^2}$ ($x = 1, 2, 3, \ldots$ என்ற நிகழ்தகவுச் சார்பைக் கொண்ட சமவாய்ப்பு மாறிக்குக் கணக்கியல் எதிர் பார்த்தலை வரையறுக்க இயலாது என நிறுவுக.

(ஆ) $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ $-\infty < x < \infty$

என்ற நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைக் கொண்ட கோஷியின் பரவலுக்கு (Cauchy's distribution) $E(X)$ வரையறுக்க இயலாது என நிறுவுக.

12. ஒரு பாத்திரத்தில் 1லிருந்து, n வரை குறிப்பிடப் பட்டுள்ள n சீட்டுகள் உள்ளன. ஒரு தடவையில் 2 சீட்டுகள்

எடுக்கப்படுகின்றன. சீட்டுகளில் காணப்படும் எண்களின் பெருக்குத் தொகையின் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பென்ன ?

13. X, Y என்ற தொடர் சமவாய்ப்பு மாறிகளின் கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு (1) $f(x, y) = e^{-x-y}$ $x > 0, y > 0$

$= 0$ மற்றெங்கிலும்

(2) $f(x, y) = x + y$ $0 < x < 1$

$0 < y < 1$

$= 0$ மற்றெங்கிலும்,

எனில் rxy காண்க.

14. X, Y தனித்த சமவாய்ப்பு மாறிகள், அவற்றின் கூட்டு நிகழ்தகவுச் சார்பு

(i) $p(x, y) = \frac{1}{4}$ [$x, y = (-3, -5)(-1, -1)(1, 1)$

$(3, 4)$ என்ற போது]

$= 0$, மற்றெங்கிலும்

(ii) $p(x, y) = \frac{1}{3}$ $(x, y) = (0, 0)(-1, 0)(0, 1)$

$= 0$, மற்றெங்கிலும் எனில் r_{xy} காண்க.

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, (x = 0, 1, 2, \ldots \infty,$$

பண்பளவை $\lambda > 0$]

$= 0$ மற்றெங்கிலும்

என்பதை நிகழ்தகவுச் சார்பாகக் கொண்ட பரவலின் முதல் இரண்டாவது காரணீய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் கணக்கிடுக.

9. விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

(MOMENT GENERATING FUNCTION)

x என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியானல்

$M(\theta) = E(e^{\theta x})$ என்பது x-ன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு எனப்படும். இங்கு θ ஏதேனும் ஒரு மெய் எண் மாறிலி.

x தனித்த மாறியானல்

$$M(\theta) = \sum_x e^{\theta x} f(x)$$

x தொடர் மாறி ஆனல்

$$M(\theta) = \int e^{\theta x} f(x)\, dx$$

இங்கு x மாறி வரையறுக்கப்பட்ட இடைவெளி முழுவதும் தொகை காணப்படுகிறது.

$f(x)$, x-ன் நிகழ்தகவுச் சார்பாகும்.

$$M(\theta) = E(e^{\theta x})$$

$$= E\left(1 + \frac{\theta x}{1!} + \frac{(\theta x)^2}{2!} + \frac{\theta^3 x^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{\theta^r x^r}{r!} + \cdots\cdots\right)$$

$$= E(1) + \theta\, E(x) + \frac{\theta^2}{2!} E(x^2) + \frac{\theta^3}{3!} E(x^3)$$

$$+ \dots + \frac{\theta^r}{r!} E(x^r) + \dots$$

$$= 1 + \theta \cdot \mu_1' + \frac{\theta^2}{2!} \mu_2' + \frac{\theta^3}{3!} \mu_3'$$

$$+ \dots + \frac{\theta^r}{r!} \mu_r' + \dots$$

$M(\theta)$-ல் $\frac{\theta^r}{r!}$ ன் குணகம் μ_r' ஆனது ஆதியை மூலமாகக் கொண்ட r-ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகையாகும். $M(\theta)$ வரையறுக்கப்பட வேண்டுமாயின் $1 + \theta\, \mu_1' + \frac{\theta^2}{2!} \mu_2' + \dots + \frac{\theta^r}{r!} \mu_r' + \dots$ என்ற தொடர் θ-ன் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பிற்கு ஒருங்கு தொடராகக்கொள்ளப்படும். சில நிகழ்தகவுச்சார்புகளுக்கு $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x)\, dx$ அல்லது $\Sigma\, e^{\theta x} f(x)$, θ-ன் மதிப்புகளுக்கு $M(\theta)$ வரையறுக்கப்படாமல் இருக்கலாம்.

எ.கா. $f(x) = \frac{6}{\pi^2 x^2}$ $x = 1, 2, 3, \dots$ ஆனால் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பினை வரையறுக்க இயலாது.

$$\frac{dM}{d\theta} = \mu_1' + \frac{\theta}{1!} \mu_2' + \frac{\theta^2}{2!} \mu_3' + \dots$$

$$\left(\frac{dM}{d\theta}\right)_{\theta=0} = \mu_1'$$

$$\frac{d^2 M}{d\theta^2} = \mu_2' + \theta \cdot \mu_3' + \frac{\theta^2}{2!} \mu_4' + \dots$$

$$\left(\frac{d^2 M}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} = \mu_2'$$

$$\left(\frac{d^3 M}{d\theta}\right)_{\theta=0} = \mu_3'$$

இவ்வாறே $\left(\frac{d^r M}{d\theta^r}\right)_{\theta=0} = \mu_r'$

எனவே ஒரு மாறியின் ஆதியை மூலமாகக் கொண்ட பல்வேறு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளை $M(\theta)$ என்னும் சார்பின் மூலம் பெற இயலுவதால் இது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு (moment generating function) என அழைக்கப் படுவது பொருத்தமுடையது.

விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பின் பண்புகள் :

(1) $M_{cx}(\theta) = M(c\theta)$

நிறுவுதல்

$$M_{cx}(\theta) = E\left(e^{\theta \cdot cx}\right)$$

$$M_x(c\theta) = E\left[e^{\theta c \cdot x}\right]$$

$$\therefore M_{cx}(\theta) = M_x(\;)$$

(2) $M_{x+a}(\theta) = e^{\theta a} \cdot M_x(\theta)$ a ஒரு மாறிலி

நிறுவுதல்

$$M_{x+a}(\theta) = E\left(e^{\theta(x+a)}\right)$$

$$= e^{\theta a} \cdot E\left(e^{\theta x}\right)$$

$$= e^{\theta a} \cdot M_x(\theta).$$

இது போலவே $M_{x-a}(\theta) = e^{-a\theta} \cdot M_x(\theta)$

எனவே a என்னும் ஏதேனும் ஒரு மூலத்தை ஒட்டிய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு $= e^{-a\theta} \cdot$ (ஆதியை மூலமாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு) குறிப்பாக $a =$ கூட்டு சராசரி (m) எனில்,

$M_{x-m}(\theta) = e^{-m\theta} \cdot M(\theta)$. இதன் மூலம் மையவிலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளுக்கும், ஆதியை மூலமாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளுக்கும் உள்ள தொடர்பு கிடைக்கிறது.

$M_{ax+b}(\theta) = e^{b\theta} M_x(a\theta)$ என நிறுவுக.

$$M_{ax+b}(\theta) = E(e^{\theta(ax+b)})$$

$$= e^{\theta b} E(e^{\theta \cdot ax})$$

$$= e^{\theta b} M_x(a\theta)$$

$$\therefore \quad M_{ax+b}(\theta) = e^{\theta b} M_x(a\theta)$$

$$Z = \frac{x-a}{h} \quad (a, h \text{ மாறிலிகள்})$$

$$M_z(\theta) = M_{\frac{x-a}{h}}(\theta)$$

$$= E\left(e^{\theta \frac{(x-a)}{h}}\right)$$

$$= E\left[e^{\frac{\theta x}{h}} e^{-\frac{a\theta}{h}}\right]$$

$$= e^{-\frac{a\theta}{h}} E\left(e^{x \cdot \frac{\theta}{h}}\right)$$

$$= e^{-\frac{a\theta}{h}} M_x\left(\frac{\theta}{h}\right)$$

இங்கு $a = E(x) =$ கூட்டுச் சராசரி m,

$h = \sigma_x = x$-ன் திட்டவிலக்கம் எனக்கொண்டால்

$Z = \frac{x-m}{\sigma_x}$ என்பது ஒரு தரப்படுத்தப்பட்ட (standardised) மாறி ஆகும்.

$\therefore \quad M_z(\theta) = e^{-\frac{m\theta}{\sigma}} M_x\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)$. இதன் மூலம் தரப் படுத்தப்பட்ட மாறியின் விலக்கப்பெருக்குத் தொகைகளுக்கும்,

கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாறியின் விலக்கப்பெருக்குத் தொகைகளுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு கிடைக்கிறது.

எ.கா. $Y = \frac{1}{2a}$ எனும் செவ்வகப் பரவலின் $(-a \leq x \leq a)$, ஆதியை ஒட்டிய வி.பெ.தொ.உ. சார்பு $\frac{1}{at} \sin ha\theta$ என நிறுவுக. மேலும் $\mu_{2n} = \frac{a^{2n}}{2^{n+1}}$ எனவும், எல்லா ஒற்றைப்படை விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளும் பூஜ்யமாகும் எனவும் நிறுவுக.

தீர்வு

$$M(\theta) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} e^{\theta x}\, dx = \frac{1}{2a} \frac{e^{a\theta} - e^{-a\theta}}{\theta}$$

$$= \frac{1}{at} \sin h\, a\theta$$

$$= \frac{1}{a\theta} \left[a\theta + \frac{a^3 \theta^3}{3!} + \frac{a^5 \theta^5}{5!} + \ldots\ldots \right]$$

$$= 1 + \frac{a^2 \theta^2}{3!} + \frac{a^4 \theta^4}{5!} + \frac{a^6 \theta^6}{7!} + \ldots\ldots$$

∴ (இங்கு θ-வின் படிகள் யாவும் இரட்டைப்படை எண்களாக உள்ளன. எல்லா ஒற்றைப்படை விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளும் பூஜ்யமாகும்.)

இரட்டைப்படை விலக்கப் பெருத்குத் தொகை

$$\mu_{2n} = \left(\frac{d^{2n} M}{d\theta^{2n}}\right)_{\theta=0} = \frac{a^{2n}}{(2^{n+1})!}$$

எ.கா. $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, -\infty < x < \infty$ ஆனால், X-ன் வி.பெ.தொ.உ. சார்பு காண்க. பரவற்படியையும், β_1-ஐயும் கணக்கிடுக.

தீர்வு

$$M_x(\theta) = E[e^{\theta x}]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{x\theta} \cdot e^{-|x|} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} e^{x\theta} \cdot e^{x} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2} e^{\theta x} \cdot e^{-x} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{x(\theta+1)}}{\theta+1}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{1}{2} \frac{e^{x(\theta-1)}}{\theta-1}\right]_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2(\theta+1)} - \frac{1}{2(\theta-1)}$$

$$= -\frac{1}{\theta^2 - 1} = \frac{1}{1-\theta^2}$$

$$M_x(\theta) = \frac{1}{1-\theta^2}$$

$$\mu_1' = \left(\frac{dM}{d\theta}\right)_{\theta=0} = \left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{1-\theta^2}\right)\right]_{\theta=0}$$

$$= \left[\frac{2\theta}{(1-\theta^2)}\right]_{\theta=0} = 0$$

$\therefore$ கூட்டுச்சராசரி $= 0$

$$\mu_2' = \left(\frac{d^2M}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} = \frac{d}{d\theta}\left[\frac{2\theta}{(1-\theta^2)^2}\right]_{\theta=0}$$

$$= \frac{2(1-\theta^2)^2 + 8\theta^2(1-\theta^2)}{(1-\theta^2)^4}$$

$\therefore$ பரவற்படி $\sigma^2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = 2 - 0 = 2.$

$$\mu_3' = \left(\frac{d^3 M}{d\theta^3}\right)_{\theta=0}$$

$$= \frac{d}{d\theta}\left[\frac{2}{(1-\theta^2)^2} + \frac{8\theta^2}{(1-\theta^2)^3}\right]_{\theta=0}$$

$$= \left[\frac{8\,\theta\,(1-\theta^2)}{(1-\theta^2)^4} + \frac{16\theta\,(1-\theta^2)^3}{(1-\theta^2)^6} + \frac{48\,\theta^3\,(1-\theta^2)^2}{(1-\theta^2)^6}\right]_{\theta=0}$$

$\mu_3' = 0 \qquad \therefore \quad \mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2\,(\mu'_1)^2 - 2\,(\mu'_1)^3$

$= 0 \qquad\qquad [\because \ \mu'_3 = \mu'_1 = 0]$

$\therefore \quad \beta_1 = 0$

எ. கா. X என்னும் மாறி $P\,(x = k) = q^{k-1}\,p$, $k = 1, 2, \ldots$ $(p + q = 1)$ என்ற பெருக்கு நிகழ்தகவுப் பரவலைச் சார்ந்துள்ளது.

X-ன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பினைக் கண்டு, அதிலிருந்து பரவலின் கூட்டுச்சராசரி $E\,(x)$, பரவற்படி $V\,(x)$ ஐக் காணுதல்.

$$M \times (\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\theta k}\, q^{k-1}\, p$$

$$= \frac{p}{q}\sum_{1}^{\infty} (q e^{\theta})^k$$

$$= \frac{p}{q}\,\frac{q e^{\theta}}{1 - q e^{\theta}}$$

$$\mu'_1 = E\,(X) = \frac{d}{d\theta}[M_x \times (\theta)]_{\theta=0}$$

$$= \left[\frac{(-q e^{\theta})\,p e^{\theta} - p e^{\theta}(-q e^{\theta})}{(-q e^{\theta})^2}\right]_{\theta=0}$$

$$= \left[\frac{p e^{\theta}}{(1-qe^{\theta})^2}\right]_{\theta=0} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

$$\mu'_2 = E(x^2) = \left[\frac{d^2}{d\theta^2} M_x(\theta)\right]_{\theta=0}$$

$$= \frac{p(1+q)}{(1-q)^3} = \frac{1+q}{p^2}$$

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$= \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{q}{p^2}$$

தேற்றம்

சார்பற்ற மாறிகளின் கூட்டுத்தொகையின் விலக்கப்பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பானது, அவற்றின் தனிப்பட்ட விலக்கப்பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்புகளின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமமாகும். அதாவது, $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்பவை, n சமவாய்ப்பு மாறிகள் எனின்,

$$M_{x_1+x_2+\cdots+x_n}(\theta) = M_{x_1}(\theta)\, M_{x_2}(\theta) \cdots M_{x_n}(\theta)$$

நிறுவுதல்

$$M_{x_1+x_2+\cdots+x_n}(\theta) = E[e^{\theta(x_1+x_2+\cdots+x_n)}]$$

$$= E[e^{\theta x_1 + \theta x_2 + \cdots + \theta x_n}]$$

$$= E[e^{\theta x_1}] \cdot E[e^{\theta x_2}] \cdots E[e^{\theta x_n}]$$

$(\because\ x_1, x_2, \ldots x_n$ சார்பற்றவை$]$

$$= M_{x_1}(\theta) \cdot M_{x_2}(\theta) \cdots M_{x_n}(\theta)$$

$$\therefore\ M_{x_1+x_2+\cdots+x_n}(\theta) = M_{x_1}(\theta) \cdot M_{x_2}(\theta) \cdots M_{x_n}(\theta)$$

விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பின் மாற்றற்ற தன்மை

கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்தகவுச் சார்பிற்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பைக் காணலாம். அது போலவே விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு கொடுக்கப் பட்டால் அதற்குரிய நிகழ்தகவுச் சார்பு ஒன்றிற்கு மேல் இராது. எனவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பின் மூலம் அதற்கான நிகழ்தகவுச் சார்பு இது தான் என்று அறுதியிட்டுக் கூறலாம்.

எ.கா. $M_x(\theta) = \dfrac{(2+3e^{\theta})^3}{125}$ என்னும் சார்பின் நிகழ்தகவுச் சார்பு காண்க.

தீர்வு

$$Mx(\theta) = \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\ e^{\theta}\right)^3$$

இது $(q + p\ e^{\theta})^n$ என்னும் அமைப்பில் உள்ளதால் ஒரு ஈருறுப்புப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பாகும். எனவே விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பின் மாற்றற்ற தன்மை தேற்றத்தின் படி, இதன் நிகழ்தகவுச் சார்பு $n = 3,\ p = \frac{3}{5}$-ஐ பண்பளவையாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலின் நிகழ்தகவு சார்பாகும்.

$$\therefore\quad f(x) = 3c_x \left(\frac{3}{5}\right)^x \left(\frac{2}{5}\right)^{3-x}$$

எ. கா. x, x_2, x_3 என்பவை 3 சார்பற்ற சமவாய்ப்பு மாறிகள். அவை ஈருறுப்பு பரவல பண்பளவைகள் $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$ ஆகவும், $n_1 = 10,\ n_2 = 15,\ n_3 = 30$ ஆகவும் கொண்டு தழுவுகின்றன. $x_1 + x_2 + x_3$-ன் பரவலைக் காண்க.

தீர்வு

$x = B(n, P)$ எனில், இது முயற்சியின் எண்ணிக்கை n ஆகவும், வெற்றியின் நிகழ்தகவு p ஆகவும் கொண்ட ஓர் ஈருறுப்பு மாறி ஆகும்.

ஈருறுப்புப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_x(\theta) = \Sigma\, e^{\theta x} f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{\theta x}\, nc_x\, p^x q^{n-x}\,.$$

$$= \sum_{x=0}^{n} nc_x\, q^{n-x} (pe^{\theta})^x$$

$$= nc_0\, q^n + nc_1\, q^{n-1} Pe^{\theta} + nc_2\, (Pe^{\theta})^2 q^{n-2} + \ldots\ldots + nc_n\, (Pe^{\theta})^n$$

$$= (q + pe^{\theta})^n$$

$$x_1 = B\left(10, \frac{1}{2}\right),\ x_2 = B\left(15, \frac{1}{2}\right),\ x_3 = B\left(30, \frac{1}{2}\right)$$

என்பவை சார்பற்ற மாறிகள்.

$\therefore$ $x_1 + x_2 + x_3$-ன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு $= M_{x_1}(\theta) \cdot M_{x_2}(\theta) \cdot M_{x_3}(\theta)$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{\theta}\right)^{10} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{\theta}\right)^{15} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{\theta}\right)^{30}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{\theta}\right)^{55}$$

எனவே $x_1 + x_2 + x_3$-ன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பின் அமைப்பிலிருந்து, இது ஈருறுப்புப் பரவலை $p = \frac{1}{2}$, $n = 55$ என்னும் பண்பளவைகளுடன் பின் பற்றுகிறது என அறிகிறோம்.

எ. கா. x_1, x_2, x_3 என்பவை $N(m_1, \sigma_1)$, $N(m_2, \sigma_2)$, $N(m_3, \sigma_3)$ என்னும் சார்பற்ற இயல்நிலை மாறிகள். $x_1 - 3x_2 + 5x_3$-ன் பரவலைக் காண்க.

குறிப்பு : இயல்நிலைப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு $e^{m\theta + \frac{\theta^2 \sigma^2}{2}}$ எனக் கொள்க.

(நிறுவுதல் வரும் பகுதிகளில் தரப்பட்டுள்ளது)

$$M_{x_1-3x_2+5x_3}(\theta) = M_{x_1}(\theta)\, M_{-3x_2}(\theta)\, M_{5x_3}(\theta)$$

$$M_{x_1}(\theta) = e^{m\theta + \frac{\theta^2 \sigma^2}{2}}$$

$$M_{-3x_2}(\theta) = M_{x_2}(-3\theta)$$

$$= e^{-3m\theta + \frac{9\theta^2 \sigma^2}{2}}$$

$$M_{5x_3}(\theta) = M_{x_3}(5\theta)$$

$$= e^{5m\theta + \frac{25\theta^2 \sigma^2}{2}}$$

$$\therefore\ M_{x_1-3x_2+5x_3}(\theta) = e^{m\theta + \frac{\theta^2 \sigma^2}{2}}\, e^{-3m\theta + \frac{9\theta^2 \sigma^2}{2}}\, e^{5m\theta + \frac{25\theta^2 \sigma^2}{2}}$$

$$= e^{m\theta + \frac{35\theta^2 \sigma^2}{2}}$$

எனவே $Z = x_1 - 3x_2 + 5x_3$, $N(m, \sqrt{35}\sigma)$ மாறியாகும்.

(**குறிப்பு :** $N(m, \sigma)$ என்பது கூட்டுச்சராசரி m, திட்ட விலக்கம் σ என்ற பண்பளவைகளைக் கொண்ட இயல்நிலை மாறியைக் குறிக்கிறது. இது பற்றிய விளக்கம் பிறகு காணலாம்.)

எ. கா. x_1, x_2, x_3 என்ற 3 சம வாய்ப்பு மாறிகள் பரவலின் பரவலை $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$ எனக்கொண்டு தழுவுகின்றன. $x_1 + x_2 + x_3$-ன் பரவலைக் காண்க.

$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$ என்ற நிகழ்தகவுச் சார்பைக் கொண்ட பரவலே, பாய்ஸான் பரவலாகும்.

இதன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_x(t) = e^{\lambda(e^{\theta}-1)}$$

$$M_{x_1+x_2+x_3}(t) = M_{x_1}(\theta)\, M_{x_2}(\theta)\, M_{x_3}(\theta)$$

$$= e^{5}(e^{\theta}-1)\, e^{3}(e^{\theta}-1)\, e^{9}(e^{\theta}-1)$$

$$= e^{11(e^{\theta}-1)}$$

$M_{x_1+x_2+x_3}(\theta) = e^{\lambda(e^{\theta}-1)}$ என்ற அமைப்பில் உள்ளதால், விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பின் மாற்றற்றத் தேற்றத்தின்படி இதன் நிகழ்தகவுச் சார்பு 11ஐ பண்பளவையாகக் கொண்ட பாய்ஸான் பரவலின் நிகழ்தகவுச் சார்பாகும். எனவே, $x_1 + x_2 + x_3$, 11ஐ பண்பளவையாகக் கொண்ட பாய்ஸான் மாறியாகும்.

எ.கா. இரு சமவாய்ப்பு மாறிகள் ஒரே செவ்வகப் பரவலைத் தழுவுகின்றன. $\frac{x_1 + x_2}{2}$ன் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு காண்க.

$$Y = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$M_x(\theta) = \frac{e^{\theta x}(e^{\beta} - e^{\alpha})}{(\beta - \alpha)\,\theta x}$$

$$M_{ax+b}(\theta) = e^{b\theta} M_x(a\theta)$$

$b = 0,\ a = \frac{1}{2}$ எனில்

$$M_{\frac{x}{2}}(\theta) = M_x\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{e^{2}[e^{\beta} - e^{\alpha}]}{\theta[\beta - \alpha]\,\frac{\theta}{2}}$$

$$M_{\frac{x_1+x_2}{2}}(\theta) = M_{\frac{x_1}{2}}(\theta) \,.\, M_{\frac{x_2}{2}}(\theta) = \frac{2\,e^{\frac{\theta}{2}}[e^{\beta} - e^{\alpha}]}{(\beta - \alpha)\,\theta} \times \frac{2\,e^{\frac{\theta}{2}}[e^{\beta} - e^{\alpha}]}{(\beta - \alpha)\,\theta}$$

$$= \frac{4\,e^{\theta}\,[e^{\beta} - e^{\alpha}]^2}{(\beta - \alpha)^2\,\theta^2}$$

பயிற்சி

1. $f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$ $(-\infty < x < \infty)$ என்ற சார்பிற்கு $E(X)$ வரையறுக்க இயலாது என நிறுவுக. $M_x(\theta)$ வை வரையறுக்க இயலுமா ?

2. $-1, 3$ என்ற இடைவெளியில் சீராகப் பரவியுள்ள சமவாய்ப்பு மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பினைக் காண்க.

3. மாறி X-ன் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை சார்பு $(0{\cdot}2\,e^t + 0{\cdot}8)^{15}$ · $Y = 3X + 1$ ஆனால், Y-ன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பைக்கண்டு, அதன் முதல் மூன்று விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகளைப் பெறுக.

4. $f(x) = \begin{cases} 1000\, e^{-1000x}, & x > 0 \\ 0 & \text{(மற்றெங்கிலும்)} \end{cases}$ என்ற நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பைக் கொண்ட X மாறியின் வி. பெ. தொகை உருவாக்கும் சார்பினைக் காண்க. இதனைப்பயன்படுத்தி, X-ன் கூட்டுச்சராசரி, பரவற்படி இவற்றைக் காண்க.

5. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பை வரையறுக்க. இதிலிருந்தோ அல்லது வேறு வகையிலோ

(i) $Y = aX + b$

(ii) $Y = \frac{X - m}{\sigma}$ வின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்புகளைப் பெறுக.

6. X எனும் சமவாய்ப்பு மாறி n எனும் மதிப்பை நிகழ்தகவு $\frac{1}{2^n}$ உடன் ஏற்கிறது. ($n = 1, 2, 3, \ldots$) X-ன் விலக்கப்பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பைக் காண்க. இதன்மூலம் X-ன் கூட்டுச்சராசரியையும், பரவற்படியையும் காண்க.

7. கீழ்க்காணும் பரவல்களின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்புகளைக்கண்டு, அவற்றின் பரவற்படிகளைப் பெறுக.

(i) $dF(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} dx \qquad (-\infty < x < \infty)$

(ii) $P(X = k) = n\,C_k\, p^k\, q^{n-k} \qquad [0 < p < 1,\ q = 1 - p,\ k = 0, 1, 2, \ldots n]$

8. கீழ்க்காணும் பரவலுக்கு விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பினைக் காண்க.

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2 - x & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்.} \end{cases}$$

9. ஒரு தலைச்சார்பற்ற நாணயமொன்று 4 முறைகள் வீசப்படுகிறது. கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கை X என்றால் X-ன் விலக்கப்பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு, கூட்டுச் சராசரி, பரவற்படியைக் காண்க.

10. ஒரு நிகழ்தகவுப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு $\frac{1}{81}(2+e^t)^4$. நிகழ்தகவுப் பரவலினைக் காண்க.

11. $\{1, 2, \ldots\ldots n\}$ என்ற கணத்திலிருந்து, ஒரு முழுஎண் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அவ்வாறு தேர்ந்தெடுக்கப்படும் எண் X ஆனால், X-ன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பைக் காண்க.

குமுலண்டுகள் (Cumulants)

X என்பது, $f(x)$ ஐ நிகழ்தகவுப் பரவலாகக் கொண்ட சமவாய்ப்பு மாறி. இதன் வி பெ.தொ,உ. சார்பு (M.G.F.) $M_x(\theta)$ எனின், $f(x)$-ன் குமுலண்டு உருவாக்கும் சார்பு (கு உ. சா.) (Cumulant Generating Function C.G.F.),

$k_x(\theta) = \log_e M_x(\theta)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

(இங்கு வலப்பக்கத் தொடர்) θ-ன் படிகளில் விரித்தெழுதக் கூடிய ஒரு குவி தொடராக இருத்தல் வேண்டும்.)

$$\therefore\ k_x(\theta) = k_1\theta + k_2\frac{\theta^2}{2!} + \cdots + k_r\frac{\theta^r}{r!} + \cdots\cdots$$

$$= \log\left(1 + \mu_1'\theta + \mu_2'\frac{\theta^2}{2!} + \mu_3'\frac{\theta^3}{3!} + \cdots\right.$$

$$\left. + \mu_r'\frac{\theta^r}{r!} + \cdots\cdots\right) \quad \text{I}$$

இங்கு k_r, $k_x(\theta)$ வில் $\frac{\theta^r}{r!}$-ன் குணகமாகும். இது r ஆவது குமுலண்டாகும். $k_x(\theta)$, குமுலண்டுகளை உருவாக்குவதால் இதனை குமுலண்டு உருவாக்கும் சார்பு என்கிறோம்.

r ஆவது குமுலண்டைப் பெறுவதற்கு, $k_x(\theta)$-ஐ r முறை வகைப்படுத்தி, $\theta = 0$ எனப் பிரதியிட்டுப் பெறுகிறோம்.

$$k_r = \left[\frac{d^r k(\theta)}{d\theta^r}\right]_{\theta = 0}.$$

சமன்பாடு I லிருந்து,

$$k_1\theta + k_2\frac{\theta^2}{2!} + k_3\frac{\theta^3}{3!} + k_4\frac{\theta^4}{4!} + \cdots$$

$$= \left[\left(\mu_1'\theta + \mu_2'\frac{\theta^2}{2!} + \mu_3'\frac{\theta^3}{3!} + \mu_4'\frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right)\right.$$

$$- \frac{1}{2}\left(\mu_1'\theta + \mu_2'\frac{\theta^2}{2!} + \mu_3'\frac{\theta^3}{3!} + \cdots\cdots\right)^2$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\mu_1'\theta + \mu_2'\frac{\theta^2}{3!} + \mu_3'\frac{\theta^3}{3!} + \cdots\cdots\right)$$

$$- \frac{1}{4}\left(\mu_1'\theta + \mu_2'\frac{\theta^2}{2!} + \cdots\cdots\right)^4$$

$$+ \cdots\cdots]$$

θ-ன் ஒத்த படிகளின் (like powers), குணகங்களை ஒப்பிட்டு, விலக்கப்பெருக்குத் தொகைகளுக்கும், குமுலண்டுகளுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைப் பெறுகிறோம்.

$$k_1 = \mu_1' = \text{கூட்டுச்சராசரி}$$

$$\frac{k_2}{2!} = \frac{\mu_2'}{2!} - \frac{\mu_1'^2}{2!}$$

$$\therefore\ k_2 = \mu_2' - \mu_1'^2 = \mu_2$$

$$\frac{k_3}{3!} = \frac{\mu_3'}{3!} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2\mu_1'\mu_2'}{3!} + \frac{\mu_1'^3}{3!}$$

$$\therefore\ k_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2\mu_1'^3 = \mu_3.$$

மேலும் $\frac{k_4}{4!} = \frac{\mu_4'}{4!} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_2'^2}{4!} + \frac{2\mu_1'\mu_3'}{3!}\right)$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{3\mu_1'^2\mu_2'}{2}\right) - \frac{\mu_1'^4}{4}$$

$$= \mu_4' - 3\mu_2'^2 - 4\mu_1'\mu_3' + 12\mu_1'^2\mu_2' - 6\mu_1'^4$$

$$= (\mu_4' - 4\mu_3'\mu_1' + 6\mu_1'^2 - 3\mu_1'^4)$$

$$- 3(\mu_2'^2 - 2\mu_2'\mu_1'^2 + \mu_1'^4)$$

$$= \mu_4 - 3(\mu_2' - \mu_1'^2)^2 = \mu_4 - 3k_2^2$$

$$\therefore\ \mu_4 = k_4 + 3k_2^2$$

எனவே $k_1 =$ கூட்டுச்சராசரி

$k_2 = \mu_2 =$ பரவற்படி

$k_3 = \mu_3$

$k_4 = \mu_4 - 3k_2^2.$

குமுலண்டுகளின் கூட்டல் பண்பு (Additive property of Cumulants)

சார்பற்ற சமவாய்ப்பு மாறிகளின் கூட்டுத்தொகையின் r ஆவது குமுலண்டு, தனிப்பட்ட மாறிகளின் r ஆவது குமுலண்டு களின் கூட்டுத்தொகையாகும்.

$$k_r(X_1+X_2+\dots+X_n) = k_r(X_1)+k_r(X_2)+\dots+k_r(X_n)$$

இங்கு $X_i, (i = 1, 2, \dots n)$ என்பவை சார்பற்ற சமவாய்ப்பு மாறிகள்.

நிறுவுதல்

$$M_{x_1+x_2+\dots+x_n}(\theta) = M_{x_1}(\theta)\, M_{x_2}(\theta) \dots M_{x_n}(\theta)$$

இருபக்கங்களிலும் மடக்கையைக் காணுங்கால்,

$$k_{x_1+x_2+\dots+x_n}(\theta) = k_{x_1}(\theta) + k_{x_2}(\theta) + \dots + k_{x_n}(\theta)$$

இருபக்கமும், θ ஐப் பொறுத்து, r முறைகள் வகைப்படுத்தி $\theta = 0$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$\frac{d^r}{d\theta^r}\left(k_{x_1+x_2+x\dots+x_n}(\theta)\right)_{\theta=0} = \left[\frac{d^r}{d\theta^r} k_{x_1}(\theta)\right]_{\theta=0}$$

$$+\left[\frac{d^r}{d\theta^r}\; k_{x_2}(\theta)\right]_{\theta=0} + \dots + \left[\frac{d^r}{d\theta^r}\; k_{x_n}(\theta)\right]_{\theta=0}$$

எனவே $k_r(X_1+X_2+\dots+X_n) = k_r(X_1)+k_r(X_2)$ $+\dots+k_r(X_n)$.

மூலத்தையும், அளவுத்திட்டத்தையும் மாற்றுவதால், குமுலண்டு களில் ஏற்படும் விளைவு

$$Z = \frac{X-a}{h} \text{ என்க.}$$

$$\therefore\quad M_z(\theta) = e^{-\frac{a\theta}{h}} M_x\left(\frac{\theta}{h}\right)$$

$$\therefore\quad k_z(\theta) = -\frac{a\theta}{h}+k_x\left(\frac{\theta}{h}\right)$$

$$k_1'(\theta) + k_2'\frac{\theta^2}{2!} + \dots + k_r'\frac{\theta^r}{r!} + \dots = -\frac{a\theta}{h} + k_1\left(\frac{\theta}{h}\right)$$

$$+ k_2\frac{\left(\frac{\theta}{h}\right)^2}{2!} + \dots + k_r\frac{\left(\frac{\theta}{h}\right)^r}{r!} + \dots\dots$$

இங்கு k_r, k_r' என்பவை முறையே X, Z-ன் குமுலண்டுகளாகும்,

குணகங்களை ஒப்பிடுவதால், $k_1' = \frac{k_1 - a}{h}$, $k_r' = \frac{k_r}{h^r}$, $r = 2, 3, \ldots\ldots$ எனக் கிடைக்கும்.

எனவே முதலாவது குமுலண்டைத்தவிர, மற்றெல்லா குமுலண்டுகளும், மூலத்தை மாற்றுவதால் பாதிக்கப் படுவதில்லை.

கணக்கு

பின்வரும் பரவலுக்கு வி.பெ.தொ.உ. சார்பையும், கூட்டுச் சராசரியைப் பற்றிய முதல் 4 விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளையும் காண்க.

$$dF(x) = \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} \cdot e^{-\alpha x}\, x^{n-1}\, dx,\ a > 0,\ n>0,\ 0<x<\infty.$$

தீர்வு

$$M_x(\theta) = \int_0^\infty e^{\theta x} f(x)\, dx =$$

$$\frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-\alpha x} \cdot x^{n-1}\, e^{\theta x}\, dx.$$

$$= \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-x(\alpha-\theta)} \cdot x^{n-1}\, dx.$$

$$= \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n)}{(\alpha-\theta)^n}$$

[காமா தொகையீடைப் பயன்படுத்தி]

$$= \left(1 - \frac{\theta}{\alpha}\right)^{-n}$$

$$k(\theta) = \log M(\theta) = -n \log\left(1 - \frac{\theta}{\alpha}\right)$$

$$= n\left(\frac{\theta}{\alpha} + \frac{\theta^2}{2\alpha^2} + \frac{\theta^3}{3\alpha^3} + \frac{\theta^4}{4\alpha^4} + \ldots\ldots\right)$$

கூட்டுச்சராசரி $= k_1 = k\ (\theta)$-வில் θ-ன் குணகம்

$$= \frac{n}{\alpha}$$

பரவற்படி $= \mu_2 = k_2 = k\ (\theta)$-வில் $\frac{\theta^2}{2!}$-ன் குணகம் $= \frac{n}{\alpha^2}$

$\mu_3 = k_3 = k\ (\theta)$-வில் $\frac{\theta^3}{3!}$-ன் குணகம் $= \frac{6n}{\alpha^4}$

$$\mu_4 = k_4 + 3k_2^2 = \frac{6n}{\alpha^4} + 3\frac{n^2}{\alpha^4} = \frac{3n(n+2)}{\alpha^4}$$

எ.கா. μ'_r என்பது ஆதியை ஒட்டிய r-ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை எனின் $\mu'_r = \sum_{j=1}^{r} r-1\ C_{j-1}\ \mu'_{r-j} \cdot k_j$ என நிறுவுக. இங்கு k_j, j ஆவது குமுலண்டைக் குறிக்கிறது.

தீர்வு

$$k\ (\theta) = \log_e M\ (\theta)$$

$$\therefore\ k_1\theta + k_2\frac{\theta^2}{2!} + k_3\frac{\theta^3}{3!} + \ldots\ldots + k_r\frac{\theta^r}{r!} + \ldots\ldots$$

$$= \log\left[1 + \mu_1'\theta + \mu_2'\frac{\theta^2}{2!} + \ldots\ldots + \mu_r'\frac{\theta^r}{r!} + \ldots\ldots\right]$$

இரு பக்கமும் θ-ஐப் பொறுத்துப் பிரதியிட்டால்,

$$k_1 + k_2\theta + k_3\ \frac{\theta^2}{2!} + \ldots\ldots k_r\frac{\theta^{r-1}}{(r-1)!} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{\mu_1' + \mu_2'\theta + \mu_3'\frac{\theta^2}{2!} + \ldots\ldots + \mu_r'\frac{\theta^{r-1}}{(r-1)!} + \ldots\ldots}{1 + \mu_1'\theta + \mu_2'\frac{\theta^2}{2!} + \ldots\ldots + \mu_r'\frac{\theta^r}{r!} + \ldots\ldots}$$

$$\left[k_1 + k_2\,\theta + k_3 \frac{\theta^2}{2!} + \dots\dots + k_r \frac{\theta^{r-1}}{(r-1)!} + \dots\dots\right]$$

$$\times \left[1 + \mu_1'\theta + \mu_2' \frac{\theta^2}{2!} + \dots\dots + \mu_r' \frac{\theta^r}{r!} + \dots\dots\right]$$

$$= \mu_1' + \mu_2'\theta + \mu_3' \frac{\theta^2}{2!} + \dots\dots + \mu_r' \frac{\theta^{r-1}}{(r-1)!} + \dots\dots$$

இரு பக்கமும், θ^{r-1}-ன் குணகத்தை ஒப்பிடும்போது,

$$\mu_r' = k_1\,\mu_{r-1}' + (r-1)\,k_2\,\mu_{r-2}' + r-1\,C_2\,k_3\,\mu'_{r-3} + \dots\dots + k_r$$

$$= r-1\,C_0\,\mu'_{r-1}\,k_1 + r-1\,C_1\,\mu'_{r-2}\,k_2 + r-1\,C_2 \cdot \mu'_{r-3}\,k_3 + \dots + r-1\,C_{r-1}\,\mu'_0\,k_r$$

$$= \sum_{j=1}^{r} r-1\,C_{j-1}\,\mu'_{r-j}\,k_j$$

சிறப்புச் சார்பு (Characteristic Function)

சிற்சில சமயங்களில் விலக்கப்பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பினை வரையறுக்க இயலாது என முன்பே கூறப்பட்டது.

ஏனெனில் $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x)\,dx$ அல்லது

$\sum_x e^{\theta x} p(x)$ சில பரவல்களுக்கு, θ-ன் மெய் மதிப்புகளுக்கு

குவி தொடாராக அமைவதில்லை. எடுத்துக்காட்டாக

$$dF(x) = C \frac{1}{(1+x^2)^m}\,dx$$

$$dF(x) = C \frac{1}{(1+x^2)^m}\,dx, \quad x, > 1, \; -\infty \le x \le \infty$$

எனின், $C \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} \frac{1}{(1+x^2)^m}\,dx$,

m-ன் வரையுற்ற நேர் மதிப்புகளுக்குக் குவிவதில்லை.

அது போலவே தனித்த மாறிப் பரவலான,

$$dF(x) = \frac{6}{\pi^2 x^2},\ x = 1,\ 2,\ 3\ldots\ldots$$ என்பதற்கும் வி.பெ.தொ.

உ.கா. வரையறுக்க இயலாது. ஏனெனில்

$$\sum_x e^{\theta x} p_x = \frac{6}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{e^{\theta x}}{x^2}$$ குவிவதில்லை.

எனவே வி.பெ.தொ.உ. சார்பினைவிட அதிகம் பயன்படவல்ல சிறப்புச் சார்பினைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கிறோம்.

$$\phi_x(\theta) = E[e^{i\theta X}] = \int e^{i\theta x} f(x)\, dx$$ தொடர்மாறி நிகழ்தகவுப் பரவல்களுக்கு)

$$= \sum_x e^{i\theta x} p(x)$$ [தனித்த மாறி நிகழ்தகவுப் பரவல்களுக்கு

$\phi(\theta)$, மெய்மாறி θ-வின் சிக்கல் மதிப்புடைய (Complex valued) சார்பாகும்.

$$|\phi(\theta)| = \left| \int e^{i\theta x} f(x)\, dx \right| \leq \int \left| e^{i\theta X} \right| f(x)\, dx$$

$$= \int f(x)\, dx = 1.$$

$$\because \quad |e^{i\theta x}| = |\cos\theta x + i\sin\theta x| = \cos^2\theta x + \sin^2\theta x = 1.$$

$|\phi(\theta)| \leq 1$ ஆதலால், $\phi_x(\theta)$வை எப்போதும் வரையறுக்க இயலும். ($M(0)$-வை வரையறுக்க இயலாத போதுகூட).

சிறப்புச் சார்பின் பண்புகள்

θ-ன் எல்லா மெய் மதிப்புகளுக்கும்,

(i) $$\phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = 1$$

(ii) $|\phi(\theta)| \leq 1 = \phi(0)$

(iii) $\phi(\theta)$, $R(-\infty, \infty)$-ல் θ-வின் தொடர் சார்பாகும்.

(iv) $\phi(\theta)$ ஒவ்வொரு வரையுற்ற இடைவெளியிலும் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

(v) $\phi(\theta)$, $\phi(-\theta)$ இணைச் சார்புகளாகும்.

அதாவது $\phi(-\theta) = \overline{\phi(\theta)}$

நிறுவுதல்

$$\phi(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x}\, dF(x),\ \phi(-\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta x}\, dF(x)$$

$$\text{மேலும் } \overline{\phi(\theta)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x}\, dF(x)$$

$$\therefore\ \phi(-\theta) = \overline{\phi(\theta)}$$

தேற்றம் 1

X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் பரவல் சார்பு, ஆதியை ஒட்டி சமச்சீராக அமைந்தால்,

$$1 - F(x) = F(-x)$$

அல்லது $f(-x) = f(x)$ இங்கு $\phi(\theta)$ மெய் மதிப்புடையதாகவும், θ-ன் இரட்டைப்படைச் சார்பாகவும் உள்ளது.

நிறுவுதல்

வரையறையின்படி,

$$\phi(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} f(x)\, dx = \int_{\infty}^{-x} e^{-i\theta y} f(-y)\,(-dy)$$

[$x = -y$ என்க]

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta y} f(y)\, dy \quad [\because\ f(-y) = f(y)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta x} f(x)\, dx = \phi(-\theta)$$

எனவே $\phi(\theta) = \phi(-\theta)$

$\therefore \quad \phi(\theta)$, θ-வின் இரட்டைப்படைச் சார்பு,

மேலும் $\overline{\phi(\theta)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta x} f(x)\, dx = \phi(-\theta) = \phi(\theta)$

எனவே θ-வின் மெய்ச்சார்பு $\phi(\theta)$ ஆகும்,

தேற்றம் 2

$\phi(\theta)$-ஐ சிறப்புச் சார்பாகக் கொண்ட சமவாய்ப்பு மாறி X,

$\mu_r' = E(X^r)$-ஐ வரையறுக்க முடிந்தால்,

$$\mu_r' = (-i)^r \left[\frac{\partial^r}{\partial_r{}^r} \phi(\theta) \right]_{\theta=0}.$$

நிறுவுதல்

$$\phi(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} f(x)\, dx$$

தொகைக் குறிக்கு அடியில் வகைப்படுத்தினால்,

$$\frac{\partial^r}{\partial\theta^r} \phi(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^r \; e^{i\theta x} f(x)\, dx$$

$$= i^r \int_{-\infty}^{\infty} x^r \; e^{i\theta x} f(x)\, dx$$

$$\therefore \quad \left[\frac{\partial^r}{\partial\theta^r} \phi(x) \right]_{\theta=0} = (i^r) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^r \; e^{i\theta x} f(x)\, dx \right]_{\theta=0}$$

$$= (i^r) \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\, dx = {}^r E(xi^r) = i^r \mu'_r$$

$$\therefore \quad \mu'_r = \left(\frac{1}{i}\right)^r \left[\frac{\partial^r}{\partial\theta^r} \phi(\theta)\right]_{\theta = 0}$$

$$= (-i)^r \left[\frac{\partial^r}{\partial\theta^r} \phi(\theta)\right]_{\theta = 0}$$

தேற்றம் 3

$\phi_{CX}(\theta) = \phi_X(C\theta)$, C மாறிலி.

தேற்றம் 4

X_i, $i = 1, 2, \dots n$ என்பவை n சம வாய்ப்பு மாறிகளானல்,

$$\phi_{X_1 + X_2 + \dots + X_n}(\theta) = \phi_{X_1}(\theta) \cdot \phi_{X_2}(\theta) \dots \phi_{X_n}(\theta)$$

தேற்றம் 5

$Y = \dfrac{X-a}{h}$, a, h மாறிலிகளானல்,

$$\phi_Y(\theta) = e^{-ia\theta/h} \phi_X\left(\frac{\theta}{h}\right)$$

குறிப்பாக $a = E[X] = m$ எனவும், $h = \sigma$ எனவும் எடுத்துக் கொண்டால் தரப்படுத்தப்பட்ட மாறியாகிய $Z = \dfrac{X-m}{\sigma}$ வின் சிறப்புச் சார்பு.

$$\phi_Z(\theta) = e^{-\frac{im\theta}{\sigma}} \phi_X\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)$$

எ.கா. ஒரு பரவலுக்கு குமுலண்டுகள் $k_r = n[(r-1)!]$, $n > 0$ எனத்தரப்பட்டுள்ளன. சிறப்புச் சார்பைக் காண்க.

$$K(\theta) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(i\theta)^r}{r!} K_r = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(i\theta)^r}{r!} n\{(r-1)\}!$$

$$= n \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(i\theta)^r}{r}$$

$$= n \left[i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2} + \frac{(i\theta)^3}{3} + \dots \right]$$

$$= n[-\log(1 - i\theta)]$$

$$= \log(1 - i\theta)^{-n}$$

மேலும், $K(\theta) = \log \phi(\theta) = \log(1 - i\theta)^{-n}$

$$\therefore \quad \phi(\theta) = (1 - i\theta)^{-n}$$

எ.கா. ஆதியை ஒட்டிய ஒரு பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் $\mu'_r = \dfrac{\Gamma(l+r)}{\Gamma(l)}$ சிறப்புச் சார்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$\phi(\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^r}{r!} \mu'_r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^r}{r!} \frac{\Gamma(l+r)}{\Gamma(l)}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^r}{r!} \frac{(l+r-1)!}{(l-1)!}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (i\theta)^r \; {}^{l+r-1}C_r = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \; {}^{-l}C_r \, (i\theta)^r$$

$$[\because \; {}^{-l}C_r = (-1)^r \; {}^{l+r-1}C_r, \; (-1)^r \; {}^{-l}C_r = {}^{l+r-1}C_r]$$

$$\therefore \quad \phi(\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} {}^{-l}C_r \, (-i\theta)^r = (1 - i\theta)^{-l}$$

10. ஷெபீசேவின் சமனின்மை பேரெண்களின் விதி

ஷெபீசேவின் சமனின்மை தேற்றம் (Tcheby chef's inequality)

பரவுகை அளவைகளின் திட்ட விலக்கத்திற்குச் சிறப்பான பங்கு உண்டு என்பதை நாம் ஏற்கனவே அறிவோம். புள்ளியியல் விவரங்களைப் பகுத்தாய்வதில் இதற்குள்ள முக்கிய பங்கை ரஷ்ய கணித வல்லுநர் ஷெபீசேவின் கீழ்க்கண்ட தேற்றம் விளக்குகிறது;

$$P\left\{ |X-m| \geq k\sigma \right\} \leq \frac{1}{k^2}$$

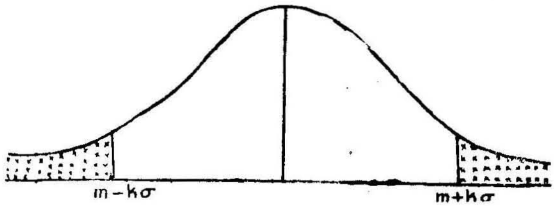
k என்பது ஏதேனுமொரு நேர்க்குறி மாறிலி.

σ திட்ட விலக்கம்.

m, X-ன் எதிர் பார்க்கப்படும் மதிப்பு.

$X-m$-ன் தனி மதிப்பு, k மடங்குகள் திட்ட விலக்கத்தைவிட அதிகமாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{1}{k^2}$ ஐ விடக் குறைவானது என்பதே தேற்றமாகும். எதிர் பார்க்கப்படும் மதிப்புக்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமவாய்ப்பு மாறி எவ்வளவு அருகாமையில் இருக்கிறது என்பதை இத்தேற்றம் நிகழ்தகவுக் கூற்றின் மூலம் விளக்குகிறது.

குறிக்கப்பட்டுள்ள பகுதியில் x அமைந்தால் அதன் மதிப்பு $m-k\sigma$ க்குக் குறைவாகவோ, $m+k\sigma$ க்கு அதிகமாகவோ இருக்கும்.



படம் 10·1

தேற்றத்தின்படி இதற்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{1}{k}$ ஐ விடக் குறைவாக இருக்க வேண்டும்.

$$\text{அதாவது } P\{\,|X-m| \geq k\sigma\} = \int_{-\infty}^{m-k\sigma} f(x)\,dx \int_{m+k\sigma}^{\infty} f(x)\,dx \leq \frac{1}{k^2}$$

என நிறுவவேண்டும்.

நிறுவுதல்

$$\sigma^2 = E[X-E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{m-k\sigma} f(x)(\ -m)^2\,dx + \int_{m-k\sigma}^{m+k\sigma} f(x)(x-m)^2\,dx$$

$$+ \int_{m+k\sigma}^{\infty} f(x)(x-m)^2\,dx$$

$$\therefore\ \sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{m-k\sigma} (x-m)^2 f(x)\,dx + \int_{m+k\sigma}^{\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx$$

முதல் தொகையில் $x \leq m-k\sigma$

$$x-m \leq -k\sigma$$

$$(x-m)^2 \geq k^2\sigma^2$$

இரண்டாவது தொகையில், $x \geq m + k\sigma$

$$x-m \geq k\sigma$$

$$(x-m)^2 \geq k^2 \sigma^2$$

$$\therefore \quad \sigma^2 \geq k^2 \sigma^2 \left[\int_{-\infty}^{m-k\sigma} f(x)\, dx) + \int_{m+k\sigma}^{\infty} f(x)\, dx \right]$$

$$\frac{1}{k^2} \geq \int_{-\infty}^{m-k\sigma} f(x)\, dx + \int_{m+k\sigma}^{\infty} f(x)\, dx$$

$$\frac{1}{k^2} \geq P\{X \leq m-k\sigma\} + P\{X \geq k\sigma\}$$

$$\geq P\{X-m \leq -k\sigma\} + P\{X-m \geq k\sigma\}$$

$$\frac{1}{k^2} \geq P\{|X-m| \geq k\sigma\}$$

$$\therefore \quad P\{|X-m| \geq k\sigma\} \leq \frac{1}{k^2}$$

இருபக்கங்களையும் 1லிருந்து கழித்தால்

$$[1 - P\{|X-m| \geq k\sigma\} = P\{|X-m| < k\sigma\} \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

எனக்கிடைக்கிறது.

தேற்றம்

X தொடர் மாறியாக இருக்கும்போது நிறுவப்பட்டுள்ளது.

X தனித்த மாறியாலும் இவ்வாறே நிறுவலாம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

1. ஒரு பகடையை வீசும்போது கிடைக்கும் புள்ளிமுகம் xற்கு ஷெபிசேவின் சமனின்மை $P\{|X-E(X)| > 2{\cdot}5\} < {\cdot}47$ எனத்தருகிறது. ஆனால் நிகழ்தகவின் சரியான மதிப்பு பூஜ்யம் என நிறுவுக.

$$E(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \quad 3{\cdot}5$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{1}{6}\ [1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2] - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

$$\therefore \quad \sigma = \sqrt{\frac{35}{12}} = 1{\cdot}7\ ; \quad 2{\cdot}5 = 1{\cdot}464\sigma = 1.5\sigma$$

ஷெபிசேவின் சமனின்மை $P\{\,|\,x - E(x)\,|\,\} > 2{\cdot}5$

$$= P\left\{\,|\,x - E(x)\,| > \frac{3}{2}\,\sigma\right\} < \frac{4}{9} < {\cdot}47.$$

x-ன் மீப்பெருமதிப்பு 6 ஆதலால் $x - E(x)$-ன் மீப்பெரு மதிப்பு $= 6 - 3{\cdot}5 = 2{\cdot}5$. எனவே $2{\cdot}5$-ஐவிட அதிகமான வேறுபாடு நிகழ்வதற்கு நிகழ்தகவு பூஜ்யம்

அதாவது $P\{\,|\,x - E(x)\,| > 2{\cdot}5\,\} = 0$

ஆனால் ஷெபீசேவின் சமனின்மைப்படி இந்நிகழ்தகவு 47-ஐவிடக் குறைவானது.

எ.கா. பெருக்குத் தொடர்பரவல் $f(x) = 2^{-x}, x = 1, 2, 3 \ldots\ldots$

ஷெபீசேவின் சமனின்மை $P[\,|\,x - 2\,| > 2] < \frac{1}{2}$ எனத் தருகிறது. ஆனால், அதன் உண்மையான மதிப்பு $\frac{1}{16}$ எனக் காட்டுக.

$$E(x) = \sum_{1}^{\infty} x{\cdot}2^{-x} = 1{\cdot}2^{-1} + 2{\cdot}2^{-2} + 3{\cdot}2^{-3} + \ldots\ldots$$

$$= 2^{-1} [1 + 2 \cdot 2^{-1} + 3\, 2^{-2} + \ldots\ldots]$$

$$= 2^{-1} \left[1 - \frac{1}{2}\right]^{-2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\right]^{-2} = \frac{4}{2} = 2.$$

x-ன்ன் பரவற்படி $E(x^2) - [E(x)]^2$.

$$E(x^2) = \sum_{1}^{\infty} x^2 \cdot 2^{-x}.$$

$$= \left(1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^2} + 3^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \ldots\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^3} = 6.$$

·ன் பரவற்படி $6 - 4 = 2$.

$$\sigma = \sqrt{2}$$

$$P\left\{|x - E(x)| > k\sigma\right\} < \frac{1}{k^2}$$

$k = \sqrt{2}$, $E(x) = 2$, $\sigma = \sqrt{2}$ என்றால்.

$$P\left\{|x - 2| > 2\right\} < \frac{1}{2}$$

$$P[|x| > 4] = P(x = 5] + P[x = 6] + \ldots\ldots$$

$$2^{-5} + 2^{-6} + \ldots\ldots$$

$$\frac{2^{-5}}{1 - 2^{-1}} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{16}$$

எ.கா. கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்புகள்.

(அ) $f(x) = 1,\ 0 \le x \le 1.$

$$(ஆ)\ f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} [-\infty < x < \infty]$$

$P[\,|x - E(x)| > 1\cdot5\, \sigma_x]$-ஐக் காண்க.

ஷெபிசேவின் சமனின்மைதரும் மதிப்புடன் இதனை ஒப்பிடுக.

$$E(x) = \int_0^1 x \cdot dx = \frac{1}{2}$$

$$E(x^2) = \int_0^1 x^2 \cdot dx = \frac{1}{3}$$

$$x\text{-ன் பரவற்படி} = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\sigma_x = \cdot 2887$$

$$P\left\{|x - E(x)| > 1\cdot5\,\sigma_x\right\} = \left\{|x - \tfrac{1}{2}| > \cdot433\right\}$$

$$P\left\{|x - \tfrac{1}{2}| > \cdot433\right\} = 1 - \left\{P\left[|x - \tfrac{1}{2}| < \cdot433\right]\right\}$$

$$= 1 - P[\cdot067 < x < \cdot933]$$

$$1 - \int_{\cdot067}^{\cdot933} dx = 1 - (x)_{\cdot067}^{\cdot933}$$

$$= 1 - \cdot866$$

$$= \cdot134 \text{ (தோராயமாக).}$$

ஷெபிசேவின் சமனின்மைப்படி $k = 1\cdot5$ என்றால்

$$P[\,|x - E(x)| > 1\cdot5\,\sigma_x] < \frac{1}{(1\cdot5)^2} = \cdot444 \text{ (தோராயமாக)}$$

(ஆ) $E(x) = m$

x-ன் பரவற்படி σ^2

$P\{|x - m| > 1{\cdot}5\,\sigma\}$

$P\left\{\left|\frac{x-m}{\sigma}\right| > 1{\cdot}5\right\}$

$= 1 - P[-1{\cdot}5 < t < 1{\cdot}5] \quad \left(t = \frac{x-m}{\sigma}\right)$

$$= 1 - \int_{-1\cdot5}^{-1\cdot5} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt$$

$= 1 - 2\,({\cdot}4332)$ (இயல்நிலைப்பரவலின் பரப்புப்பட்டியிலி லிருந்து)

$= 1 - {\cdot}8664$

$= {\cdot}1336$

$$P\left\{\left|x - m\right| > 1{\cdot}5\,\sigma_x\right\} < \frac{1}{(1{\cdot}5)^2} = {\cdot}444$$

எ.கா. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் அடர்த்திச் சார்பு, $x \geq 0$ ஆக இருக்கும்பொழுது, e^{-x} ஆக இருக்கிறது. ஷெபிசேவின் சமனின்மை $P[|x - 1| > 2] < \frac{1}{4}$ எனத் தருகிறது. ஆனால் நிகழ்தகவின் சரியான மதிப்பு e^{-3} என நிறுவுக.

$$P\left\{\left|x - 1\right| > 2\right\} < \frac{1}{4} \quad P\left\{\left|x - 1\right| > 2\right\}$$

$= 1 - P\{|x-1| < 2\} = 1 - P\{-2 < x - 1 < 2\}$
$x \geq 0$ என்பதால்,

$$= 1 - P\{-1 < x < 3\}$$

$$P[0 \leq x \leq 3] = \int_0^3 e^{-x} \cdot dx$$

$$= -[e^{-3} - 1]$$

∴ தேவையான நிகழ்தகவு $= 1 - (1 - e^{-s}) = e^{-s}$

$$P\left[\left|x - 1\right| > 2\right] < \frac{1}{4}$$

$$E(x) = \int_0^\infty e^{-x}\, x \cdot dx = 1$$

$$E(x^2) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^2 \cdot dx = 2.$$

$$\sigma^2 = 2 - 1 = 1.$$

எனவே ஷெபிசேவின் சமனின்மைப்படி

$$P\left\{\left|x - 1\right| > 2\right\} = P\left\{\left|x-1\right| > 2\sigma\right\} < \frac{1}{2^2}$$

$$< \frac{1}{4}$$

எ.கா. x எனும் ஒருமாறி குறை குறியில்லாத மதிப்புகளை $E(x)$ எனும் கூட்டுச்சராசரியோடு ஏற்கிறது. t ஒரு நேர் எண்ணுனல் $P(x \geq t) \leq \frac{1}{t} E(x)$ இதனின்று ஷெபிசேவின் சமனின்மையை நிறுவுக.

$$E(x) = \int_0^\infty x\,dP = \int_0^t x\,dP + \int_t^\infty x\,dP \geq \int_t^\infty x\,dP$$

$$\geq t \int_t^\infty dP \geq t \cdot P(x \geq t)$$

$$P[x \geq t] \leq \frac{1}{t} \cdot E(x) \ldots\ldots I$$

x-ற்குப் பதிலாக $[x - E(x)]^2$ எனும் நேர்க்குறி. எண்ணைப் பிரதியிட்டால், $[x - E(x)]^2$-ன் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு σ^2 ஆகும்.

t-க்கும் பதிலாக $t^2 \sigma^2$ என t-ல் எழுதினுல்

$$P\left\{[x - E(x)]^2 \geq t^2 \sigma^2\right\} \leq \frac{1}{t^2 \sigma^2} \cdot \sigma^2$$

$$P\left\{| x - E(x) | \geq \sigma t\right\} \leq \frac{1}{t^2}$$

இதுவே ஷெபீசேவின் சமனின்மை.

எ.கா. ஒரு சமச்சீரான பகடை 200 முறைகள் வீசப்படுகிறது. 80-லிருந்து, 120-க்குள் ஒற்றைப்படை எண்கள் கிடைப்பதற்குரிய நிகழ்தகவின் கீழ்வரம்பைக் காண்க.

ஒரு பகடையை வீசும்போது ஒற்றைப்படை எண் கிடைப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2}$

$$E(x) = 200 \times \frac{1}{2} = 100$$

$$\sigma_x^2 = 200 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 50.$$

ஷெபீசேவின் தேற்றப்படி,

$$P\left\{ | x - 100 | < \sqrt{50}\, k \right\} \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$P\left\{100 - k\sqrt{50} < x < 100 + k\sqrt{50}\right\} \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$\therefore \quad (100 - k\sqrt{50},\ 100 + k\sqrt{50}) = (80, 120)$$

$$\therefore \quad k\sqrt{50} = 20$$

$$50k^2 = 400 \qquad \therefore \quad k = 2\sqrt{2}$$

எனவே தேவையான நிகழ்தகவு $\geq 1 \quad \frac{1}{8}$

$$\geq \frac{7}{8}$$

எனவே நிகழ்தகவின் கீழ் வரம்பு $= \frac{7}{8}$

எ.கா ஒரு தலைச் சார்பற்ற நாணயமொன்றை வீசும்போது கிடைக்கும் தலைகளின் விகிதம் ·4-ற்கும், ·6-ற்கும் இடையே இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு குறைந்தது ·90 ஆக இருக்க, எத்தனை முறைகள் நாணயத்தை வீச வேண்டும் ?

n சோதனைகளில் x தலைகள் கிடைத்தால், தலைகளின் விகிதசமம் $= \frac{x}{n}$.

$$E\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} E(x) = \frac{1}{n} np \quad [\because \ x\text{-ன் நிகழ்தகவு } p \text{ மாறிலி}]$$

$$\sigma^2\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sigma^2 x = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$$

$$P\left\{\left|\frac{x}{n} - p\right| \leq k\sigma\right\} \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$k\sigma = \epsilon \qquad \therefore \frac{1}{k^2} = \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

$$\therefore \ P\left\{\left|\frac{x}{n} - p\right| \leq \epsilon\right\} \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

$$p(1-p) \leq \frac{1}{4}$$

$$P\left\{\left|\frac{x}{n} - p\right| \leq \epsilon\right\} \geq 1 - \frac{1}{4n\epsilon^2}$$

$$\left|\frac{x}{n} - p\right| = \left|\cdot 4 - \cdot 5\right| = \left|\cdot 6 - \cdot 5\right| = \cdot 1$$

$$\therefore \ P\left\{\left|\frac{x}{n} - p\right| \leq \cdot 1\right\} \geq 1 - \frac{1}{4n\epsilon^2}$$

நிகழ்தகவு 9 எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$1 - \frac{1}{4n\epsilon^2} = \cdot 9 \quad \text{ஆனால், } \epsilon = \cdot 1$$

$$\cdot 1 = \frac{1}{4 n (\cdot 1)^2} \qquad \therefore \quad n = \frac{1}{(\cdot 1)^2\, 4} = 250.$$

எனவே நாணயம், 250 முறைகள் வீசப்படவேண்டும்.

குறிப்பு : $k \leq 1$ ஆக இருக்கும் போது, ஷெபீசேவின் சமனின்மை பயனற்றது.

ஷெபீசேவின் சமனின்மை $p\{\,|x-m| < k\sigma\,\} \geq 1 - \frac{1}{k^2}$

$k < 1$ ஆனால் $p\{\,|x-m| < k\sigma\,\} >$ ஒரு குறை குறியுடைய எண்

$k = 1$ ஆனால் $p(\,|x-m| < k\sigma) \geq 1 - 1$

≥ 0

இங்கு ஷெபீசேவின் சமனின்மை $m \pm k\sigma$-க்கு வெளியே x அமைய நிகழ்தகவின் மீச்சிறு மதிப்பு பூஜ்யம் எனத் தருகிறது. சமனின்மையைப் பயன்படுத்தாமலேயே நிகழ்தகவின் மீச்சிறு மதிப்பு பூஜ்யம் என நாம் அறிவோம், எனவே $k \leq 1$ எனும் போது ஷெபீசேவின் சமனின்மை பயன்படாது.

எ,கா, (அ) $m = \sigma$, $\sigma = 2$ என இருக்கும்போது, $P[\,|X-6| < k] \geq 99$ ஆக இருப்பதற்கான, k-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$P[\,|\;\; - m| < k\sigma] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$ (ஷெபீசேவின் சமனின்மை)

$m = 6 \quad \sigma = 2$

$$P\left[\,|x-6| < \frac{k}{2}\cdot 2\right] \geq 1 - \frac{1}{\left(\frac{k}{2}\right)^2}$$

$$1 - \frac{1}{\frac{k^2}{4}} = \cdot 99$$

$$\therefore \quad \frac{4}{k^2} = \cdot 01$$

$k^2 = 400$

$k = 20$

(ஆ) $m = 0, \sigma = 1$ எனும்போது, $P\{|X| \geq 5\}$-ன் மீப்பெரு மதிப்பென்ன?

$$P\{|X| \geq 5\} = P\{|X - m| \geq 5\sigma \leq \frac{1}{25}$$

$$(m = 0, \sigma = 1)$$

ஷெபிசேவின் சமனின்மையின்படி,

இங்கு $k = \frac{1}{5}$

$\therefore$ தேவையான நிகழ்தகவின் மீப்பெரு மதிப்பு $= \frac{1}{25}$

பேரெண்களின் விதி (வலுவற்ற)(Weak law of large numbers)

$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்பவை n சமவாய்ப்பு மாறிகள். $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ என்பவை முறையே அவற்றின் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்புகள்.

$B_n = V(x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n)$, வரையுற்றது. (Finite) ஷெபிசேவின் சமனின்மையைக் கூட்டுத்தொகை $x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n$-ற்கும் பொருத்தினால்,

$$P\{(x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n - a_1 - a_2 \ldots\ldots - a_n)^2 \leq B_n t^2\}$$

$> 1 - \frac{1}{t^2}$ ஆக உள்ளது.

அதாவது

$$P\{-t\sqrt{B_n} \leq [x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n - a_1 - a_2 - \ldots\ldots - a_n] \leq t\sqrt{B_n}\} > 1 - \frac{1}{t^2}$$

$$= P\left\{-t\sqrt{\frac{B_n}{n^2}} \leq \left[\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n}\right] \leq t\sqrt{\frac{B_n}{n^2}}\right\} > 1 - \frac{1}{t^2}$$

t-யை ஏதேனும் ஒரு நேர் எண்ணாகக் கொண்டால், இந்த சமனிலிகளுக்குரிய நிகழ்தகவு $> 1 - \frac{1}{t^2}$

ϵ ஏதேனும் ஒரு நேர் எண்ணாக இருக்கட்டும். $t\sqrt{\frac{B_n}{n^2}} = \epsilon$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad t^2 = \frac{n^2 \epsilon^2}{B_n}$$

$$\therefore \quad P\left\{ \left| \frac{x_1 + x_2 + \dots\dots + x_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \dots\dots + a_n}{n} \right| \leq \epsilon \right\}$$

$$> 1 - \frac{B_n}{n^2 \epsilon^2}$$

B_n வரையுற்ற எண்ணாதலாலும், ϵ ஏதேச்சையாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சிறிய எண்ணாதலாலும், n முடிவிலியை அணுகும் போது $\frac{B_n}{n^2}$ பூஜ்யத்தை அணுகுகிறது. ϵ, η எனும் ஏதேனும் இரு சிறு நேர் எண்களைத் தேர்ந்தெடுத்த பிறகு, $\frac{B_n}{n^2 \epsilon^2} < \eta$ என்பது, $n > n_0$ எனும் சமனின்மையை நிறைவுபடுத்தும், n-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும், பொருந்துமாறு n_0 எனும் எண்ணைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம்,

எனவே $n > n_0$ ஆக அமையும் n-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்,

$$P\left\{ \left| \frac{x_1 + x_2 + \dots\dots + x_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \dots\dots + a_n}{n} \right| \leq \epsilon \right\}$$

$$> 1 - \eta$$

இதிலிருந்து கீழ்க்கண்ட தேற்றம் உருவாகிறது.

" ஒன்றை, எத்துணை அருகாமையில் அணுக விரும்புகிருமோ, அத்துணை அருகாமையில் நிகழ்தகவு அணுகும்போது,

1. மாறிகளின் எண்ணிக்கை போதுமான அளவு அதிகமாகவும்,

2. n முடிவிலியை நெருங்கும்போது, $\frac{B_n}{n^2}$ பூஜ்யத்தை நெருங்குகிறது எனவும், இருக்கும் போது, n சமவாய்ப்பு மாறிகள் ஏற்கும் மதிப்புகளின் கூட்டிடைக்கும், அவற்றின் எதிர் பார்த்தலின் கூட்டிடைக்கும் உள்ள வேறுபாடு, கொடுக்கப் பட்டுள்ள ஏதேனும் ஒரு எண் எவ்வளவு சிறியதாக இருப்பினும், அதைவிடக் குறைவாக இருக்கும். "

இதுவே பேரெண்களின் விதியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு கணக்கு 1

x_i, i, $-i$. எனும் இரு மதிப்புகளையும் சம நிகழ்தகவுகளுடன் பெறுகிறது. x , x_2, x_3, ... என்பவை பெரிய எண்களின் விதியைப் பின்பற்றுது என நிறுவுக.

$$P(x_i = i) = \frac{1}{2}.$$

$$P(x_i = -i) = \frac{1}{2}.$$

$$E(x_i) = \frac{1}{2}(i) + \frac{1}{2}(-i) = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \ldots \ldots$$

$x = x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n$ என்க.

$$\therefore \quad E(x) = 0.$$

$$E(x_i^2) = \frac{1}{2}i^2 + \frac{1}{2}(-i)^2 = i^2.$$

$$B_n = E(x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n)^2$$

$$E(x_1^2) + E(x_2^2) + \ldots\ldots + E(x_n)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E\,(x_i^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} i^2 + \frac{1}{2} i^2\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$\frac{B_n}{n^2} = \frac{1}{6n}\,(n+1)\;(2n+1)$$

எல்லை $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{B_n}{n^2} = 0$

எனவே பேரெண்களின் விதியை இங்கு பயன்படுத்த முடியாது.

எ. கா. 2

$X_1, X_2, \ldots\ldots$ என்பவை ஒரு மாதிரிப்பரவலை உடைய n சார்பற்ற சமவாய்ப்பு மாறிகள். அவற்றின் கூட்டுச்சராசரி m. பரவற்படி முடிவுள்ளது. (finite)

$S_n = X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n$ ஆனால் $[S_n]$ எனும் தொடர் முறைக்குப் பேரெண்களின் விதி பொருந்தாது என நிறுவுக.

மாறிகள் $S_1, S_2 \ldots\ldots S_n$ ஆகும்.

$B_n = (S_1 + S_2 + \ldots\ldots + S_n)$-ன் பரவற்படி.

$$= V\,[X_1 + (X_1 + X_2) + (X_1 + X_2 + X_3) + \ldots\ldots + (X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n)]$$

$$= V\,[nX_1 + (n-1)\,X_2 + \ldots\ldots + 2X_{n-1} + X_n]$$

$$= n^2\;V\,(X_1) + (n-1)^2\;V\,(X_2) + \ldots\ldots + 2^2\,V\,(X_{n-1}) + 1^2\,V\,(X_n)$$

[$\because$ $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ சார்பற்ற மாறிகளாதலால் அவற்றின் உடன் மாறுபாடு பூஜ்யமாகும்].

மாறிகள் யாவும் ஒத்த பரவலுடைய ஆதலால் (identically distributed)

$$V(x_i) = \sigma^2 \text{ (}i\text{-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்)},$$

$$B_n = (1^2+2^2+ \cdot +n^2)\,\sigma^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\sigma^2$$

$$\frac{B_n}{n^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n}\sigma^2 \to \infty \text{ as } n \to \infty.$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)(2n+1)}{6}$$

எனவே பேரெண்களின் விதி இங்கு பொருந்தாது.

பயிற்சி

1. சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் கூட்டிடை 5, பரவற்படி 3.

(a) l-ன் எந்த மதிப்பிற்கு $\{P \mid x-5 \mid < l\} \geq 99$ என்பது உண்மையாகும்?

(l) கீழ்க்காணும் நிகழ்தகவுகளின் மீச்சிறு மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $P \mid x-5 \mid < 3.$

(ii) $P \mid x-5 \mid < 7{\cdot}5.$

(iii) $P[-1 < X < 11].$

2. ஒரு பகடையை 12,000 முறை வீசும் போது புள்ளிமுகம் 5, 1850 லிருந்து 2150 தடவைகள் வரை கிடைப்பதற்குரிய நிகழ்தகவினைக் கணக்கிடுக.

3. ஒரு தலைச் சார்பற்ற நாணய மொன்றை வீசும் போது கிடைக்கும் தலைகளின் விகிதம் 3-க்கும், 7-க்கும் இடையே இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு குறைந்தது 95 ஆக இருக்க, எத்தனை முறைகள் நாணயத்தை வீசவேண்டும்?

4. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 எனும் ஒன்றையொன்று தவிர்க்கும் மதிப்புகளைச் சம நிகழ்தகவுகளுடன் ஏற்கிறது. $[P-(x-4 \mid \geq 3]$ கணக்கிட்டு அதனை ஷெபீசேவின் சமனின்மை தரும் மதிப்புடன் ஒப்பிடுக.

5. ஒரு தலைச் சார்பற்ற நாணயமொன்று 100 முறைகள் சுண்டப்படுகிறது. தலைகளின் எண்ணிக்கை 30-ற்கும், 70-ற்கும் இடையில் இருப்பதற்கு நிகழ்தகவு ·93-யை விட அதிகமானது எனக்காட்டு.

6. X_n, 1, 0 எனும் மதிப்புகளை முறையே p_n, $1 - p_n$ எனும் நிகழ்தகவுகளுடன் ஏற்கிறது (X_n) எனும் தொடர் முறைக்குப் பேரெண்களின் வலுவற்ற விதியைப் பயன்படுத்த முடியுமா என ஆராய்க.

[X_n மாறிகள் சார்பற்றவை].

7. [X_k] $k = 1, 2$ ...... என்பவை சார்பற்ற சமவாய்ப்பு மாறிகளின் தொடர். அவை ஒவ்வொன்றும் $-1, 0, 1$ எனும் மதிப்புகளை ஏற்கின்றன

$$P(X_k = 1) = \frac{1}{k} = P(X_k - = 1)$$

$$P(x_k = 0) = \frac{1 - 2}{k}$$

பேரெண்களின் விதியை இந்த தொடர்முறைக்குப் பொருத்த முடியுமா என ஆராய்க.

8. X எனும் மாறி $(-1, 1)$ எனும் இடைவெளியில் செவ்வகப் பரவலைச் சார்ந்துள்ளது.

$$P\left[\frac{|X - E X)}{\sigma_x} \gtrless 2\right]$$ யைச் ஷெபிசேவின் சமனின்மை

தரும் நிகழ்தகவின் மேல் வரம்புடன் (upper bound) இதனை ஒப்பிடுக.

9. $dp = y_0 \; e^{-} . \; x^{k} dx, 0 \leq x \leq \infty$ எனும் பரவலில் y_0 மாறிலி $k \geq 0$, $P[\,|x - E(x)| > 2\sigma]$ வைக் கண்டு பிடித்து, இதனை ஷெபிசேவின் சமனின்மை தரும் மதிப்புடன் ஒப்பிடுக.

10. x, i^{α}, $i^{-\alpha}$ எனும் இரு மதிப்புகளை மட்டும், சம நிகழ்தகவுகளுடன் பெறுகிறது. $\alpha < \frac{1}{2}$ ஆக இருந்தால் பெரிய எண்களின் விதியை x, x, ... x n-ற்குப் பயன்படுத்த முடியாது என நிறுவுக.

11. ஒரு குறிப்பிட்டரக விதைகளில், விதைப்பவற்றில் சராசரி $\frac{2}{3}$ பகுதி முளை விடுகின்றன. ஷெபீசேவின் சமனின்மையைப் பயன்படுத்தி, 100 விதைகள் விதைக்கும்போது முளை விடுகின்ற விதைகள் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பை விட 10-ற்கு மேல் வேறுபடாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

12. $m = 0, \sigma = 2$ ஆக இருக்கும்போது,

$P\{ |x| \leq 3 \}$ன் மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்க.

13. $P[|X| \leq \ ] \geq \cdot 96$ ஆனால், $m = 0, \sigma = 1$

ஆக இருக்கும் போது k-ன் மதிப்பைக் காண்க.

14. $m = 8, \sigma = 2$ ஆக இருக்கும்போது

$P\{ |X - 8| > 2 \}$, $P\{ |X - 8| > 3 \}$-ன் மீப்பெரு மதிப்பைக் காண்க.

15. $X, m \pm k\sigma$-ற்கு வெளியே இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு (1) $\cdot 01$ (2) $\cdot 025$ ஆக இருக்க k-ன் மதிப்புகளைப் பெறுக.

11. ஈருறுப்புப் பரவல்

(BINOMIAL DISTRIBUTION)

புள்ளியியல் துறையின் பல்வேறு பகுதிகளில் பெருமளவில் பயன்படுத்தப்படும், ஒரு தனித்த மாறியின் பரவலே ஈருறுப்புப் பரவல். இதனை 17-ம் நூற்றூண்டின் இறுதியில் ஜேம்ஸ் பெர்னேலி என்பவர் கண்டறிந்ததால், " பெர்னேலியன் பரவல் " என்றும் அழைப்பதுண்டு

p என்பதை ஒரு நிகழ்ச்சி நடை பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவாகக் கொள்வோம். ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்போது தலை பெறுவதையோ, இரு பகடைகளை வீசும்போது 9 கிடைப்பதையோ ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து 6 சீட்டுகள் எடுக்கும்போது குறைந்தது 2 ராஜா சீட்டுகள் எடுப்பதையோ நாம் வெற்றியெனக் கொண்டால், p யின் மதிப்புகள் முறையோ $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{4C_2\,48C_4 + 4C_3\,48C_3 + 4C_4\,48C_2}{52C_6}$ என்று அமையும். சில சூழ்நிலைகளில், முன் கூட்டியே நிகழ்தகவைத் தீர்மானிக்க இயலாத, நடை முறையில் காணும் நிகழ்ச்சிகளையும் எடுக்கக் கூடும்.

வெற்றியின் நிகழ்தகவு p ஆனல் நிகழ்ச்சி நடக்காமலிருப்பதன் (தோல்வியின்) நிகழ்தகவு

$$= 1 - p = q \text{ எனக் கொள்வோம்.}$$

n முயற்சிகளில், ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி $0, 1, 2, \ldots r \ldots n$ தடவைகள் நடப்பதற்குரிய (வெற்றிக்குரிய) நிகழ்தகவு முறையே q^n, $nC_1\, q^{n-1}\, p$, $nC_2\, q^{n-2}\, p^2 \ldots n\, C_r\, q^{n-r}\, p^r \ldots n\, C_n\, p^n$ என நாம் அறிவோம். இவை $(p+q)^n$ என்ற ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் விரிப்பில் அடுத்தடுத்து வரும் உறுப்புக்களாகும். எனவே இந் நிகழ்தகவுப் பரவலை ஈருறுப்பு நிகழ்தகவுப் பரவல் என்கின்றேம்.

$$\sum_{x=0}^{n} n\,C_x\, p^x\, q^{n-x} = (q+p)^n = 1$$

∴ ஈருறுப்புப் பரவலின் நிகழ்தகவுச் சார்பு

$f(x) = n\,C_x\, p^x\, q^{n-x}$; x-ன் மதிப்பு முழு எண்ணுகவே இருப்பதனுல், இது ஒரு சம வாய்ப்பு மாறியின் தொடர் பற்ற பரவல் ஆகும்.

ஈருறுப்புப் பரவல் விதியைக் கீழ்க்கண்ட நிலைகளில் பயன் படுத்தல் வேண்டும்.

1. ஒரு முயற்சி வெற்றி அல்லது தோல்வியில் முடிகிறது.

(உ-ம்) ஒரு தலைச் சார்பற்ற ஒரு நாணயத்தை வீசும்போது தலை அல்லது பூ விழும். இவை இரண்டும் இல்லாது நாணயம் தன் விளிம்பின் மேல் செங்குத்தாக நிற்கும் நிலையை ஒதுக்கி விடுகிருேம்.

2. வெற்றியின் நிகழ்தகவு p முயற்சிக்கு முயற்சி மாறு படாமல் உள்ளது.

3. முயற்சிகள் தம்முள் சார்பற்றவை (இரண்டாவது முயற்சியில் அடையும் வெற்றி தோல்வி, முதல் முயற்சியில் வெற்றி தோல்வி பொறுத்து அமைவதில்லை,

ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்பளவைகள் இரண்டு. அவை p, n ஆகும். இவற்றின் 'மதிப்புகள் வெவ்வேறு ஈருறுப்புப் பரவல் களுக்கு வெவ்வேருக இருக்கும். r, சோதனைகளின் எண்ணிக்கை யாதலால், தனித்த மாறியாகும். இது 1, 2, 3 எனும் விடுபட்ட (isolated) மதிப்புகளைத் தான் ஏற்கும் p யின் மதிப்பு .0 விலிருந்து 1க்குள் அமைந்துள்ள எந்த எண்ணுகவும் இருக்கக் கூடுமாதலால் அது ஒரு தொடர் மாறி.

$p = q = \frac{1}{2}$ ஆனுல், ஈருறுப்புப் பரவல் சமச்சீருடையது

p யின் மதிப்பு $\frac{1}{2}$ யிலிருந்து விலகிச் செல்லச்செல்ல, பரவல் கோட்ட முடையதாக மாறுகிறது.

1. ஈருறுப்புப் பரவலுக்கு சில எடுத்துக் காட்டுகள்

1. ஒரு பகடையை வீசுதல் (ஒற்றைப் படை அல்லது இரட்டைப் படை எண்ணைப் பெறுதல்.)

2. ஒரு மாணவனது கணிதத்தேர்வின் முடிவு. (வெற்றி அல்லது தோல்வி)

3 தொழிற்சாலையில் உற்பத்தியாகும் திருகுகளில் ஒன்றைத் தேர்ந்தெடுத்தல் (குறையுள்ளது அல்லது குறையற்றது).

n முயற்சிகளை ஒரு பரிசோதனையாகக் கருதி, அப்பரிசோதனையை *N* தடவைகள் திரும்பத் திரும்பச் செய்தால், ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி 0, 1, 2, ... *r* ... *n* தடவைகள் நிகழ்வதற்குரிய (வெற்றிக் குரிய) நிகழ்வெண்களை முறையே $N\ (q+p)^n$ எனும் விரிப்பில் அடுத்தடுத்து வரும் உறுப்புகள் மூலம் பெறலாம்.

எடுத்துக் காட்டாக, ஒவ்வொரு முறையும் 8 நாணயங்களைச் சுண்டுவதை ஒரு பரிசோதனையாகக் கொண்டு இதனை 256 முறைகள் திரும்பத் திரும்பச் செய்தால் நாணயங்களில் 0,1,2 ... 8 தலைகள் வருவதற்குரிய நிகழ்வெண்கள் முறையே $256\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^8$ எனும் விரிப்பின் கோவைகள் மூலம் கிடைக்கும்.

ஈருறுப்புப் பரவலின் பட்டியல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை	நிகழ்தகவு	நிகழ்வெண்
0	q^n	$N\cdot q^n$
1	$n\,C_1\, q^{n-1}\, p$	$N\cdot\, {}_{n}C_1\, q^{n-1}\, p$
2	$n\,C_2\, q^{n-2}\, p^2$	$N\cdot n\, C_2\, q^{n-2}\, p^2$
—	—	—
—	—	—
—	—	—
r	$u\,C_1\, q^{n-r}\, p^r$	$N\cdot n\, C_r\, q^{n-r}\, p_r$
—	—	—
—	—	—
—	—	—
n	p^n	$N\,p^n$
மொத்தம்	$(q+r)^n = 1$	$N\,(q+p)^n = 1$

ஈருறுப்புப் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி

$$\bar{x} = \Sigma \frac{f(x)\, x}{N}$$

இங்கு $f(x) = N \cdot nc_x \cdot q^{n-x}$. ஈருறுப்புப் பட்டியலில், ஒவ்வொரு நிகழ்வெண்ணும் N-இன் மடங்காக இருப்பதையும், மொத்த நிகழ்வெண் N ஆக உள்ளதையும் காண்கிறோம். வழிமுறை வசதிக்காக $N = 1$ என்று எடுத்துக் கொண்டால், $f(x) = nc_x \cdot p^x \cdot q^{n-x}$ என்றாகிறது. $f(x) = f$ எனக் குறித்தால், $\Sigma f = (q + p)^n = 1$.

$$\text{எனவே } \bar{x} = \frac{\Sigma f \cdot x}{\Sigma f} = \frac{\Sigma\, nc_x \cdot P^x \cdot q^{n-x} \cdot x}{1}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{x!\,(n-x)!} P^x \cdot q^{n-x} \cdot x$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!\,(n-x)!} P^x \cdot q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!} p^{x-1} \cdot q^{n-x} \cdot nP$$

$$= nP \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!} \cdot p^{x-1} \cdot q^{n-x}$$

$$= (np)\,[q + p]^{n-1} = nP \qquad [\because \ (q + p) = 1]$$

திட்ட விலக்கம்

$x = 0$-வை மூலப் புள்ளியாகக் கொண்டால்,

$$s^2 = \frac{\Sigma f \cdot x^2}{\Sigma f} = \Sigma f \cdot x^2$$

$x^2 = x\,(x - 1) + x$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad s^2 = \sum_{x=0}^{n} nc_x \cdot P^x \cdot q^{n-x} [x(x-1) + x]$$

$$= \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!\,(n-x)!} q^{n-x} \cdot P^{x-2} \cdot n(n-1) \cdot p^2$$

$$+ \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!} q^{n-x} \cdot P^{x-1} \cdot np$$

$$= n(n-1) P^2 (q+p)^{n-2} + np\,(q+p)^{n-1}$$

$$s^2 = n(n-1) P^2 + nP$$

$$\sigma^2 = s^2 - d^2 = [n(n-1) P^2 + nP] - n^2 P^2$$

$$[\because \quad d = \bar{x} - A = nP - 0 = nP]$$

$$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2$$

$$\sigma^2 = np(1-P) = nPq.$$

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

மூன்றும், நான்காம் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்.

$$\mu_3' = \frac{\Sigma f \cdot x^3}{\Sigma f} = \Sigma f \cdot x^3$$

$$x^3 = x(x-1)(x-2) + 3x^2 - 2x$$

$$\mu_3' = \Sigma \frac{n!}{x!\,(n-x)!} P^x \cdot q^{n-x} \cdot [x(x-1)(x-2) + 3x^2 - 2x]$$

$$= \sum \frac{(n-3)!}{(x-3)!\,(n-x)!} p^{x-3} \cdot q^{n-x} .$$

$$n(n-1)(n-2)p^3 + 3\,\Sigma f \cdot x^2 - 2\,\Sigma f \cdot x.$$

$$= n(n-1)(n-2)p^3 (q+p)^{n-3}$$

$$+ 3[n(n-1)p^2 + np] - 2np.$$

$$= n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2$$
$$+ 3np - 2np \qquad [d = \bar{x} - A = np]$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2' d + 2d^3$$
$$= n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np$$
$$- 3np[n(n-1)p^2 + np] + 2n^3p^3$$

$$= np[\ ^2 - 3n + 2)p^2 + 3(n-1)p + 1$$
$$- 3[n(n-1)p^2 + np] + 2(np)^2\ ]$$

$$= np[2p^2 - 3p + 1] = np[1-p][1-2p]$$

$$= npq[1-p-p] = npq[1-2p] = npq[q-p]$$

$$\mu_4' = \frac{\Sigma f \cdot x^4}{\Sigma f} = \Sigma f \cdot x^4$$

$$\Sigma f \cdot x^4 = \Sigma f \cdot x(x-1)(x-2)(x-3) + 6\Sigma f \cdot x^3$$
$$- 11\Sigma f \cdot x^2 + 6\Sigma f \cdot x$$

$$= \sum \frac{n!}{x!(n-x)!} x(x-1((x-2)(x-3)\ p^x \cdot q^{n-x}$$
$$+ 6[n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np]$$
$$- 11[n(n-1)p^2 + np] + 6np$$

ஆனல் $\Sigma f \cdot x(x-1)(x-2)(x-3)$

$$= \sum \frac{n!}{x!(n-x)!} x(x-1)(x-2)(x-3)p^x \cdot q^{n-3}$$

$$= \sum \frac{(n-4)!\,[(n-3)(n-2)(n-1)n]}{x!(n-x)!}$$
$$p^{x-4}q^{n-x}p^4$$

$$= n(n-1)(n-2)(n-3)p^4(q+p)^{n-4}$$

$$\mu_4' = n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 + 6n(n-1)(n-2)p^3$$
$$+ 7n)n-1)p^2 + np$$

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_3' d + 6\mu_2' d^2 - 3d^4$$

என்னும் சமன்பாட்டில் μ_1', μ_2', μ_3', μ_4'இன் மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டு சுருக்கினல்

$\mu_4 = 3n^2 p^2 q^2 + npq\,(1 - 6pq)$ என நிறுவலாம்.

β, γ-கெழுக்கள்

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{n^2 p^2 q^2 (q-p)^2}{n^3 p^3 q^3}$$

$$= \frac{(q-p)^2}{npq} = \frac{(1-2p)^2}{npq}$$

$$\gamma_1 = +\sqrt{\beta_1} = \frac{1-2p}{\sqrt{npq}}$$

$p = q = \frac{1}{2}$ ஆக இருக்கும்பொழுது கோட்டக் கெழு $\gamma_1 = 0$ எனவே பரவல் சமச்சீருடையது.

$p < \frac{1}{2}$ ஆக இருக்கும்பொழுது $\gamma_1 > 0$. வரை நேர்மறைக் கோட்டமுடையதாகும்.

$p > \frac{1}{2}$ ஆக இருக்கும்பொழுது, வரை எதிர்மறைக் கோட்ட முடையதாக அமையும்.

$p \neq q$ என்ற நிலையில் கூட, n மிகப்பெரிய மதிப்பாக அமையுமானல், $\gamma_1 = 0$.

ஆகவே பரவல் சமச்சீருடையது,

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{npq\,[1 - 6pq + 3npq]}{n^2 p^2 q^2}$$

$$= \frac{1-6pq}{npq} + 3$$

n மிகப் பெரிய எண்ணுகை இருக்கும்பொழுது $\beta_2 = 3$ ஆகும். எனவே வரை சமச்சீராக அமைகிறது.

ஈருறுப்புப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு.

$$M(\theta) = \sum_{x=0}^{n} e^{\theta x} \cdot f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{\theta x} \cdot nC_x \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} nC_x \, q^{n-x} \, (pe^{\theta})^x$$

$$M(\theta) = (q + pe^{\theta})^n$$

$$\frac{dM}{d\theta} = n(q + p\,e^{\theta})^{n-1} \cdot pe^{\theta}$$

$$\mu_1' = \left[\frac{dM}{d\theta}\right]_{\theta=0} = np\,(q+p)^{n-1} = nP \cdot$$

$$\frac{d^2M}{d\theta^2} = npe^{\theta}[\,(n-1)\,(q + p\,e^{\theta})^{n-2} \cdot pe^{\theta}] + (q + pe^{\theta})^{n-1} \cdot np \cdot e^{\theta}$$

$$= np\,e^{\theta}\,(q + p\,e^{\theta})^{n-1} + n(n-1)\,d^2\,e^{2\theta}\,(q + p\,e^{\theta})^{n-2}$$

$$\mu_2' = \left(\frac{d^2M}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} = rp\,(q+p)^{n-1} + n(n-1)\,p^2\,(q+p)^{n-2}$$

$$(q+p)^{n-2}\,[n^2p^2 - np^2 + np\,(q+p)]$$

$$= n^2p^2 - np^2 + np$$

$$\mu_3' = \left[\frac{d^3M}{d\theta^3}\right]_{\theta=0} = np \cdot e^{\theta}\,[(n-1)\,(q + p\,e^{\theta})^{-n2} \cdot p\,e^{\theta}\,]$$

$$+ (q + p\,e^{\theta})^{n-1} \cdot np\,e^{\theta} + n(n-1)p^2$$

$$\times [(n-2)(q + p\,e^{\theta})^{n-3} \cdot p\,e^{\theta} + 2e^{2\theta}(q + pe^{\theta})^{n-3}]$$

$$= np[(n-1)(q+p)^{n-1} \cdot p] + (q + p)^{n-1} \cdot np$$

$$+ n(n-1)p^2[(n-2)p(q+p)^{n-3} + 2(q+p)^{n-3}]$$

$$= n(n-1)p^2 + np + n(n-1)p^2 [(n-2)p + 2]$$

$$= n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np$$

$$\mu_4' = \left[\frac{d^4 M}{d\theta^4}\right]_{\theta=0}$$ ஆகும்

$$\mu_k = \mu_k' - kc_1\,\mu'_{k-1}\,d + kc_2\,\mu'_{k-2}\,d^2 \ldots + (-1)^k \cdot a^k$$
இச்சமன்பாட்டில்,

$\mu_1', \mu_2' \ldots\ldots \mu_k'$-வின் மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டு

$\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots \mu_k$-வின் மதிப்புகளைக் காணலாம்.

எ.கா. ஈருறுப்புப் பரவலில்

$$\mu_{r+1} = pq\left[nr\,\mu_{r-1} + \frac{d\,\mu_r}{dp}\right]$$ என நிறுவுக.

இதன்மூலம் μ_2, μ_3, μ_4 ன் மதிப்புகளைக் காண்.

$$\mu_r = \frac{\Sigma f(x-\bar{x})^r}{\Sigma f}$$

$$= \Sigma\, n\,C_x \cdot p^x . q^{n-x}(x - dp)^r,\ q = 1 - p.$$

$$\frac{d\,\mu_r}{dp} = \Sigma\, n\,C_x \,.\, x \cdot p^{x-1}\, q^{n-x}(x-np)^r$$

$$+ \Sigma\, n\,C_x\, p^x\,(n-x)^n\, q^{-x-1}(-1)(x-np)^r$$

$$+ \Sigma\, n\,C_x\, p^x\, q^{r-x}\, r(x-np)^{r-1}(-n)$$

$$= \Sigma\, n\,C_x\,(x-np)^r\, p^x\, q^{n-x}\left[\frac{x}{p} - \frac{1}{q}(n-x)\right]$$

$$- nr\,\Sigma\, n\,C_x\, p^x\, q^{n-x}(x-np)^{r-1}$$

$$= \Sigma\, n\, c_x\, (x-np)^r\, p^x\, q^{n-x} \left[\frac{qx - p\,(n-x)}{pq}\right] - nr\, \mu_{r-1}$$

$$= \Sigma\, n\, c_x\, (x-np)^r\, p_x\, q^{n-x} \left[\frac{x\,(p+q) - np}{pq}\right] - nr\, \mu_{r-1}$$

$$= \frac{1}{pq}\, \Sigma\, n\, c_x\, (x-np)^{r+1}\, p^x\, q^{n-x} - nr\, \mu_{r-1}$$

$$\therefore \frac{d\,\mu_a}{dp} = \frac{1}{pq}\, \mu_{r+1} - nr\, \mu_{r-1}$$

$$\therefore\ pq \left[\frac{d\,\mu_r}{dp} + nr\, \mu_{r-1}\right] = \mu_{r+1}$$

$$\mu_{r+1} = pq \left[nr\, \mu_{r-1} + \frac{d\,\mu_r}{dp}\right]$$

$r = 1$ ஆக இருக்கும்பொழுது

$$\mu_2 = \left[n\, \mu_8 + \frac{d\,\mu}{dp}\right] = pq\,[\,\cdot 1 + 0]$$

$$\mu_2 = n\,p\,q$$

$$\mu_8 = pq \left[2n\, \mu_{.} + \frac{d\,\mu_2}{d\,l}\right]$$

$$= pq\,[2n\cdot 0 + n\,[p\,(-1) + q]\,]$$

$$= pq\cdot n\,(q-p) = n\,p\,q\,(q-p)$$

$$\mu_4 = pq\,(3n\cdot n\,pq + n\,p\,q\,(-1-1) + (q-p)$$
$$[np\,(-1) + nq\,(-1)]$$

$$= 3n^2\, p^2\, q^2 + npq\,(q-p)^2 - 2n\, p^2\, q^2$$

$$3n^2\, p^2\, q^2 + n\,pq\,[(-2\,pq + (q-p)\,]^2$$

$$= n\,pq\,[3n\,pq - 2\,pq + q^2 + p^2 - 2\,pq]$$

$$= n\,pq\,[3n\,pq - 2\,pq + (q+p)^2 - 4\,pq]$$

$$= n\,pq\,(3n\,pq + 1 - 6\,pq)$$

$$n\,p\colon [1 + 3\,pq\,(n-2)\,]$$

ஒத்த ஈருறுப்பு மாறிகள்

$x = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots n$ என்ற மதிப்புகளை, முறையே q^n, $nC_1\, q^{n-1}p$, $nC_2\, q^{n-2}\, p^2$, ... p^n என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் ஏற்கும் மாறியே ஈருறுப்பு மாறியாகும்.

இது $B\,(n, p)$ மாறி எனவும் குறிக்கப்படுகின்றது. இங்கு n சோதனைகளின் எண்ணிக்கை, p வெற்றியின் நிகழ்தகவு இரண்டும் பண்பலகுகள்.

இரு ஈருறுப்பு மாறிகளுக்கும், வெற்றியின் நிகழ்தகவு p, ஒரே மதிப்புடையதாக இருக்குமானால் அவை ஒத்த ஈருறுப்பு மாறிகள் (like binomial variates) எனப்படுகின்றன.

எ.கா. ஒரு பகடையை வீசும்போது ஒற்றைப்படை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியும், ஒரு நாணயத்தை வீசும்போது பூ கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியும் இத்தகையவை. சார்பற்ற இரு ஒத்த மாறிகளின் கூட்டல் பண்பு :

தேற்றம்

$B\,(n_1, p)$, $B\,(n_2, p)$ என்பவை சார்பற்ற இரு ஒத்த மாறிகள் x_1, x_2 ஆனல், $x_1 + x_2$ என்பது $B\,(n_1 + n_2, p)$ என்ற ஈருறுப்பு மாறியாகும்.

நிறுவுதல்

x_1, x_2 சார்பற்ற மாறிகளாயின், அவற்றின் கூட்டுத் தொகையின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு, அவற்றின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்புகளின் பெருக்குத்தொகையாகும்.

$$M_{x_1+x_2}\;(\theta) = Mx_1\,(\theta) \cdot M_{x_2}\,(\theta)$$

$$= (q + pe^{\theta})^{n+1} \cdot (q + p\,e^{\theta})^{n_2}$$

$$= (q + pe^{\theta})^{n_1 + n_2}$$

எனவே $x_1 + x_2$-ம், விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்புகளின் மாற்றற்றத் தன்மை தேற்றத்தின்படி,

$p, n_1 + n_2$ வைப் பண்பளவைகளாகக் கொண்டு ஈருறுப்புப் பரவலைச் சார்கிறது.

எனவே $x_1 + x_2$ ஒரு $B(n_1 + n_2, p)$ மாறியாகும்.

ஈருறுப்புப் பரவலின் முகடு

ஈருறுப்புப் பரவலில் t_n, r ஆவது உறுப்பு என்றால்,

$$\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{n C_r\, q^{n-r}\, p^r}{n C_{r-1}\, q^{n-r+1}\, p^{r-1}}$$

$$= \frac{n-r+1}{r} \cdot \frac{p}{q}$$

$\dfrac{n-r+1}{r} \cdot \dfrac{p}{q} \gtreqless 1$ என்பதற்கேற்ப,

$\dfrac{t_{r+1}}{t_r} \gtreqless 1$ அமைகிறது.

$(n-r+1)\,p \gtreqless rq$ என்பதற்கேற்ப, $t_{r+1} \gtreqless t_r$.

$(n+1)\,p \gtreqless r\,(q+p)$ என்பதற்கேற்ப $t_{r+1} \gtreqless t_r$.

$(n+1)\,p \gtreqless r\ [\because (p+q) = 1]$

$$r \gtreqless (n+1)\,p$$

நிலை 1

$(n+1)\,p$ ஒரு முழு எண்ணாக இல்லாமல், $(n+1)\,p = I$ (முழு எண்) $+ F$ (பின்னம்) ஆக இருக்கட்டும்.

r-க்கு 0, 1, 2, ... I, ... என்னும் மதிப்புகளைக் கொடுத்தால், r-ன் மதிப்பு 0, 1, 2, 3, ... I, வரை $r < (n+1)\,p$

$\therefore\ t_{r+1} > t_r$

$t_1 < t_2 < t_3 < \dots\dots < t_{I-1} < t_I < t_{I+1} > t_{I+2} > t_{I+3} > \dots\dots\dots$ எனப் பெறுகிறோம்.

எனவே t_{I+1} மிகப் பெரிய உறுப்பு.

இதில் x-ன் மதிப்பு I ஆகும்.

எனவே $(n+1)\,p$-ன் முழு எண் பகுதியே (Integral part) பரவலின் முகடு ஆகும்.

நிலை 2

$(n+1)\,p =$ முழு எண் I ஆனால் $r < n+1$

$0, 1, 2, \ldots\ldots I-1$ வரை $r < (n+1)\,p$

$r = I$ எனில் $r = (n+1)\,p$.

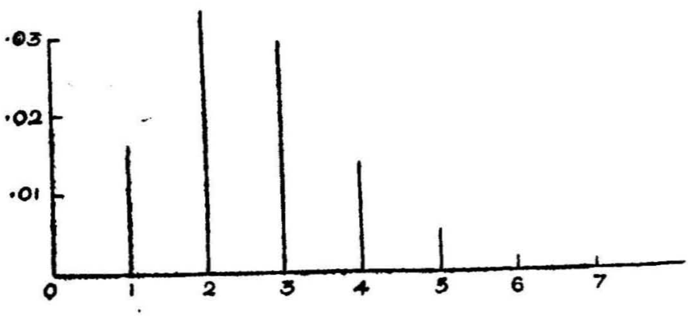
$t_1 < t_2 < t_3 < t_4 \ldots\ldots < t_I = t_{I+1} > t_{I+2} > t_{I+3} \ldots\ldots$

$r = I$ எனில் $r = (n+1)\,p$.

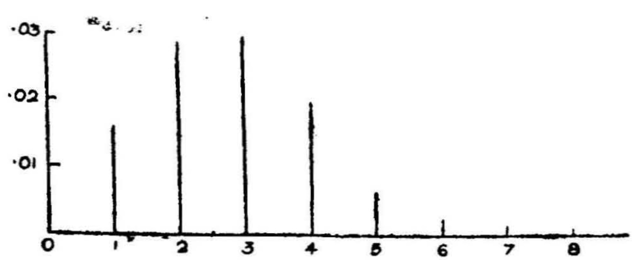
$r = I+1, I+2, \ldots\ldots r > (n+1)\,p$.

$t_I = t_{I+1}$ மிகப் பெரிய உறுப்புகள்.

ஆதலால் அவற்றிற்குரிய x-ன் மதிப்புகள் $I-1$, I ஆகும். பின்வரும் படங்கள் இத்தகைய ஈருறுப்புப் பரவலைக் காட்டுகின்றன.



படம் 11·1



படம் 11·2

இவ்வாறு இருக்கும்பொழுது முகட்டின் மதிப்பு $I - \frac{1}{2}$ எனக் கொள்வது மரபு.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

$n = 24, p = \frac{1}{3}$ என அமைந்த ஒரு ஈருறுப்புப் பரவலின், கூட்டுச்சராசரியினையும் முகட்டினையும் காண். [செ.ப. '70]

ஈருறுப்பு பரவலின் கூட்டுச்சராசரி $\bar{x} = np = 24 \times \frac{1}{3} = 8$

முகடு $= (n + 1) p = 25 \times \frac{1}{3} = 8\frac{1}{3}$

இங்கு $(n + 1) p$ பின்னமாக உள்ளதால், அதன் முழு எண் பகுதியே முகடு ஆகும்.

$\therefore$ முகடு $= 8$.

ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி விலக்கம்

ஈருறுப்புப் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி np-ஐப் பற்றிய சராசரி விலக்கம் Z எனின்,

$$Z = \sum_{x=0}^{n} | x - np | \, p(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} | x - np | \, nc_x \, p^x q^{n-x} \qquad (x \text{ முழு எண்})$$

$$= \sum_{x=0}^{np} -(x - np) \, nc_x \, p^x q^{n-x}$$

$$+ \sum_{x=np}^{n} (x - np) \, nc_x \, p^x q^{n-x}$$

$$= 2 \sum_{x>np}^{n} (x - np) \, nc_x \, p^x q^{-n-x}$$

$$\left\{ \because \sum_{x=0}^{n} x \cdot nc_x \, p^x p^{n-x} = np \sum_{x=0}^{n} (x - np) \, nc_x \, p^x p^{n-x} = 0 \right\}$$

$$= 2 \sum_{\lambda}^{n} (x - np)\, nc_x\, p^x q^{n-x}$$ [λ என்பது $np + 1$-ல் உள்ள மீப்பெரு முழு எண்]

$$= 2 \sum_{\lambda}^{n} [x(p+q) - np]\, nc_x\, p^x q^{n-x}$$

$$= 2 \sum_{\lambda}^{n} xq\, nc_x\, p^x q^{n-x} - 2p \sum_{\lambda}^{n} (n-x)\, nc_x\, p^x p^{n-x}$$

$$= 2 \sum_{\lambda}^{n} \frac{n!}{(n-x)!\,(x-1)!} p^x q^{n-x+1}$$

$$- 2 \sum_{\lambda}^{n} \frac{n!}{x!\,(n-x-1)!} p^{x+1} q^{n-x}$$

$$= 2 \sum_{\lambda}^{n} \left\{ \frac{n!}{(n-x)!\,(x-1)!} p^x q^{n-x+1} - \frac{n!}{x!\,(n-x-)\,1!} p^{x+1} q^{n-x} \right\}$$

$$= 2 \sum_{\lambda}^{n} [t_{x-1} - t_x],$$

இங்கு $t_x = \dfrac{n!}{x!\,(n-x-1)!} p^{x+1} q^{n-x}$

$$= 2 [t_{\lambda-1} - t_n]$$

$$= 2 t_{\lambda-1} \qquad [\because\ t_n = 0]$$

$$\therefore\ Z = 2t_{\lambda-1} = 2 \frac{n!}{(\lambda-1)!\,(n-\lambda)!} p^{\lambda} q^{n-\lambda+1}$$

$$= 2npq\; {}^{n-1}c_{\lambda-1}\, p^{\lambda-1} q^{n-\lambda}$$

எ.கா. 1 லிருந்து 6 வரை புள்ளி முகங்களுடைய, 6 பகடைகள் ஒருமிக்க வீசப்படுகின்றன. 5 அல்லது 6 தோன்றுவது வெற்றியாகக் கருதப்படுகின்றது. இச்சோதனை 6561 தடவைகள் திரும்பத்திரும்பச் செய்யப்படுகிறது. ஈருறுப்புப் பரவல் விதியின் படி கணக்கியல் நிகழ்வெண்களைக் கணக்கிடுக. (அ.ப.)

பகடைகளில் 5 அல்லது 6 எனும் இலக்கங்கள் வருவது வெற்றியாதலால், $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$$q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$n = 6, \quad N = 6561.$

ஈருறுப்புப் பரவல் $= N\,(q + p)^n$

$$= 6561\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^6$$

வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை	கணக்கியல் நிகழ்வெண்
0	$6561 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6 = 576$
1	$6561 \times 6\,C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right) = 1728$
2	$6561 \times 6\,C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2160$
3	$6561 \times 6\,C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 1440$
4	$6561 \times 6\,C_4 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 540$
5	$6561 \times 6\,C_5 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^5 = 108$
6	$6561 \times 6\,C_6 \left(\frac{2}{3}\right)^6 = 9$
	மொத்தம் 6561

எ.கா. போக்குவரத்துப் பணியில் ஈடுபட்டிருக்கும் ஒரு வண்டி, நேரப்படி வருவதற்குண்டான நிகழ்தகவு 8 என்றால், 10 வண்டிகள் ஓடும் ஒரு நாளில்,

(i) ஒரு வண்டிமாத்திரம் தாமதமாக வருவதற்கு,

(ii) குறைந்தது ஒரு வண்டியாவது தாமதமாக வருவதற்கு, உண்டான நிகழ்தகவைக் கணக்கிடுக. (செ.ப. 1971)

வண்டி தாமதமாக வருவதற்குரிய நிகழ்தகவு $= p$

$$p = \frac{2}{10}$$

$$q = (1 - p) = \left(1 - \frac{2}{10}\right) = \frac{8}{10} \qquad u = 10$$

$$u = 10$$

$$\text{ஈருறுப்புப் பரவல்} = \left(\frac{8}{10} + \frac{2}{10}\right)^{10}$$

(i) ஒரு வண்டிமாத்திரம் தாமதமாக வருவதற்குரிய நிகழ்தகவு $10\, C_1 \left(\frac{2}{10}\right) \times \left(\frac{8}{10}\right)^9 = \cdot 26843$

(ii) குறைந்தது ஒரு வண்டியாவது தாமதமாக வருவதற்குரிய நிகழ்தகவு = [1 — எல்லாவண்டிகளும் நேரப்படி வருவதற்கான நிகழ்தகவு]

$$= \left[1 - \left(\frac{8}{10}\right)^{10}\right] = 1 - \cdot 10738 = \cdot 89262$$

எ.கா. ஒரு ஈருறுப்புப் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி = 4 கூட்டுச்சராசரியோடு இணைந்த மூன்றாம் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை ·48 திட்டவிலக்கம், முகடு, β, γ கெழுக்கள் முதலிய வற்றைக் காண்க.

$$\mu_3 = npq\,(q - p) = \cdot 48 \longrightarrow I$$

$$np = 4 \longrightarrow II$$

$$\frac{I}{II} = q(q - p) = (1 - p)(1 - 2p) = \cdot 12$$

$$\therefore \quad 2p^2 - 3p + \cdot 88 = 0.$$

$p = \cdot 4,\ 1 \cdot 1$ என்பவை இதன் மூலங்கள்,

$p \not> 1 \quad \therefore \quad p = \cdot 4. \qquad q = 1 - \cdot 4 = \cdot 6$

திட்டவிலக்கம் $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{4 X \cdot 6} = 1{\cdot}549.$

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{(\cdot 48)^2}{(2{\cdot}4)^3} = \frac{1}{60}$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = \cdot 129.$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{3n^2 p^2 q^2 + npq(1 - 6pq)}{n^2 p^2 q^2} = 2{\cdot}813.$$

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = - \cdot 185$$

குறிப்பு: X என்பது ஒரு $\beta(n, p)$ மாறியானால்,

$$P(X = x) = n\,C_x\, p^x q^{n-x} \; (x = 0, 1, 2, \ldots\ldots n)$$

$$P(X = x+1) = n\,C_{x+1}\, p^{x+1} q^{n-x+1)}$$

$$\therefore \frac{P[X = x+1]}{P[X = x]} = \frac{p_{x+1}}{p_x} = \frac{\dfrac{n!}{(x+1)!\,(n-x-1)!} p^{x+1} q^{n-x-1}}{\dfrac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{n-x}}$$

$$= \frac{n-x}{x+1}\frac{p}{q}$$

$$\therefore \frac{p_{x+1}}{p_x} = \frac{n-x}{x+1} p/q$$

எனவே $p_{x+1} = \left[\dfrac{n-x}{x+1}\dfrac{p}{q}\right] p_x \quad [p_0 = q^n].$

ஈருறுப்புப் பரவலின் நிகழ்தகவுகளுக்கிடையே உள்ள இம்மடங்குத் தொடர்பு, கணக்கியல் நிகழ்வெண்களை எளிதில் காணப் பெரிதும் பயன்படுகிறது.

எ.கா. ஒவ்வொரு முறையும் 7 நாணயங்களை வீசியபோது, தலைகளின் எண்ணிக்கை குறிக்கப்பட்டது. இவ்வாறு 128 முறைகள் சோதனையைச் செய்ததில், கீழ்க்காணும் பரவல் கிடைத்தது. இதற்கு,

(i) நாணயம் ஒருதலைச்சார்பற்றது.

(ii) நாணயத்தின் தன்மை அறியப்படவில்லை எனக் கொண்டு, ஒரு ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்துக.

(i) நாணயம் ஒரு தலைச்சார்பற்றதெனில்,

$$p = q\frac{1}{2};\ f(x) = N \cdot nC_x\, p^x q^{n-x} = 128 \cdot 7\, C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}$$

$f(x)$ என்பது x வெற்றிகளுக்கான நிகழ்வெண்ணைக் குறித்தால்

$f(x+1) = \frac{n-x}{x-1} \cdot \frac{p}{q} f(x)$ எனும் மடங்குத்தொடர்பிலிருந்து $f(x+1)$ காணலாம். அதனை மொத்த நிகழ்வெண் N-ஆல் பெருக்கினால், $x+1$ வெற்றிகளுக்கான நிகழ்வெண் கிடைக்கும்.

$$f(0) = \frac{128 \times 1}{2^7} = 128 \times \frac{1}{128} = 1$$

$$f(1) = \frac{7-0}{1} \left\{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right\} f(1) \quad 7 \times 1 \times 1 = 7 \times 1 \times 1 = 7$$

$$f(2) = \frac{7-1}{2} \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) f(1) = \frac{6}{2} \times 1 \times 7 = 21$$

$$f(3) = \frac{5}{3} \times 1 \times 21 = 35$$

$$f(4) = \frac{4}{4} \times 1 \times 35 = 35$$

$$f(5) = \frac{3}{5} \times 1 \times 35 = 21$$

$$f(6) = \frac{2}{6} \times 1 \times 21 = 7$$

$$f(7) = \frac{1}{7} \times 1 \times 7 = 1$$

தலைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5	6	7
நேரில் கண்ட நிகழ்வெண்	7	6	19	35	30	23	7	1
கணக்கியல் நிகழ்வெண்	1	7	21	35	35	21	7	1

(ii) நாணயத்தின் தன்மை தெரியாதபோது பரவலின் கூட்டுச்சராசரி $= np$, பரவற்படி $= np$; எனக்கொண்டு, p, யின் மதிப்புகளைக் காண வேண்டும்.

$$\bar{x} = np = \frac{\Sigma f_r \; x_r}{N} = \frac{433}{128} = 3{\cdot}3828$$

$$p = {\cdot}48326, \; q = {\cdot}51674 \; (1-p) \; f(0) \; N \cdot q^n = 128 \times ({\cdot}5167) = 1{\cdot}2593$$

$$f(1) = \frac{7}{1}\left(\frac{{\cdot}48326}{{\cdot}51674}\right) f(0) = 7 \times {\cdot}93521 \times 1{\cdot}2593 = 8{\cdot}2438$$

$$f(2) = \frac{6}{2} \times ({\cdot}93521) \; f(1) = 3 \, ({\cdot}93521) \, (8.2438) = 23{\cdot}129$$

$$f(3) = \frac{5}{3} \times ({\cdot}93521) \; f(2) = 36{\cdot}05$$

$$f(4) = \frac{4}{4} \times ({\cdot}93521) \times f(3) = 33{\cdot}715$$

$$f(5) = \frac{3}{5} \; ({\cdot}93521) \; f(4) = 18{\cdot}918$$

$$f(6) = \frac{2}{6} \times \; {\cdot}93521) \times f(5) = 5{\cdot}897$$

$$f(7) = \frac{1}{7} \times \; {\cdot}93521 \times f(6) = {\cdot}788$$

(கணக்கியல் நிகழ்வெண்களை முழு எண்களாக மாற்றிய பிறகு)

தலைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5	6	7
நேரில்காணும் நிகழ்வெண்	7	6	19	35	30	23	7	1
கணக்கியல் நிகழ்வெண்	1	8	23	36	34	19	6	1

எ.கா. (அ) $k(\theta)$ என்பது, n அளவுடைய ஈருறுப்பும் பரவல் ஆதியை ஒட்டிய குவிவு சார்பலனுயின்,

$$\frac{d}{d\theta} k(\theta) = n\left\{1 + e^{-(z+\theta)}\right\}^{-1}, \quad z = \log_e \frac{p}{q}$$

எனக்காட்டுக.

(ஆ வலது பக்கத்தை, டெயிலர் தேற்றத்தைப் ('Taylor's Theorem) பயன்படுத்தி, θ-ன் படிகளில் விரித்தெழுதி $k_r = n \frac{d^{r-1} p}{dz^{r-1}}$, என நிறுவுக

k_r, r ஆவது குமுலண்ட்

(இ $x_{r+1} = pq \frac{\partial k_r}{\partial p}$, $r > 1$ என்ற மடங்குத் தொடர்பை நிறுவுக

(ஈ) $k_{r+1} = \frac{\partial k_r}{\partial z}$ $z = \log_e \left(\frac{p}{q}\right)$ என நிறுவுக.

தீர்வு

(அ) $M(\theta) = (q + pe^{\theta})^n$

$$k(\theta) = \log M(\theta) = n \log (q + pe^{\theta})$$

$$\therefore \frac{d}{d\theta} k(\theta) = \frac{npe^{\theta}}{(q+pe^{\theta})} = np(qe^{-\theta} + p)^{-1}$$

$$= n\left(\frac{q}{p}e^{-\theta} + 1\right)^{-1} = n(e^{-z}e^{-\theta} + 1)^{-1}$$

$$\left[\because \frac{p}{q} = e^{z}\right]$$

$$= n[1 + e^{-(z+\theta)}]^{-1}$$

(ஆ) $k_r = \frac{d^r}{dt^r}\left[n \log(q + p e^{\theta})\right]_{\theta=0}.$

$$= n\left[\frac{d^{r-1}}{d\theta^{r-1}}, \frac{d}{d\theta}\{\log(q + p e^{\theta})\}\right]_{\theta=0}$$

$$= n\left[\frac{d^{r-1}}{d\theta^{r-1}}\{1 + e^{-(z+\theta)}\}^{-1}\right]_{\theta=0}$$

$$= n\left[\frac{d^{r-1}}{d\theta^{r-1}}\left\{\frac{e^{z+\theta}}{1+e^{z+\theta}}\right\}\right]_{\theta=0} \quad \text{......(i)}$$

$$\left[\frac{d}{z}\left(\frac{e^{z+\theta}}{1+e^{z+\theta}}\right)\right]_{\theta=0}$$

$$= n\left[\frac{(1+e^{z+\theta})e^{z+\theta} - e^{z+\theta}e^{z+0}}{(1+e^{z+\theta})^2}\right]_{\theta=0}$$

$$= \frac{e^z}{(1+e^z)^2} \quad \text{... (ii)}$$

$$\frac{d}{d\theta}\left[\frac{e^{z+0}}{1+e^{z+\theta}}\right]_{\theta=0}$$

$$= \left[\frac{(1+e^{z+\theta})e^{z+\theta} - e^{z+\theta}, e^{z+\theta}}{(1+e^{Z+\theta})^2}\right]_{\theta=0}$$

$$= \frac{e}{(1+e^z)^2} \quad \text{...(iii)}$$

எனவே $\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{z+\theta}}{1+e^{Z+\theta}}\right)\right]_{\theta=0}$

$$= \left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{e^{z+\theta}}{1+e^{z+\theta}}\right)\right]_{\theta=0}$$

$$\therefore \left[\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\left(\frac{e^{z+\theta}}{1+e^{z+\theta}}\right)\right]_{\theta=0}$$

$$= \left[\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\left(\frac{e^{z+0}}{1+e^{z+\theta}}\right)\right]_{\theta=0}$$

$\therefore$ (i) லிருந்து, $k_r = n\left[\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\left(\frac{e^{z+\theta}}{1+e^{z+\theta}}\right)\right]_{\theta=0}$

$$= n\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\left(\frac{e^z}{2+e^z}\right)$$

$$= n\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}(1+e^{-z})^{-1}$$

$$= n\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\left(1+\frac{q}{p}\right) = n\frac{d^{r-1}p}{dz^{r-1}}$$

(ii) $k_r = \frac{n\,d^{r-1}p}{dz^{r-1}}$

$$k_{r+1} = \frac{n\,d^r p}{dz^r}$$

$$\frac{dk_r}{dp} = n\cdot\frac{d}{dp}\left[\frac{d^{r-1}p}{dz^{r-1}}\right] = n\frac{d}{dz}\left(\frac{d^{r-1}p}{dz^{r-1}}\right)\frac{dz}{dp}$$

$$= n\left(\frac{d^r p}{dz^r}\right)\frac{dz}{dp}$$

$$\therefore \frac{dk_r}{dp} = n\cdot\frac{1}{pq}\cdot\frac{d^r p}{dz^r} = \frac{1}{pq}k_{r+1}$$

$$\therefore \quad k_{r+1} = pq \frac{d k_r}{dp}.$$

$$(ஈ) \quad \frac{d p_r}{dz} = \frac{d k_r}{dp} \cdot \frac{dp}{dz} = \frac{\frac{d k_r}{dp}}{\frac{d^2}{dp}} = \frac{\frac{d k_r}{dp}}{\frac{1}{pq}}$$

$$= pq \frac{d k_r}{op}.$$

$$\therefore \quad \frac{d k_r}{dz} = k_{r+1}$$

எ.கா. சமச்சீருள்ள n-வதுபடி ஈருறுப்புப் பரவல்கள் இரண்டு பொருத்தப்படும்போது ஒன்றின் r-ஆவது உறுப்பு, மற்றொன்றின் $(r+1)$ ஆவது உறுப்போடு ஒன்றுகப் பொருந்து கிறது. இரு பரவல்களிலும் பொருத்தப்பட்ட உறுப்புகளைக் கூட்டினால் கிடைக்கும் பரவல், $(n+1)$ ஆவது படியில் ஈருறுப்புப் பரவலாக அமையும் என நிறுவுக.

$$\text{சமச்சீருடைய பரவலின் சமன்பாடு} = N\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{இதில் } r\text{-ஆவது உறுப்பு} = N \cdot nc_{r-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-r+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$$

$$= N \cdot nc_{r-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

இரண்டாவது பரவலின் $(r+1)$ ஆவது உறுப்பு

$$= N \cdot nc_r \left(\frac{1}{2}\right)^{n-r} \left(\frac{1}{2}\right)^r$$

$$= N \cdot nc_r \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

இரு பரவல்களின் உறுப்புகளையும் பொருத்துவதால் கிடைக்கும் புதிய பரவலின் உறுப்பு $= N\left(\frac{1}{2}\right)^n [nc_{r-1} + nc_r]$

$$= N \cdot (n+1)\, c_y \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 2N \cdot (n+1)\, c \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-r} \left(\frac{1}{2}\right)^r$$

இது $2N\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ எனும் சமச்சீருடைய, $(n+1)$ ஆவது படி ஈருறுப்புப் பரவலின் $(r+1)$ ஆவது உறுப்பு,

எ.கா. $b\,(x;\ n,\ p)$ என்ற ஈறுருப்புச் பரவலின் காரணீய விலக்கப்பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு $(1+pt)^n$ என நிறுவுக. மேலும் $\mu'_{(r)} = n!\ p^r$ எனக் காரணீய விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு $g\ (t)$ ஆனல்,

$$g\,(t) = E\,[(1+t)^x] = \sum_{x=0}^{n} b\,(x;\ n,\ p)\,(1+t)^x$$

$$= \sum_{x=0}^{n} nc_x\, p^x\,(1-p)^{n-x}\,(1+t)^x$$

$$= [p\,(1+t)+(1-p)]^n = (1+pt)^n$$

$$\mu'_{(r)} = g\,(t)\ \frac{t^r}{r!} \text{-ன் குணகம்}$$

$$= n!\ p^r.$$

கணக்கு

ஒரு வரையற்ற முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n அளவுடைய ஒரு சமவாய்ப்புக்கூறு எடுக்கப்படுகிறது. அதிலுள்ள உறுப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு பிரிவுகளில் ஏதேனும் ஒன்றை முறையே $p,\ 1-p$ நிகழ்தகவுகளுடன் சார்கின்றன. இரு பிரிவுகளிலும் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n_1,\ n_2,\ n_1,\ n_2$-ன் உடன்மாறுபாடு (co-variance) $-p\,(1-p)$ எனக்காட்டுக. $\frac{n_1}{n} - \frac{n_2}{n}$ என்னும் விகிதங்களின் வேறுபாட்டின் மாறுபாட்டைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

(I. A. A. S. 1944)

n_1 ஒரு ஈருறுப்புப் பரவல் மாறி.

எனவே $E(n_1) = np$.

$E(n_2) = E(n - n_1) = n - E(n_1) = n - np = nq$

$[n_1, n_2]$-ன் உடன் மாறுபாடு $= E\{[(n_1 - np)(n_2 - nq)]\}$

$= E[(n_1 - np)(n - n_1 - n + np) = -E(n_1 - np)^2$

$= -(n_1$-ன் மாறுபாடு$) = -npq = -np(1-p)$

$\frac{n_1}{n} - \frac{n_2}{n}$-ன் மாறுபாடு

$\frac{n_1}{n}$ -ன் மாறுபாடு $+ \frac{n_2}{n}$ -ன் மாறுபாடு $- 2\ \frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}$ -ன் உடன் மாறுபாடு

$= \frac{1}{n^2}[n_1$ -ன் மாறுபாடு$] + \frac{1}{n^2}[n_2$-ன் மாறுபாடு$]$

$- \frac{2}{n^2}[n_1, n_2$ -ன் உடன் மாறுபாடு$]$

$= \frac{1}{n^2}[npq + npq + 2npq]$

$= \frac{4pq}{n} = \frac{4p(1-p)}{n}$

பயிற்சி

1. (அ) ஈருறுப்புப் பரவல் நடை முறையில் எவ்வாறு காணப்படுகிறதுஎனத் தகுந்த எடுத்துக் காட்டுகளுடன் விளக்குக.

(ஆ) ஒரு ஈருறுப்புப் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி 80, திட்ட விலக்கம் 4 ; முழுப்பரவலையும் கண்டறிக. (அ. ப.)

2. ஒவ்வொரு முறையும் 6 நாணயங்கள் வீதம் 4096 முறைகள் வீசப்பட்டன. ஈருறுப்புப் பரவல் விதியின்படி 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 தலைகள் விழுவதற்குரிய கணக்கியல் நிகழ்தகவுப் பரவலை எழுதுக. இப்பரவலின் கூட்டுச்சராசரி பரவற்படி இவற்றைக் கணக்கிடுக. (ம.ப)

3. ஈருறுப்புப் பரவல் என்றால் என்ன? p, n பண்பளவைகளாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலின் முதல் நான்கு மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் கண்டறிக. (ம. ப.)

4. ஒரு தலைச் சார்பற்ற நல்ல நாணய மொன்றினை 10 தடவைகள் சுண்டுவது ஒரு சோதனையாகும். 100 சோதனைகள் மேற் கொள்ளப்பட்டன. குறைந்தது 7 தலைகளாக எத்தனை சோதனைகளில் விழுமென்பதைக் காண்க. (செ ப.)

5. ஒரு நாணயம் 6 தடவைகள் சுண்டப்பட்டது. 1,2,3,4,5,6 தடவைகள் தலை விழுந்தால் முறையே ரூ. 1, 2, 0, 4, 5, 6 ஒருவர் பெறுவர். பூ விழுந்தால் அதே தொகையை அம்முறைப்படி அவர் தரவேண்டும். அவர் எதிர் பார்க்கும் லாபமும், மாறுபாடும் யாவை? (செ.ப.)

6. மூன்று குழந்தைகளைக் கொண்ட 300 குடும்பங்களை விசாரித்ததில் பின்வரும் தகவல்கள் கிடைத்தன. இங்கு x என்பது குடும்பத்திலுள்ள ஆண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையையும், f என்பது அதற்கேற்ப அமையும் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கையையும் குறிக்கிறது.

x	0	1	2	3	மொத்தம்
f	44	123	103	30	300

இக்குடும்பங்களில் உள்ள ஆண், பெண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கைகளைக்கொண்டு ஆண், பெண் குழந்தைகள் பிறப்பது 1 : 1 விகிதத்தை யொட்டியுள்ளதா எனக் காண்க.

7. ஒரு பரிசோதனையில் பெறும் வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை தோல்விகளின் எண்ணிக்கையைப் போல இரு மடங்காகும். அடுத்த 6 முயற்சிகளில் குறைந்தது, 4 வெற்றிகளாவது கிடைப்பதற்குரிய வாய்ப்பு என்ன?

$$\left[\text{குறிப்பு : } p = \frac{2}{3}\right]$$

8. கீழ்க்காணும் விவரத்திற்கு ஒரு ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்துக. கணக்கியல் நிகழ்வெண்களையும் காண்க.

x	0	1	2	3	4	5
f	6	10	14	8	6	1

$$\left[\text{குறிப்பு } np = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{91}{45}\right]$$

9. ஒரு ஈருறுப்புப் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி 5. திட்டவிலக்கம். 3. இக்கூற்று சரியானதா என ஆராய்க.

10. ஒருவர் ஒரு நாணயத்தை 8 முறைகள் சுண்டுகிறார்.

1. எல்லாம் தலைகளாக

2. 6 தலைகளும், 2 பூக்களும்

3. 5 அல்லது அதற்குக் குறைவான தலைகளாகக் கிடைக்க நிகழ்தகவு என்ன? (செ.ப.)

11. x, y என்ற இரு சார்பற்ற ஈருறுப்பு மாறிகள் $B(m, p)$, $B(n, p)$ ஆனால் $x + y$-ன் பரவலைக் காண்க. (செ.ப. '70,'72)

12. x, y சார்பற்ற ஈருறுப்பு மாறிகள் $B\left(3, \frac{1}{2}\right)$, $B\left(9, \frac{1}{2}\right)$ ஆனால் $P(x + y = 7)$ என்ன?

[x $B\left(3, \frac{1}{2}\right)$ மாறி y $B\left(9, \frac{1}{2}\right)$ மாறி

எனவே $x + y$ $B\left(12, \frac{1}{2}\right)$ மாறி.

$$\therefore \quad P(x + y = 7) = 12c_7 \; q^5 p^7 = 12c_7 \left(\frac{1}{2}\right)^{12}.$$]

13. 200 திருகுகள் கொண்ட பெட்டிகளில் ஒவ்வொன்றிலும் சராசரியாக 2% பழுதான திருகுகள் உள்ளன. 10 பெட்டிகள் வாங்கினால், அவற்றில் எட்டில் 2 பழுதான திருகுகளுக்கும் குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? (செ ப '68)

14. X ஈருறுப்புப் பரவலைக் கூட்டுச்சராசரி 2·4, பரவற்படி 1·44 உடன் சார்ந்துள்ளது. $P[X \geq 5]$, $P[1 < X \leq 4]$ காண்க.

15. (அ) 5 சார்பற்ற முயற்சிகளை உடைய ஒரு ஈருறுப்புப் பரவல் முறையே 1, 2 வெற்றிகளுக்கான நிகழ்தகவுகள் ·4096, ·2048· பரவலின் பண்பளவையாகிய p-யைக் காண்க.

ஆ. 3500 விதைகளை, முறைக்கு 7 விதைகளாக எடுத்துப் பயிர் செய்ததில், முளைவிட்ட விதைகளின் பரவல் வருமாறு :

முளைவிட்ட விதைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5	6	7
நிகழ்வெண்	3	31	86	150	144	60	25	1

இப்பரவலுக்கேற்ற ஈருறுப்புப் பரவலை வரையறுக்க.

[குறிப்பு : தரப்பட்டுள்ள பரவலின் கூட்டுச்சராசரி 3·372 ; $\bar{x} = np = 3{\cdot}372$; n 7 p ·4 17 $N = 500$ ஈருறுப்புப் பரவல் = 500 [51 3 + ·4817]

(இ) $n = 6, 9$ $[X = 4] = P[X = 2]$ எனில்

ஈருறுப்பு மாறியின் பண்பளவையாகிய p-யைக் காண்க.

16. ஒரு தொழிற்சாலையின் உற்பத்திப் பொருட்களின் பெருந் தொகுதி ஒன்றில் 1% குறையுள்ளவை காணப்படுகின்றன இத் தொகுதியில் ஒரு n ராசிகளுடைய சமவாய்ப்பு கூறு எடுக்கப்படும் போது, அதில் குறைந்தது ஒரு குறையுள்ள பொருளாவது இருக்க, நிகழ்தகவு குறைந்தது 95 ஆக இருக்க வேண்டுமானால், n-ன் மதிப்பென்ன? [விடை $n = 68$]

17 ஒரு பெருந் தொகுதியிலுள்ள 120 பொருட்களில் எடுக்கப் பட்ட 5 பொருட்கள் அடங்கிய சமவாய்ப்புக் கூறில் பழுதான பொருளின் எண்ணிக்கை ஒன்றிற்கு மேல் இராவிடில், அத் தொகுதியை வாங்குபவர் ஏற்றுக் கொள்வார். 15 குறையுள்ள பொருட்கள் இருந்தால், அவர் அப்பெருந் தொகுதியை ஏற்றுக் கொள்வார் என்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? (செ.ப. '65)

18. ஒவ்வொரு 30 நாட்களிலும், சராசரியாக 10 நாட்கள் மழை பெய்தால்

1. ஒரு வாரத்தில் குறைந்தது 3 நாட்களாவது மழை பெய்ய.

2. வாரத்தின் முதல் மூன்று நாட்கள் மழை பெய்யாமல் இருக்கவும், மீதி நாட்கள் மழை பெய்யவும் நிகழ்தகவு என்ன?

19. விதைகளின் தொகுதிகள், நூறை எடுத்துக் கொண்டு ஒரு பரிசோதனையைச் செய்ததில் கீழ்க்கண்ட விடைகள் கிடைத்தன.

$\beta_1 = \dfrac{1}{15}$, $\beta_2 = \dfrac{89}{30}$, ஈருறுப்புப் பரவலைக் காண்க. $r = 8$ என்ற போது, நிகழ்வெண்ணைக் கணக்கிடுக. $(p > q)$

20. **நிறுவுக:**

(அ) $b(n, p; k) = b(n, 1-p; n-k)$

(ஆ) $\sum_{k=r}^{n} b(n, p; k) \quad 1 - \sum_{k=n-\;+1}^{n} b(r, 1 = r; 0)$

குறிப்பு : (அ) $b(n, 1-p; n-k)$

$$= n\,C_{n-k}\,(1-p)^{n-k}\,p^{n-(n-k)}$$
$$= n\,C_k\,(1-p)^{n-k}\,p^k.$$

(ஆ) $$\sum_{k=r}^{n} b(n, p; k) = \sum_{k=r}^{n} b(n, 1-p; n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-r} b(n, 1-p; k).$$

21. $b(x; n, p)$ என்ற ஈருறுப்புப் பரவலைத் தழுவுகின்ற சமவாய்ப்புமாறி X.

$$B(k; n, p) = \sum_{x=0}^{k} b(x; n, p) \text{ எனின்,}$$

(i) $b(k; n, p) = B(k; n, p) - B(k-1, n, p)$

(ii) $b(k; u, p) = B(n-k; n, 1-p)$
$\qquad - B(n-k-1; n, 1-p)$

(iii) $B(k; n+1, p) = p\,B(k-1; n, p) + q\,B(k; n, p)$

என நிறுவுக.

22. $b(r; n, p) = n\,C_r\,p^r\,q^{r-r}$ என்ற ஈருறுப்பு நிகழ்தகவுக் குரியதாயின்,

$$B(k; n, p) = \sum_{r=0}^{k} b(r; n, p) \text{ என்றால்,}$$

$$B(k; n, p) = (n-k)\,n\,C_k \int_0^{q} t^{n-k-1}(1-t)^k\,dt, \quad q = 1-p.$$

தீர்வு

$$B(k\,;\,n, p) = \sum_{r=0}^{k} b(r\,;\,n, p) = \sum_{r=0}^{k} n C_r\, p^r q^{n-r}$$

$$= \sum_{r=0}^{k} \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\, p^r q^{n-r}$$

$$= \sum_{r=0}^{k} \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}\; \frac{n!}{r!\,(k-r)!}\; \frac{(k-r)!\,(n-k-1)!}{(n-r)!}\, p^r q^{n-k} q^{k-r}$$

$$= \sum_{r=0}^{k} \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}\, q^{n-k}\, \frac{k!}{r!\,(k-r)!}\; p^r q^{k-r}\, \frac{(n-k-1)!\,(k-r)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}\, q^{n-k} \sum_{r=0}^{k} k C_r\, p^r q^{k-r}\, \frac{\Gamma(n-k)\,\Gamma(k-r+1)}{\Gamma(n-r+1)}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}\, q^{n-k} \sum_{r=0}^{k} k C_r\, p^r q^{k-r}\, \beta(n-k,\, k-r+1)$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}\, q^{n-k} \sum_{r=0}^{k} \left\{ k C_r\, p^r q^{k-r} \int_0^1 x^{k-r} (1-x)^{n-k-1}\, dx \right\}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} q^{n-k} \sum_{r=0}^{k} \int_0^1 k\, C_r\, p^r q^{k-r} x^{k-r} (1-x)^{n-k-1} dx$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} q^{n-k} \int_0^1 (1-x)^{-k-1} (p+q)^k dx$$

$x = 1 - \frac{t}{q}$ எனின், $B(k\,;\,t, p)$

$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \int_0^q t^{n-k-1} (1-t)^k dt$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{(n-k-1)!} \int_0^q t^{n-k-1} (1-t)^k dt$$

$$= n\, C_k\, (n-k) \int_0^q t^{n-k-1} (1-t)^k dt.$$

பல்லுறுப்புப்பரவல் (Multinomial distribution)

இரண்டிற்கு மேற்பட்ட விளைவுகளைக் கொண்ட சோதனைகளை எடுத்துக் கொள்வோம். இத்தகைய நிகழ்ச்சிகள் திரும்பத் திரும்ப நிகழும் சோதனைகளைக் கொண்டதே பல்லுறுப்புப் பரவலாகும்.

ஒரு சீட்டுக்கட்டில் ராணி சீட்டு எடுப்பது நாம் விரும்பும் நிகழ்ச்சியானால், 9 சீட்டுகளை எடுக்கும் போது 5 விளைவுகள் ஏற்படலாம். 0, 1, 2, 3 அல்லது 4 ராணி சீட்டுக்கள்.

ஒரு பகடையை வீசும்போது 1, 2, 3, ... 6 என்ற 6 புள்ளி முகங்களில் ஏதேனும் ஒன்று கிடைக்கலாம். பொதுவாக ஒரு சம

வாய்ப்பு நிகழ்ச்சிக்கு k விளைவுகளும், அவை நடப்பதற்கான நிகழ்தகவுகள் $p_1, p_2, \ldots\ldots p_k$ எனவும் இருக்கட்டும்.

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1 \text{ [ஈருறுப்புப் பரவலில் } p + q = 1]$$

நிகழ்ச்சி E_1, x_1 முறைகளிலும், நிகழ்ச்சி E_2, x_2 முறைகளிலும், ... நிகழ்ச்சி E_k, x_k முறைகளிலும் நடப்பதாகக் கொள்வோம். இதற்குரிய நிகழ்தகவு $p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$. ஆனால் நிகழ்ச்சிகள் எந்த வரிசையிலும் நடக்கலாம்.

$\dfrac{n!}{x_1!\, x_2! \ldots\ldots x_k!}$ என்பது இந்நிகழ்ச்சிகள் நடக்கக்கூடிய ஒன்றையொன்று தவிர்க்கும் மொத்த வழிகள். சமவாய்ப்பு மாறிகள் $x_1, x_2, \ldots\ldots x_k$ எனில். நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு,

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_{k-1}) = \frac{n!\, p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots\ldots p_k^{x_k}}{x_1!\, x_2! \ldots x_k}$$

$$(0 \leq x_i \leq n)\ (i = 1, 2, \ldots\ldots k)$$

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n\ ;\ p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1)\ldots\ldots\text{I}$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள $x_1, x_2, \ldots\ldots x_k$ என்ற k மாறிகளில் k—1 தான் சார்பற்றவை. $x_1, x_2, \ldots\ldots x_{k-1}$-ன் மதிப்புக்கள் குறிப்பிட்டவையாக இருக்கும் போது, $x_k = n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1})$ எனத்திட்டமாக அறிகிறோம். எனவே நிகழ்தகவுச் சார்பு, $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_{k-1})$ $k - 1$ மாறிகளை உடைய பல்மாறிப் பரவலாக உள்ளது. எனவே I ஐ நிகழ்தகவு விதியாகக்கொண்ட பரவல் பல்லுறுப்புப் பரவல் எனப்படுகிறது.

குறிப்பு : $x_1 + x_2 + x_3 = n,\ p_1 + p_2 + p_3 = 1$ என்ற போது,

$$f(x_1, x_2) = \frac{n!}{x_1!\, x_2!\, (n-x_1-x_2)!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{n-x_1-x_2}$$

$$[x_1 + x_2 \leq n\ \Sigma p_i = 1\ p_i > 0]$$

$$= 0 \text{ (மற்றெங்கிலும்)}$$

என்ற நிகழ்தகவுச்சார்பைக் கொண்டபரவல் மூன்று உறுப்புப் பரவல் எனப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக $n = 5, k=3, p_1 = 0{\cdot}1, p_2 = 0{\cdot}3, p_3 = 0{\cdot}6$

எனில் $f(x_1, x_2) = \dfrac{5!}{x_1!\, x_2!\, (5 - x_1 - x_2)!} (0{\cdot}1)^{x_1}$

$(0{\cdot}3)^{x_2} (0{\cdot}6)^{5 - x_1 - x_2}$ ஆகிறது.

மூவுறுப்புப் பரவலின் விலக்கப்பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும், சார்பு,

$$M(\theta_1, \theta_2) = \sum_{x_1=0}^{n} \sum_{x_2=0}^{n-x_1} \frac{n!}{x_1!\, x_2!\, (n-x_1-x_2)!} (p_1 e^{t_1})^{x_1}$$

$$(p_2 e^{t_2})^{x_2} \times (p_3)^{n-x_1-x_2}$$

$$= (p_1 e^{\theta_1} + p_2 e^{\theta_2} + p_3)^n \text{ } (\theta_1, \theta_2\text{-ன் எல்லா மெய்மதிப்புகளுக்கும்})$$

X_1, X_2 மாறிகளின் விளிம்புப்பரவலின் வி·பெ·உ. சார்புகள் முறையே,

$$M(\theta_1, 0) = (p_1 e^{\theta_1} + p_2 + p_3)^n = [(1-p_1) + p_1 e^{\theta_1}]^n$$

$$M(0, \theta_2) = (p_1 + p_2 e^{\theta_2} + p_3)^n = [(1-p_2) + p_2 e^{\theta_2}]^n$$

ஆகும்.

$M(\theta_1, \theta_2) = M(\theta_1, 0) \cdot M(0, \theta_2)$ என்றால், மாறிகள் X_1, X_2 சார்பற்றவையாகும்.

X_1 $b(n, p_1)$

X_2, $b(n, p_2)$ இரண்டும் சார்பற்றவை.

எனவே X_1, X_2 இவற்றின் சராசரி, பரவற்படிகள்

மாறிகள்	சராசரி	பரவற்படி
X_1	$n p_1$	$n p_1 (1 - p_1)$
X_2	$n p_2$	$n p_2 (1 - p_2)$

$$1 - p_1 = p_2 + p_3, \quad 1 - p_2 = p_1 + p_3$$

$X_1 = x_1$ எனத்தரப்பட்டுள்ள போது, X_2-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவுச்சார்பு

$$f(x_2/x_1) = \sum_{x_1=0}^{n} \frac{n!}{x_1!\, x_2!\, (n-x_1-x_2)!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{n-x_1-x_2}$$

$$= \sum_{x_1=0}^{n} \frac{n!}{x_1!\,(n-x_1)} p_1^{x_1} (1-p_1)^{n-x_1}$$

$$\left[\frac{(n-p_1)}{x_2!\,(n-x_1-x_2)!} p_2^{x_2} p_3^{n-x_1-x_2}\right.$$

$$= 1 \cdot \frac{(n-x_1)!}{x_2!\,(n-x_1-x_2)!} \left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^{x_2}$$

$$\left(\frac{p_3}{1-p_1}\right)^{n-x_1-x_2}, x = 0, 1, 2, \dots\dots n \cdot x_1$$

$= 0$ மற்ற மதிப்புகளில்

எனவே $X = x_1$ எனும்போது, X_2-ன் நிபந்தனைப் பரவல் $x_2, b\left[n - x_1, \frac{p_1}{1-p}\right]$ ஆகும்.

$$E[X_2/X_1] = (n - x_1) \frac{p_2}{1-p_1} \text{ ஆகும்.}$$

இது ஒரு முதற்படி சமன்பாடு. இதுபோன்றே $X_2 = x_2$ எனத்தரப்பட்டுள்ள போது, X_1-ன் நிபந்தனைப் பரவல், $X_1 \longrightarrow b\left[n - x_2, \frac{p_1}{1-p_2}\right]$ ஆகும்.

$$\therefore \quad E[X_1/x_2] = (n - x_2) \frac{p_1}{1-p_2}$$

$$\therefore \quad P^2 = \left(\frac{-p_1}{1-p_1}\right)\left(\frac{-p_2}{1-p_2}\right) = \frac{p_1\ p_2}{(1-p_1)\ (1-p_2)}$$

[P உடன் தொடர்புக்கெழு ஆகும்.]

x_1, x_2-ன் கெழுக்கள் எதிர்மறையிலிருப்பதால்,

$$P = -\sqrt{\frac{p_1\ p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}}$$

எ.கா. ஒரு குறிப்பிட்ட சமூகத்தில் ஒருவருக்குக் கண்களின் நிறம் கறுப்பு, நீலம் பழுப்பாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0·6, 0·3, 0·1 இதிலிருந்து 20 பேரைத் தேர்ந்தெடுத்தால், 10, 6, 4 பேர் கறுப்பு, நீல, பழுப்பு நிறக் கண்களை உடையவர்களாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

$$n = 20;\ p_1 = 0{\cdot}6,\ p_2 = 0{\cdot}3,\ p_3 = 0{\cdot}1$$

$$P(10 \text{ க.}\ 6 \text{ நீ.},\ 4 \text{ ப.}) = \frac{20!}{10!\ 6!\ 4!}\ (0{\cdot}6)^{10}\ (0{\cdot}3)^6\ (0{\cdot}1)^4$$

எ.கா. ஒரு பையில் 6 சிவப்பு, 5 நீலம், 4 வெள்ளைப் பந்துகள் உள்ளன. எடுக்கப்படும் பந்தின் நிறம் குறிக்கப்பட்டுத் திரும்பப் போடப்படுகிறது. இவ்வாறு தேர்ந்தெடுக்கப்படும் பந்துகளில் 4 சிவப்பு, 3 வெள்ளை, 2 நீல நிறப்பந்துகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

$$p_1 = \frac{6}{15},\ p_2 = \frac{4}{15},\ p_3 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad P(4 \text{ சி},\ 3 \text{ வெ},\ 2 \text{ நீ}) = \frac{15!}{4!\ 3!\ 2!}\left(\frac{6}{15}\right)^4 \left(\frac{4}{15}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

எ.கா. ஆறு பகடைகள் ஒரு முறை வீசப்படுகின்றன.

1. ஒவ்வொரு எண்ணும் ஒரே முறை காணப்படுவதற்கு,

2. சரியாக மூன்று 1'-ம், இரண்டு 2'-ம், ஒரு 3'-ம் வருவதற்கு

3. இரண்டு 3, இரண்டு 4, இரண்டு 5 பெறுவதற்கு

நிகழ்தகவு யாது?

$X_i = i$ காணப்படும் தடவைகள், $(i = 1, 2, \ldots 6)$

$X_1, X_2, \ldots X_n$ ஒரு பல்லுறுப்பு மாறி

$$p_1 = p_2 = \dots\dots = p6 = \frac{1}{6};\ n = 6$$

1. $P(1, 1, 1, 1, 1, 1) = \frac{6!}{(1!)^6}\left(\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{5}{54}$

2. $P(3, 2, 1, 0, 0, 0) = \frac{6!}{3!\ 2!\ 1!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1$

$$= \frac{5}{3888}$$

3. $P(0, 0, 2, 2, 2, 0) = \frac{6!}{(2!)^3}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2$

$$= \frac{15}{432}$$

பயிற்சி

1. ஒரு பையில் 5 சிவப்பு, 4 வெள்ளை, 3 நீலப் பந்துகள் உள்ளன. பையிலிருந்து ஒரு பந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு, அதன் நிறம் குறிக்கப்பட்டு பின் பந்து பையில் திரும்பப் போடப் படுகிறது. இவ்வாறு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 6 பந்துகளில் 3 சிவப்பு, 2 வெள்ளை, 1 நீல நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது!

2. ஒரு பகடை 12 முறைகள் வீசப்படுகிறது. இரண்டு 1, இரண்டு 2, ஐந்து 4, ஒரு 5, இரண்டு 6 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

3 X_1, X_2 என்ற இரு மாறிகளும் ஒரு மூன்று உறுப்புப் பரவலில் அமைந்திருந்தால், அதன் வி.பெ.தொ.உ. சார்பை வகைப்படுத்தி,

X_1, X_2-ன் இணை பரவற்படி $= -p_1 p_2$ எனக் காட்டுக.

பல்லுறுப்புப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்

பல்லுறுப்புப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M(t) = M(t_1, t_2, t_3 \dots\dots t_n)\ E\left[e^{\Sigma t X}\right]$$

$$= \Sigma \frac{n!}{x_1!\ x_2!\ x_3! \dots\dots x_n!} P_1^{x_1} \cdot P_2^{x_2}$$

$$P_n^{x_n} e^{\sum_{i=1}^{n} t_i X} \dots$$

$$= \sum_{X} \left[\frac{n!}{x_1! \; x_2! \ldots \ldots x_n!} (P_1 \; e^{t_1})^{x_1} \ldots \ldots (P_n \; e^{t_n})^{x_n} \right]$$

இங்கு $X = x_1, x_2, x_3 \ldots \ldots x_n$

$$E(X_i) = \left[\frac{\partial M}{\partial t_i} \right]_{t=0} = \left[\frac{\partial M}{\partial t_i} \right]_{t_1 = t_2 = t_3 \ldots \ldots \ldots = t_n = 0}$$

$$= [nP_i \, e^{ti} (P_1 \, e^{t1} + P_2 \, e^{t2} + \ldots + P_n \, e^{tn})^{n-1}]_{t=0} = nP_i$$

$$E(X_i^2) = \left[\frac{\partial \partial^2 M}{\partial \; t_i^2} \right]_{t=0} = nP_i \, [e^{ti} (P_1 \, e^{t1} + \ldots \ldots \ldots + P_n \, e^{tn})^{n-1} + e^{ti} (n-1) P_i \, e^{ti} (P_1 \, e^{ti} + \ldots \ldots + P_n \, e^{tn})^{n-2}]_{t=0}$$

$$= nP_i \, [1 + (n-1) P_i]$$

$$E(X_i \, X_j) = \left[\frac{\partial^2 M}{\partial t_i \; \partial t_j} \right]_{t=0} d \neq j$$

$$= nP_i \, e^{ti} (n-1) \; (P_1 \, e^{t1} + P_2 \, e^{t2} + \ldots \ldots \ldots + P_n \, e^{tn})^{n-2} \, P_j \, e^{tj}]_{t=0}$$

$$= n(n-1) \, P_i \, P_j$$

$$V(X_i) = E(X_i^2) - \{ E(X_i) \}^2$$

$$= nP_i \, (1 + (n-1) \, P_i)] - n^2 \, P_i^2$$

$$= nP_i \, (1 - P_i) = nP_i \, q \, .$$

$$\text{cov}\,(x_i, \, x_j) = E(X_i \, X_j) - E(X_i) \, E(x_j)$$

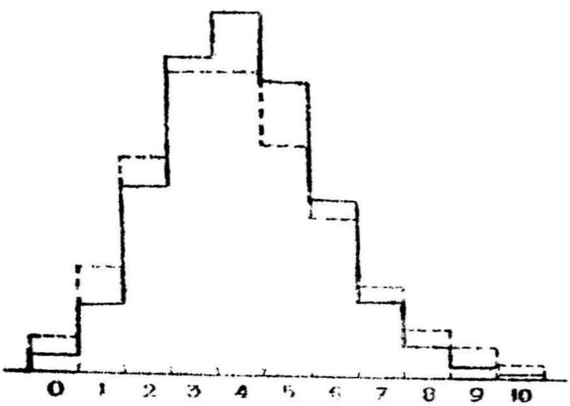
$$= n(n-1) \, P_i \, P_j - n^2 \, P_i \, P_j$$

$$= -nP_i \, P_j.$$

12. பாய்ஸான் பரவல்

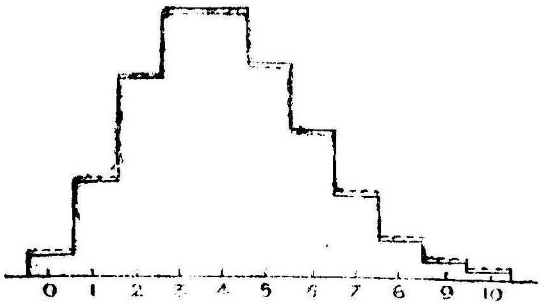
(POISSON DISTRIBUTION)

ஒரு திறமை மிக்க தட்டெழுத்தாளர் அடித்த ஏடுகளில் பிழைகள் மிகக் குறைந்தே காணப்படும், ஒரு நல்ல தொழிற் சாலையில் உற்பத்தி செய்யப்படும். ஒவ்வொன்றிலும் 100 திருகுகளாகக் கொண்ட பெட்டிகளில் காணப்படும் குறையுள்ள திருகுகளும் மிகச் சிறிய எண்ணிக்கையிலேயே இருக்கும். அரிதாய்த் தாக்கப்படும் நோயால் இறப்போரது எண்ணிக்கையும் மிகக் குறைவே. இவ்வாறு நிகழ்வதற்கு வாய்ப்பு மிகச் சிறியதாய் உள்ள அரிய நிகழ்ச்சிகளின் (rare events) பரவலே பாய்ஸான் பரவலாகும். நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு p மிகச்சிறியதாகவும். முயற்சி களின் எண்ணிக்கை மிகப்பெரிதாகவும் ஆனால் இவற்றின் பெருக்கற் தொகை np என்பது ஒரு வரையுற்ற எண் 'm' ஆகவும், இருக்கும் போது, 'பாய்ஸான் பரவல்' என்ற தனித்த மாறிப் பரவல் ஈருறுப்புப் பரவலின் நெருக்கமாகப் பெறப்படுகிறது. இதனை 1837-ல் பாய்ஸான் (Poisson) என்பவர் கண்டறிந்தார்.



ஈருறுப்புப் பரவலையும் பாய்ஸான் பரவலையும் ஒப்பிடுதல்

படம் 12·1.



ஈருறுப்புப் பரவலையும் பாய்ஸான் பரவலையும் ஒப்பிடுதல்
படம் 12·2

படங்கள் 12·1-ம், 12·2-ம் ஈருறுப்புப் பரவல் பாய்ஸான் பரவலை எவ்வளவு அண்மையில் நெருங்குகின்றன என விளக்குகின்றன.

இரு படங்களிலும், விடுபட்ட கோடுகள் பண்பளவை 4 ஆக உடைய பாய்ஸான் பரவலைக் குறிக்கின்றன

முதல் படத்தில் தொடர்ச்சியாக வரையப்பட்டுள்ள நேர்க் கோடுகள் மூலம் $p = \frac{1}{3}$ -ஐப் பண்பளவையாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலும், இரண்டாவது படத்தில் $\frac{1}{24}$ ஐப் பண்பளவையாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலும் காட்டப்பட்டுள்ளன. இரு படங்களிலிருந்தும் சிறியதாக, சிறியதாக ஈருறுப்புப் பரவல் பாய்ஸான் பரவலை அதிகம் நெருங்குவதையும், $n \geq 100$, $p \leq .05$ ஆக இருக்கும்போது பாய்ஸான் பரவலை ஈருறுப்புப் பரவலின் தோராய எல்லையாகக் கொள்ளலாம் என்றும் அறிகிறோம்.

பாய்ஸான் பரவலை அடியில் காணும் வகையில் வேறொரு முறையிலும் பெறலாம்.

ஒரு டெலிபோன் ஸ்விட்சு போர்டில் t-விநாடிகளில் வரும் அழைப்புகளின் எண்ணிக்கை X என்க. (1) Δt என்ற கால அளவில் ஒரு அழைப்பின் நிகழ்தகவு $\lambda \Delta t$. (2) அழைப்புகள் தம்முள் சார்பற்றவை என்றும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

$P_x(t)$ என்பது t நேரத்தில் வரும் x அழைப்புகளின் நிகழ்தகவு $P_x(t + \Delta t)$, $(t + \Delta t)$ நேரத்தில் வரும் x அழைப்புகளின் நிகழ்தகவு. இப்போது ஒன்றையொன்று தவிர்க்கும் இரு விளைவுகள் ஏற்படலாம்.

1. t நேரத்தில் x அழைப்புகளும், dt-யில் ஒரு அழைப்புமே இல்லாது இருப்பது.

2. t நேரத்தில் $(x-1)$ அழைப்புகளும் dt நேரத்தில் ஒரு அழைப்பும் இருப்பது.

$$P_x(t+dt) = P_x(t)(1-\lambda dt) + P_{x-1}(t)\,\lambda\, dt.$$

$$\frac{P_x(t+dt) - P_x(t)}{dt}$$

$$= \lambda\,[P_{x-1}(t) - P_x(t)]$$

$$\underset{dt \to 0}{Lt}\ \frac{d\,P_x(t)}{dt} = \lambda[P_{x-1}(t) - P_x(t)]$$

$$P_x(t) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} f(t).$$

$$\therefore\ \frac{(\lambda t)^x}{x!} f'(t) + f(t) \cdot \frac{\lambda^x}{x!}\, x\, t^{x-1}$$

$$= \lambda \left[\frac{(\lambda t)^{x-1}}{(x-1)!} f(t) - \frac{(\lambda t)^x}{x!} f(t) \right]$$

$$\frac{t\,f'(t)}{x} + f(t) = f(t) - \frac{\lambda t}{x} f(t)$$

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -\lambda.$$

$$\therefore\ f(t) = e^{-\lambda t}$$

$$P_0(t) = f(t)$$

எனவே $f(0) = P_0(0) = 1$.

$$P_x(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!},\quad x = 0, 1, \ldots\ldots$$

மேலும் $\sum_{x=0}^{\infty} P_x(t) = e^{-\lambda t} \sum \frac{(\lambda t)^x}{x!} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = 1$

எனவே t-நேரத்தில், வரும் அழைப்புகளின் எண்ணிக்கை λt-ஐ பண்பளவையாகக் கொண்ட பாய்ஸான் பரவலாகும்.

பாய்ஸான் பரவலுக்கு வேறு சில எடுத்துக்காட்டுகளையும் தரலாம்

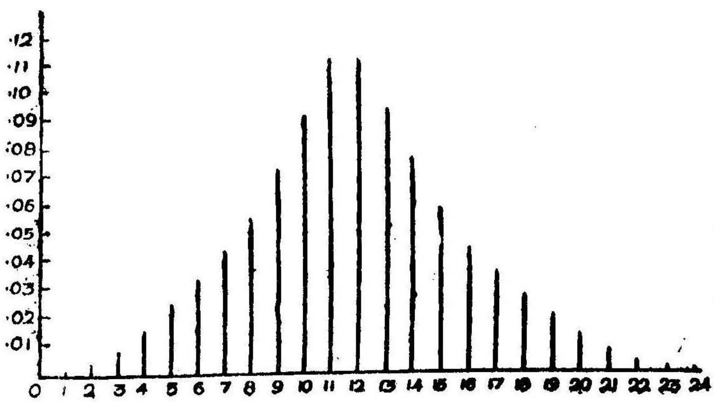
1. t-நேரத்தில் நிகழக்கூடிய தற்கொலைகளின் எண்ணிக்கை

2. ஒரு தெருவின் வழியாக t-நேரத்தில் செல்லக்கூடிய கார்களின் எண்ணிக்கை.

3. t-நேரத்தில் ஒரு கடையில் விற்பனையாகும் பொருட்களின் எண்ணிக்கை.

4. t-நேரத்தில் சிதைவடைகின்ற (radioactive) அணுக்களின் எண்ணிக்கை.

பண்பளவை $m = 12$ ஆக இருக்கும்போது, பாய்ஸான் பரவலின் படம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



பாய்ஸான் பரவல்

படம் 12·3

பாய்ஸான் பரவலின் நிகழ்தகவுச் சார்பைக் கண்டறிதல்

ஈருறுப்புப் பரவலின்படி n சோதனைகளில் x வெற்றிகளின் நிகழ்தகவு

$$f(x) = n\,C_x \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\ldots\,(n-x+1)}{x!}\,p^x \cdot q^{n-x}$$

n மிகப் பெரிய எண்ணாக அமையும்போது $n, (n-1)\,(n-2) \ldots (n-x+1)$ முதலியவற்றைத் தோராயமாக n எனவே எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

எனவே $f(x) = \frac{n \cdot n \cdots\cdots n}{x!} q^n \cdot p^x$

$$= \frac{n^x \cdot p^x}{x!} q^n = \frac{(np)^x}{x!}(1-p)^n$$

$$= \frac{m^x}{x!}\left(1-\frac{m}{n}\right) \quad (\text{இங்கு } np = m)$$

$$\left[Lt_{n \to \infty}\left[1-\frac{m}{n}\right]^n = Lt_{n \to \infty}\left[\left(1-\frac{m}{n}\right)^{-\frac{n}{m}}\right]^{-m} = e^{-m} \right]$$

$$= \frac{m^x}{x!} e^{-m}$$

x-க்கு 0, 1, 2, ... என்னும் மதிப்புகளைக் கொடுத்தால் முறையே 0. 1, 2, ... வெற்றிகளுக்குரிய நிகழ்தகவுகள் கிடைக்கும். n முடிவிலியை அணுகுவதால் இப்பரவலில் வரையற்ற உறுப்புகள் உள்ளன.

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{m^x}{x!} e^{-m} = e^{-m}\left[1 + \frac{m}{1!} + \frac{m^2}{2!} + \cdots\cdots \infty\right]$$

என்பதே பாய்ஸான் பரவலின் நிகழ்தகவுச் சார்பாகும்.

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-m} \cdot m^x}{x!} = e^{-m} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{m^x}{x!} = e^{-m} \cdot e^{m} = e^0 = 1$$

எனவே பாய்ஸான் பரவலின் மொத்த நிகழ்வெண் 1 ஆகும்.

கூட்டுச் சராசரி

$$\bar{x} = \sum_{0}^{\infty} f(x) \cdot x$$

$$= \sum_{0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-m} \cdot m^x}{x!}$$

$$= e^{-m} \cdot m \sum_{1}^{\infty} \frac{m^{x-1}}{(x-1)!} = e^{-m} \cdot m \cdot e^{m} = m.$$

திட்டவிலக்கம்

$$s^2 = \sum_{0}^{\infty} f(x) \cdot x^2$$

$$x^2 = x(x-1) + x$$

$$s^2 = \sum_{0}^{\infty} f(x) \cdot x(x-1) + \sum f(x) \cdot x$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{e^{-m} \cdot m^x}{x!} (x)(x-1) + m.$$

$$= e^{-m} \cdot m^2 \sum \frac{m^{x-2}}{(x-2)!} + m$$

$$= e^{-m} \cdot m^2 \cdot e^{m} + m = m^2 + m.$$

$$\mu_2 = \sigma^2 = s^2 - d^2$$

$$= m^2 + m - m^2 = m$$

பாய்ஸான் பரவலின் பரவற்படி $= m.$

எனவே திட்டவிலக்கம் $= \sqrt{m}$

$$\mu_3' = \Sigma f \cdot x^3$$

$$x^3 = x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x.$$

$$\mu_3' = \Sigma f \cdot x(x-1)(x-2) + 3\Sigma f \cdot x(x-1) + \Sigma f \cdot x.$$

$$\Sigma f \cdot x(x-1)(x-2) = \Sigma \frac{m^x}{x!} e^{-m} \cdot x(x-1)(x-2)$$

$$= m^3 \Sigma \frac{e^{-m} \cdot m^{x-3}}{(x-3)!} = m^3 \cdot e^{-m} \cdot e^{m} = m^3.$$

$$\mu_3' = m^3 + 3m^2 + m.$$

$$\mu_4' = \Sigma f x^4 = \Sigma f [x (x-1)(x-2)(x-3) + 6x(x-1)(x-2) + 7x(x-1) + x]$$

$$= \Sigma f \cdot x (x-1)(x-2)(x-3) + 6 \Sigma f \cdot x (x-1)(x-2) + 7 \Sigma f \cdot x (x-1) + \Sigma f \cdot x$$

$$= m^4 \Sigma \frac{e^{-m} \cdot m^{x-4}}{(x-4)!} + 6 m^3 e^{-m} \Sigma \frac{m^{x-3}}{(x-3)!} + 7 m^2 e^{-m} \Sigma \frac{m^{x-2}}{(x-2)!} + m e^{-m} \Sigma \frac{m^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= m^4 + 6 m^3 + 7 m^2 + m.$$

$$\mu_3 = m^3 + 3 m^2 + m - 3 m (m^2 + m) + 2 m^3 = m.$$

$\bar{x}$, μ_2, μ_3 முதலியவை m ஆக இருப்பது பாய்ஸான் பரவலின் சிறப்பியல்பு ஆகும்.

$$\mu_4 = m^4 + 6 m^3 + 7 m^2 + m - 4m(m^3 + 3m^2 + m) + 6 m^2 (m^2 + m) - 3 m^4 = 3 m^2 + m$$

β, γ கெழுக்கள்

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{m^2}{m^3} = \frac{1}{m}$$

m-ன் சிறிய மதிப்புகளுக்குப் பாய்ஸான் பரவல் பெருமளவில் சமச்சீரற்றுள்ளது.

$m = 2$ வரை இது நீடிக்கிறது.

$2 < m < 5$ ஆக இருக்கும்பொழுது, பரவல் சமச்சீரற்றது.

m, 6 அல்லது அதற்கு மேல் அதிகரிக்கும் பொழுது இது சமச்சீருடைய இயல்நிலைப் பரவலாகிறது.

$\beta_2 = 3 + \frac{1}{m}$. அதிகரிக்க அதிகரிக்க தட்டை அளவை மூன்றை நெருங்குகிறது. இது இயல் நிலைப் பரவலின் தட்டை அளவை ஆகும்.

ஒரு பாய்ஸான் பரவலில் M.J. $\gamma_1 \cdot \gamma_2 = 1$ ஆகும்.

$$M = m, \quad \sigma = \sqrt{m}, \quad \gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = 3 + \frac{1}{m} - 3 = \frac{1}{m}$$

$$M \cdot \sigma \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2 = m \cdot \sqrt{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \frac{1}{m} = 1.$$

கணக்கு

கூட்டுச் சராசரி m ஆக உடைய பாய்ஸான் பரவலில்

$\mu_{r+1} = r.m.\, \mu_{r-1} + \dfrac{m.d\,\mu_r}{dm}$ என நிறுவுக.

$$\mu_r = \sum_0^{\infty} (x-m)^r \frac{e^{-m}}{x!} m^x.$$

$$\frac{d\mu_r}{dm} = \sum r.(x-m)^{r-1}(-1)\, e^{-m}.\frac{m^x}{x!}$$

$$+ \sum (x-m)^r \left[\frac{e^{-m}.(-1).m^x + x.m^{x-1}e^{-m}}{x!}\right]$$

$$\frac{d\mu_r}{dm} = -r \sum_0^{\infty} \frac{(x-m)^{r-1} e^{-m}.m^x}{x!}$$

$$+ \sum_0^{\infty} (x-m)^r \left[\frac{x.m^{x-1}e^{-m} - m\cdot e^{-m}}{x!}\right]$$

$$-r\cdot\mu_{r-1} + \sum \frac{(x-m)^r e^{-m}.m^{x-1}[x-m]}{x!}$$

$$\frac{d\mu_r}{dm} = -r\,\mu_{r-1} + \frac{1}{m}\sum (x-m)^{r+1} \frac{m^x}{x!} e^{-m}$$

$$m\left(\frac{d\mu_r}{dm}\right) = -r\,\mu_{r-1} + \mu_{r+1}$$

$$m\,r\,\mu_{r-1} + m\left(\frac{d\mu_r}{dm}\right) = \mu_{r+1}$$

$$\mu_{r+1} = mr\,\mu_{r-1} + m\frac{d\mu_r}{dm}, \; r = 1,2,3 \text{ எனபிரதியிட்டால்}$$

$$\therefore \quad \mu_2 = m - 0 + m\frac{d\mu_1}{dm} \qquad [\because \mu_0 = 1, \; \mu_1 = 0]$$

$$\therefore \quad \mu_2 = m$$

$$\mu_3 = m \cdot 2\,\mu_1 + m\frac{d\mu_2}{dm} = m, \qquad \mu_3 = m$$

$$\mu_4 = m \cdot 3\,\mu_2 + [m]\frac{d\mu_3}{dm} = 3m^2 + m$$

பாய்ஸான் பரவலின் விலக்கப்பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M(\theta) = \sum_0^{\infty} e^{\theta x}\frac{m^x}{x!}e^{-m}$$

$$= \sum_0^{\infty} e^{-m}\frac{(me^{\theta})^x}{x!} = e^{-m}\sum\frac{(me^{\theta})^x}{x!}$$

$$= e^{-m} \cdot e^{me^{\theta}} = e^{m[e^{\theta}-1]}$$

$$\mu_1' = \left[\frac{dM}{d\theta}\right]_{\theta=0} = \left[e^{-m} \cdot e^{me^{\theta}}\, m e^{\theta}\right]_{\theta=0}$$

$$= e^{-m} \cdot e^{m} \cdot m = m$$

$$\frac{d^2M}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\left(m e^{-m} e^{\theta} \cdot e^{me^{\theta}}\right)$$

$$= e^{-m} m\,[e^{\theta} \cdot e^{me^{\theta}}[1 + m e^{\theta}]]$$

$$\mu_2' = \left[\frac{d^2M}{d\theta^2}\right]_{\theta=0} = e^{-m} \cdot m \cdot e^{m}(1+m) = m(1+m)$$

$$\frac{d^3M}{d\theta^3} = m\,e^{-m}\,e^{\theta} m \cdot e^{me^{\theta}}[m e^{\theta}]$$

$$+ (1 + m e^{\theta})\, m e^{-m}\{e^{\theta} e^{me^{\theta}} m e^{\theta} + e^{me^{\theta}} e^{\theta}\}.$$

$$\mu'_3 = \left[\frac{d^3 M}{d\theta^3}\right]_{\theta=0} = m \cdot e^{-m} \cdot 1 \cdot e^{m} m + (m+1)$$
$$[m \cdot e^{-m} \cdot m e^{m} + 1]$$
$$= m^3 + 3m^2 + m.$$

$$\mu'_4 = \left[\frac{d^4 M}{d\theta^4}\right]_{\theta=0} = m^4 + 6m^3 + 6m^2 + m$$

பாய்ஸான் பரவலின் முகடு

t_r என்பது பாய்ஸான் பரவலின் r-ஆவது உறுப்பானால்

$$\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{\dfrac{e^{-m} \cdot m^r}{r!}}{\dfrac{e^{-m} \cdot m^{r-1}}{(r-1)!}} = \frac{m}{r}$$

$m \gtrless r$ ஆக இருப்பதற்கேற்ப

$t_{r+1} \gtrless t_r$ ஆக அமைகிறது.

நிலை 1

m ஒரு முழு எண்

$r = 0, 1, 2, \ldots (m-1)$ வரை $r < m,\ t_{r+1} > t_r$

$r = m$, ஆனால் $t_{r+1} = t_r$

$r > m,\ t_{r+1} < t_r$

எனவே $t_1 < t_2 < t_3 \cdots < t_m = t_{m+1} > t_{m+2} > \cdots t_m = t_{m+1}$ மிகப்பெரிய உறுப்புகள்.

இவற்றில் x-ன் மதிப்புகள் $m-1, m$.

எனவே முழு எண்ணாக இருக்கும்போது, பரவல் இரு முகடுகள் உடையதாக உள்ளது.

$\dfrac{(m-1)+m}{2} = \left(m - \dfrac{1}{2}\right)$ ஆக அதன் மதிப்பைக் கொள்வது மரபு.

நிலை 2

$m = I$ (முழு எண்) $+ F$ (பின்னம்) என்றிருந்தால்

$r = 0, 1, 2, \ldots l$ வரை $r < m, t_{r+1} > t_r$

$r = l+1, l+2, \ldots, r > m, t_{r+1} < t_r$

எனவே $t_1 < t_2 < t_3 \ldots < t^{l+l} > t_{l+1} \ldots \ldots >$

எனவே t_{l+1} மிகப் பெரிய உறுப்பு

இதில் -ன் மதிப்பு l ஆகும்.

எனவே m முழு எண்ணாக இல்லாதபோது அதில் உள்ள முழு எண் பகுதியே முகடாகும்.

எனவே இரு நிலைகளிலும் முகடு $(m-1), m$ இவற்றிற்கு இடையே உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள்

1. ஆறு நாணயங்கள் 6400 முறைகள் சுண்டப்படுகின்றன. ஆறுதலைகள் x முறைகள் பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவை பாய்ஸான் பரவலைப் பயன்படுத்தி, தோராயமாகக் கணக்கிடுக. (I.A.S. 1955)

$$p = \text{ஆறுதலைகள் பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு} = \left(\frac{1}{2}\right)^{6}$$

$$n = \text{மொத்த சோதனைகளின் எண்ணிக்கை} = 6400$$

$$\therefore \quad m = np = 6400 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{6} = 6400 \times \frac{1}{64} = 100$$

ஆறுதலைகள் x முறைகள் பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு, இங்கு பாய்ஸான் பரவலில் வெற்றிகளுக்குரிய நிகழ்தகவாகும்.

அதாவது $\frac{e^{-100} \cdot 100^{x}}{x!}$ ஆகும்.

2. பாய்ஸான் பரவலில் அமையும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி 2, 3 என்ற மதிப்புகளை, சம நிகழ்தகவுடன் பெறுகிறது. அந்த மாறி 3 அல்லது அதற்குக் கீழே மதிப்புப் பெறுவதற்கு உண்டான நிகழ்தகவைக் கணக்கிடுக. [செ.ப 1971]

x என்பது ஒரு பாய்ஸான் மாறியானால், அது r எனும் மதிப்புப் பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{e^{-m} m^r}{r!} = P[x=r]$

$P[x=2] = P\ [x=3]$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால்,

$$\frac{e^{-m}\, m^2}{2!} = \frac{e^{-m}\, m^3}{3!}$$

$$m = 3.$$

x, 3 அல்லது அதற்குக்கீழே மதிப்பு பெறுவதற்கு உண்டான நிகழ்தகவு $= P[x=0] + P[x=1] + P\ [x=2] + P\ [x=3]$

$$\sum_{r=0}^{3} \frac{e^{-3}\, 3^r}{r!} = e^{-3}\left[1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{9}{3}\right] = 01\ 873 \times 13.$$

(அ) ஒரு பாய்ஸான் மாறி ஏற்கக்கூடிய மதிப்புகளையும், அம்மதிப்புகளை ஏற்பதற்குரிய நிகழ்தகவுகளையும் எடுத்துக் கூறுக.

(ஆ) x ஒரு பாய்ஸான் மாறி.
$P(x=2) = 9\,P(x=4) + 90\,P(x=6)$ ஆனால்

1. x-ன் கூட்டுச்சராசரி λ
2. x-ன் முகடு
3. கோட்டளவைக் கெழு β_1

இவற்றைக் காண்க. [செ.ப. 1970]

(அ) x ஒரு பாய்ஸான் மாறியானால், அது r எனும் மதிப்பை ஏற்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{e^{-m}\, m^r}{r!}$

x, $r = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots \infty$ எனும் மதிப்புகளை முறையே e^{-m}, $\frac{e^{-m} \cdot m}{1!}$, $\frac{e^{-m}\, m^2}{2!}$, …… எனும் நிகழ்தகவுகளுடன் ஏற்கிறது.

(ஆ) $P(x=2) = 9\,P(x=4) + 90\,P(x=6)$

$$\frac{e^{-m} \cdot m^2}{2!} = 9\left[\frac{e^{-m}\, m^4}{4!}\right] + 90\left[\frac{e^{-m}\, m^6}{6!}\right]$$

$$\frac{1}{2} = \frac{9m^2}{24} + \frac{90\, m^4}{720}$$

$$m^4 + 3m^2 - 4 = 0.$$

$$(m^2 - 1)(m^2 + 4) = 0.$$

இச்சமன்பாட்டில், $m = 1$ எனும் மூலம்தான் பாய்ஸான் பரவலின் மாறியாக இருக்கமுடியும்.

எனவே

1. x-ன் கூட்டுச்சராசரி $\lambda = m = 1$.

2. x-ன் முகடு: $m = 1$ என்பது முழு எண்ணாதலால்

$$m - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ ஆகும்.}$$

3. $\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{m^2}{m^3} = \frac{1}{m} = 1$

4. ஒரு தொலைபேசி சராசரியாக மணிக்கு 600 அழைப்புகளை ஏற்கிறது. ஒரு நிமிடத்திற்கு அதிக பட்சம் 25 தொடர்புகளை அந்த தொலைபேசி இணைத்துத்தர இயலும். கொடுக்கப்பட்ட ஏதேனும் ஒரு நிமிடத்தில் அந்த அளவுக்கு மீறிய வேலை இருப்பதற்குரிய நிகழ் தகவுகளை அறிய பாய்ஸான் பரவலை உபயோகிக்கவும்.

$(e^{-10} = \cdot 00004539)$

ஒவ்வொரு நிமிடத்திற்கும் வரும் தொலைபேசி அழைப்புகளின் எண்ணிக்கை $m = 10$ எனும் பண்பளவையுடன், பாய்ஸான் பரவலைப் பின்பற்றுகிறது.

ஒரு நிமிடத்தில், 25 அழைப்புகளுக்கும் அதிகமாக இருப்பின். அளவுக்கு அதிகமான வேலை செய்ய நேரிடுகிறது.

25 அழைப்புகளுக்கு மேலே வருவதற்குரிய நிகழ்தகவு = 1 — [25 அல்லது அதற்குக்குறைவாக அழைப்புகள் வருவதற்குரிய நிகழ்தகவு]

$$1 - \sum_{x=0}^{25} \frac{e^{-10} \cdot 10}{x!}$$

5. ஒரு நகரத்தில் ஒரு ஆண்டில் வாடகைக் கார் ஓட்டுபவர்களில், விபத்துக்குள்ளானவரின் எண்ணிக்கை கூட்டுச்சராசரி 3 ஆக உள்ள ஒரு பாய்ஸான் பரவலை ஒத்துள்ளது. 1000 வண்டியோட்டிகளில் எத்தனை பேர் (i) ஒரு ஆண்டில் விபத்துக்கு உட்படாமலிருப்பவர் ii) மூன்றுக்கும் மேலான விபத்துகளில் உட்படுவர் எனக் காண்க.

கூட்டுச்சராசரி $= m = 3$

பாய்ஸான் பரவலின்படி x விபத்துக்குள்ளாவதற்குரிய

நிகழ்தகவு $= \frac{e^{-m} m^x}{x!}$

(i) $x=0$ எனவே ஒரு விபத்துக்கும் உட்படாமலிருக்கும் நிகழ்தகவு $= \frac{e^{-3} \cdot 3^0}{0!} = e^{-3}$.

$\therefore$ 1000 வண்டியோட்டிகளில், $1000\, e^{-3}$
[$1000 \times .0498$ $49{\cdot}8$]

50 பேர் ஒரு விபத்துக்கும் உட்படாமலிருப்பவர்.

மூன்றுக்கும் மேலான விபத்துகளில் உட்படுவதற்குரிய நிகழ்தகவு = 1 — மூன்றுக்கும் குறைவான விபத்துகளில் உட்படுவதற்குரிய நிகழ்தகவு $1 - \left[1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!}\right] e^{-3}$

எனவே மூன்றுக்கும் மேலான விபத்துகளில் உட்படுபவர்

$$1000\left[1 - \left\{1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!}\right\} e^{-3}\right] = 373$$

5. 200 இயந்திரங்களின் மாதிரிச் சோதனையில், குறிப்பிட்டுள்ள எண்ணிக்கையைக் குறைகளாக உடைய இயந்திரங்களின் எண்ணிக்கை கீழே காணப்படுகிறது.

குறைகளின் எண்ணிக்கை (x)	0	1	2	3	4	5	6
இயந்திரங்களின் எண்ணிக்கை $f)$	29	93	49	16	9	3	1

மேற்கண்ட விவரத்திற்கு ஒரு பாய்ஸான் பரவலைப்பொருத்துக

[குறிப்பு : பாய்ஸான் பரவலில்

$$P[x = r] = \frac{e^{-m} m^r}{r!}$$

$$P[x=r+1] = \frac{e^{-m} m^{r+1}}{(r+1)!} = \left(\frac{e^{-m} m^r}{r!}\right) \frac{m}{r+1}$$

$$P[x=r+1] = \frac{m}{r+1} P[x = r]$$

இதனைப் பயன்படுத்தி, நிகழ்வெண்களை எளிதில் கணக்கிடலாம்.]

மேற்கண்ட நிகழ்வெண் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி = 1·48

இதனைப் பாய்ஸான் பரவலின் பண்பளவை m ஆகக்கொண்டு கணக்கியல் அலைவெண்களைக் கணக்கிட முடியும்.

$$P_0 = e^{-m}$$

$$P_1 = \frac{m}{1} \quad P_1 = \frac{m}{1} e^{-m}$$

$$P_2 = \frac{m}{2} P_1$$

$$P_n = \frac{m}{n} P_{n-1}$$

குறைகளின் எண்ணிக்கை	நிகழ்தகவு	கணக்கியல் நிகழ்வெண்	நேரில் காணும் நிகழ்வெண்
0	$p_0 = \frac{e^{-m} \cdot m^0}{0!} = e^{-1\cdot48} = \cdot2276$	·2276 × 200 = 45·52 (46)	29
1	$p_1 = \frac{m}{1} e^{-m} = 1\cdot48 \times \cdot2276 = \cdot3370$	·3370 × 200 = 67·40 (67)	93
2	$\frac{m}{2} p_1 = \cdot2494$	·2494 × 200 = 49·[illegible] (50)	49
3	$\frac{m}{3} p_2 = \cdot1230$	·1230 × 200 = 24·60 (24)	16
4	$\frac{m}{4} p_3 = \cdot04553$	·04553 × 200 = 9·106 (9)	9
5	$\frac{m}{5} p_4 = \cdot01348$	·2·69[illegible] (3)	3
6	$\frac{m}{6} p_5 = \cdot003325$	·6650 (1)	1
		200	200

எ.கா. 1000-க்கு ஒன்று என்ற முறையில் இரட்டைக் குழந்தைகள் பிறக்கின்றன. ஒரு நகரத்தில் ஒரு நாளில் 100 குழந்தைகள் பிறக்கின்றன. அவற்றில் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட இரட்டைக் குழந்தை ஜோடி பிறப்பதற்கான வாய்ப்பு யாது? இதற்குப் பாய்ஸான் பரவலையும் ஈருறுப்புப் பரவலையும் உபயோகித்து, கணக்கிடப்படும் நிகழ்தகவுகளை ஒப்பிடுக.

பாய்ஸான் பரவலை உபயோகித்து நிகழ்தகவைக் கணக்கிடுதல்

இங்கு $n = 1000, \; p = \frac{1}{1000} = \cdot 001.$

$\therefore \quad m = np = 1000 \times \cdot 001 = \cdot 1$

0, 1, 2, 3 ……… என்ற எண்ணிக்கையில் இரட்டைக் குழந்தைகள் பிறப்பதற்கான நிகழ்தகவை $\frac{e^{-m} \cdot m^r}{r!}$ -லிருந்து பெறலாம். $[r = 0, 1, 2, \ldots\ldots \; m = \cdot 1]$

இரட்டைக் குழந்தைகள் ஜோடி ஒன்று கூட இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= e^{-\cdot 1} = \cdot 9048$

ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட இரட்டைக் குழந்தைகளின் ஜோடி பிறப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$= 1 - \cdot 9048 = 0 \cdot 0952$

ஈருறுப்புப் பரவலை உபயோகித்து நிகழ்தகவைக் கணக்கிடுதல்

$n = 100. \; P = \cdot 001, \; q = 1 - P = \cdot 999.$

$\therefore$ $(\cdot 999 + \cdot 001)^{100}$ என்பதன் விரிவில், 1 வது, 2 வது, 3 வது, ……உறுப்புக்கள் 0, 1, 2, 3… என்ற எண்ணிக்கையில் இரட்டைக் குழந்தை ஜோடி இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைத் தருகிறது.

$\therefore$ இரட்டைக் குழந்தைகள் ஜோடி ஒன்றுகூட இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= P = (\cdot 999)^{100}$.

$\therefore \; \log P = 1000 \log \cdot 999 = \bar{1} \cdot 9566$

$\therefore \; P = \text{antilog } \bar{1} \cdot 9566 = \cdot 9047.$

ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட இரட்டைக் குழந்தைகள் ஜோடி பிறப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$= 1 - \cdot 9047 = 0 \cdot 0953.$

எனவே இரு வழிகளிலும் கணக்கிடப்படும் நிகழ்தகவுகளும் ஏறக்குறைய ஒன்றாகவே இருக்கின்றன.

எ கா. ஒரு தொழிற்சாலையில் 0·1% குறைபாடு உள்ள பொருட்கள் தயாரிக்கப்பட்டு ஒவ்வொரு பெட்டியிலும் 500 பொருட்கள் வைக்கப்படுகின்றன. ஒரு மொத்த வியாபாரி இத்தகைய பெட்டிகளில் 100 வாங்குகிறார். (i) அவர் எத்தனை பெட்டிகளில், குறைபாடுகளே இல்லாதப் பொருள்களை எதிர் பார்க்கிறார்? (ii) எத்தனை பெட்டிகளில், இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட குறைபாடுகள் கொண்ட பொருட்களை எதிர்பார்க்கிறார்?

இங்கு குறைபாடுள்ள பொருள் ஒன்றைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு p $= \cdot 1\%$

$= \cdot 001$

ஒரு பெட்டியில் இருக்கத் தக்க குறைபாடு உள்ள பொருட்களின் மீப்பெருமதிப்பு $= 500$

p மிகச் சிறியதாகவும், n மிகப் பெரிதாகவும் இருப்பதால் பாய்ஸான் பரவலின் பண்பளவை $= m = np = \cdot 001 \times 500$

$= 0.5.$

0, 1, 2, 3......என குறைபாடுகள் கொண்ட பொருட்கள் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவை, $P_r = \frac{e^{-m}\, m^r}{r\,!}$ என்பதன் மூலம் பெறலாம்.

இங்கு $r = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots \infty,\ m = 0 \cdot 5.$

ஒரு பெட்டியில் குறைபாடுகள் கொண்ட பொருட்களே இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= e^{-m} = e^{-0 \cdot 5}$

$= 0 \cdot 6065$

பெட்டியில் குறைபாடு கொண்ட பொருள் ஒன்று இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= e^{-m} \cdot m.$

$= 0 \cdot 5\, e^{-0 \cdot 5}$

குறைபாடுகள் கொண்ட பொருட்கள் 2 அல்லது அதற்கு மேற்பட்டு இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= 0 \cdot 30325.$

$= 1 - (0 \cdot 6065 + 0 \cdot 30325)$

$= 1 - 0 \cdot 90975 = 0 \cdot 09025.$

100 பெட்டிகளில் குறைபாடுகள் கொண்ட பொருட்கள் இல்லாத பெட்டிகளின் எண்ணிகை $\Big\}$ $100 \times 0{\cdot}60650$

குறைபாடு பொருட்கள் $= 61$ ஏறத்தாழ

2 அல்லது அதற்கு மேற்பட்டு இருக்கும் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை $\Big\}$ $= 100 \times {\cdot}09025$ $= 9$(ஏறத்தாழ)

பாய்ஸான் மாறிகளின் கூட்டல் பண்பு

X_1, X_2 என்பவை m_1, m_2-ஐ பண்பளவைகளாகக் கொண்ட இரு சார்பற்ற பாய்ஸான் மாறிகளானுல், அவற்றின் கூட்டுத் தொகை $X_1 + X_2$ என்பது $m_1 + m_2$ வை பண்பளவையாகக் கொண்ட ஒரு பாய்ஸான் மாறியாகும்.

X பாய்ஸான் மாறியாதலால்,

அதன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு,

$$M_x(\theta) = e^{m(e^{\theta}-1)}$$

$$\therefore \quad M_{X_1}(\theta) = e^{m_1(e^{\theta}-1)}$$

$$M_{X_2}(\theta) = e^{m_2(e^{\theta}-1)}$$

X_1, X_2 சார்பற்றவையாதலால், $X_1 + X_1$-ன் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_{X_1+X_2}(\theta) = M_{X_1}(\theta) \cdot M_{X_2}(\theta)$$

$$= e^{m_1(e^{\theta}-1)}\, e^{m_2(e^{\theta}-1)}$$

$$= e^{(m_1+m_2)(e^{\theta}-1)}$$

ஆனுல் $e^{(m_1+m_2)(e^{\theta}-1)}$ என்பது $(m_1 + m_2)$-ஐ பண்பளவையாகக் கொண்ட ஒரு பாய்ஸான் மாறியாகும். சார்புகளின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் மாற்றற்றத் தன்மையின் தேற்றத்தால் $X_1 + X_2$ என்ற மாறி, $m_1 + m_2$-ஐ பண்பளவையாகக் கொண்டு பாய்ஸான் பரவலைத் தழுவுகிறது.

குறிப்பு : இரு சார்பற்ற பாய்ஸான் மாறிகளின் வேறுபாடு பாய்ஸான் பரவலைச் சார்ந்திராது.

$$M_{X_1 - X_2}(\theta) = M_{X_1 + (-X_2)}(\theta)$$

$$= M_{X_1}(\theta) \cdot M_{(-X_2)}(\theta) \quad (X_1, X_2 \text{ சார்பற்றவையாதலால்})$$

$$M_{X_1 - X_2}(\theta) = M_{X_1}(\theta) \cdot M_{X_2}(-\theta)$$

$$[\because \; M_{cx}(\theta) = M_x(c\theta)]$$

$$= e^{m_1(e^{\theta} - 1)} \cdot e^{m_2(e^{-\theta} - 1)}$$

$$= e^{m_1(e^{\theta} - 1) + m_2(e^{-\theta} - 1)}$$

இதனை $e^{m(e^{\theta} - 1)}$ எனும் வடிவில் எழுத முடியாது. எனவே $X_1 - X_2$ என்பது பாய்ஸான் மாறியல்ல.

பாய்ஸான் மாறிகளின் கூட்டல் பண்பை n மாறிகளுக்கும் கீழ்க்கண்டவாறு விரித்துரைக்கலாம். $X_i \; (i = 1, 2, \ldots\ldots n)$ என்பவை சார்பற்ற பாய்ஸான் மாறிகள். அவற்றின் பண் பளவைகள் $m_i, (i = 1, 2, \ldots\ldots n)$ ஆனால் $\sum_{i=1}^{n} X_i$ என்பதுவும், $\sum_{i=1}^{n} m_i$ ஐப் பண்பளவையாகக் கொண்ட ஒரு பாய்ஸான் மாறியாகும்.

$$M_{X_i}(\theta) = e^{m_i(e^{\theta} - 1)}, \quad i = 1, 2, \ldots\ldots n.$$

$$M_{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}(\theta) = M_{X_1}(\theta) \cdot M_{X_2}(\theta) \cdots M_{X_n}(\theta)$$

$$[X_i, \; i = 1, 2, \ldots\ldots n \text{ சார்பற்றவை}]$$

$$\therefore \quad M_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(\theta) = e^{m_1(e^{\theta}-1)}\, e^{m_2(e^{\theta}-1)} \cdots\cdots e^{m_n(e^{\theta}-1)}$$

$$= e^{(m_1+m_2+\cdots+m_n)(e^{\theta}-1)}$$

ஆனால் $e^{(m_1+m_2+\cdots+m_n)(e^{\theta}-1)}$ என்பது $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$-ஐ பண்பளவையாகக் கொண்ட ஒரு பாய்ஸான் மாறியாகும்.

எனவே விலககப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பின் மாற்றற்றத்தன்மையின் தேற்றத்தின்படி, $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ என்பதுவும் $(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)$ ஐப் பண்பளவையாகக் கொண்ட ஒரு பாய்ஸான் மாறியாகும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள்

ஒரு தொலைபேசி தொடர் நிலையத்தில் காலை 9 லிருந்து 10 வரை வரக்கூடிய அழைப்புக்களை X_1 எனக் குறித்தால், அது பாய்ஸான் பரவலை பண்பளவை 2 உடன் சார்ந்துள்ளது. காலை 10 லிருந்து 11 வரை வரக்கூடிய அழைப்புக்கள் X_2 பாய்ஸான் பரவலை பண்பளவை 6 ஆகக் கொண்டு சார்ந்துள்ளது. X_1, X_2 சார்பற்றவையாக இருப்பின், காலை 9 லிருந்து 11 வரை வரும் அழைப்புகள் 4-க்கு மேல் இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

$Y = X_1 + X_2$ ஆனால், பாய்ஸான் பரவலின் கூட்டல் பண்பின்படி, Y, $2 + 6 = 8$ ஐப் பண்பளவையாகக் கொண்ட ஒரு பாய்ஸான் மாறி.

எனவே காலை 9 லிருந்து 11-ற்குள் வரும் அழைப்புகள் x ஆக இருக்க நிகழ்தகவு,

$$P(Y = x) = \frac{e^{-m}\, m^x}{x\,!} = \frac{e^{-8}\, 8^x}{x\,!} \quad x = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

$\therefore$ 4 அழைப்புக்களுக்கு மேல் வருவதற்கான நிகழ்தகவு

$$= P\,[Y > 4] = 1 - P\,[Y \le 4]$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{4} \frac{e^{-8}\, 8^x}{x\,!}$$

$$= 1 - {}^{-8}\left[1 + \frac{8}{1!} + \frac{8^2}{2!} + \frac{8^3}{3!} + \frac{8^4}{4!}\right]$$

எ.கா. 1. ஒரு பாய்ஸான் பரவல் $x = 1, x = 2$ எனும் இரு புள்ளிகளில் முகடை உடையதாக இருக்கின்றது.

இவ்விரு மதிப்புகளில், x ஏதேனும் ஒரு மதிப்பை பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

பாய்ஸான் பரவல் இரு முகடுகளை உடையதாயின், அவை $x = m - 1$, $x = m$ எனும் இரு புள்ளிகளில் அமைந்துள்ளன. அவை $x = 1$, $x = 2$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$$\therefore \quad m - 1 = 1$$

$$m = 2$$

எனவே $P(X = 1) = \dfrac{e^{-m}\, m^x}{x\,!} = \dfrac{e^{-2}\, 2}{1\,!}$

$$P(X = 2) = \frac{e^{-m}\, 2^2}{2\,!} = e^{-2} \cdot 2$$

$x = 1$ அல்லது 2 எனும் மதிப்புகளை ஏற்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= P[X = 1] + P[X = 2] = e^{-2} \cdot 2 + e^{-2} \cdot 2$$

$$= 4 \cdot e^{-2}$$

$$= \cdot 542$$

எ.கா. 2. கூட்டுச்சராசரி 1 ஆக உடைய பாய்ஸான் பரவலில், கூட்டுச்சராசரியை ஒட்டிய சராசரி விலக்கம், $\dfrac{2}{e}$ (திட்ட விலக்கம்) என நிறுவுக.

$$m = 1$$

$$\therefore \quad P(X=x) = \frac{e^{-1} \cdot 1^x}{x!} = \frac{e^{-1}}{x!},\ x = 0, 1, 2, \ldots$$

கூட்டுச்சராசரியை ஒட்டிய சராசரி விலக்கம்,

$$E(|X-m|) = E(|X-1|) = \sum |x-1| \frac{e^{-1}}{x!}$$

$$= e^{-1}\left[1 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots\ldots\right]$$

$$n \text{ ஆவது உறுப்பு} = \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\right)$$

$$= (e-1) - \left(e - 1 - \frac{1}{1!}\right)$$

$$= 1$$

$$\therefore \quad \text{சராசரி விலக்கம்} = e^{-1}\left[1 + \left(\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots\right)\right]$$

$$= e^{-1}[1+1] = \frac{2}{e} = \frac{2}{e} \times 1$$

$$= \frac{2}{e} \times \text{ திட்ட விலக்கம்}$$

(பாய்ஸான் பரவலில் பரவற்படி = கூட்டுச்சராசரி = 1 எனவே திட்ட விலக்கம் = 1)

எ.கா. 4. பாய்ஸான் பரவலின் முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளை, ஈருறுப்புப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளிலிருந்து காண்க.

$$\mu_1 = 0$$

$$\text{கூட்டுச்சராசரி} = np$$

$$\mu_2 = npq$$

$$\mu_3 = npq\,(q-p)$$

$$\mu_4 = npq\,(1-6pq) + 3n^2 p^2 q^2$$

மேற்காணும் மதிப்புகள் ஈருறுப்புப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைத் தருகின்றன.

(i) $n \to \infty$, (ii) $p \to 0$, $q \to 1$ ($\because$ $q+p=1$) எனும்போது $np = m$ எனும் முடிவுற்ற (finite) எண்ணுகை இருக்கும் போதும் ஈருறுப்புப் பரவல் பாய்ஸான் பரவலை அணுகுகிறது.

எனவே பாய்ஸான் பரவலின் விலக்கப்பெருக்குத் தொகைகள்

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \underset{\substack{np\to m\\ q\to 1}}{Lt}(npq) = \underset{np\to m}{\text{எல்லை}}(np)\ \underset{q\to 1}{\text{எல்லை}}(q)$$

$$= m\cdot 1 = m$$

$$\mu_3 = \underset{\substack{np\to m,\ q\to 1\\ p\to 0}}{Lt}[n\,pq\,(q-p)]$$

$$= m\,(1-0) = m$$

$$\mu_4 = \underset{\substack{np\to m\\ p\to 0\\ q\to 1}}{Lt}[npq\,(1-6pq) + 3\,(np)^2\, q^2]$$

$$= m.1\,(1-6\cdot 0\cdot 1) + 3\,m^2\,.\,1$$

$$= m + 3m^2$$

$$\text{கூட்டுச்சராசரி} = \underset{np\to m}{Lt}(np) = m$$

எ.கா. 5. X, Y சார்பற்ற பாய்ஸான் மாறிகள். $X+Y$ கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது X-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட பரவல் ஈருறுப்புப் பரவல் எனக்காட்டுக.

X, Y என்பவை m_1, m_2 ஐ பண்பளவைகளாகக் கொண்ட சார்பற்ற மாறிகள் எனக் கொள்வோம்.

பாய்ஸான் பரவலின் கூட்டல் பண்பின்படி, $X+Y$-ம் பாய்ஸான் மாறியாகும். இதன் பண்பளவை m_1+m_2.

$$\therefore \quad P[X=r \mid X+Y=n] = \frac{P[X=r, X+Y=n]}{P[X+Y=n]}$$

$$= \frac{P[X=r, Y=n-r]}{P[X+Y=n]}$$

$$= \frac{P(X=r)\,P(Y=n-r)}{P(X+Y=n)} \quad (\because \; X, Y \text{ சார்பற்றவை})$$

$$\therefore \quad P[X=r \mid X+Y=n] = \frac{\dfrac{e^{-m_1} \cdot m_1^r}{r!} \cdot \dfrac{e^{-m_2} m_2^{n-r}}{(n-r)!}}{\dfrac{e^{-(m_1+m_2)}(m_1+m_2)^n}{n!}}$$

$$P[X=r/X+Y=n] = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^r \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^{n-r}$$

$$= n\,C_r\,p^r\,q^{n-r} \text{ எனலாம்}$$

இங்கு $p = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}$; $q = 1-p = 1-\dfrac{m_1}{m_1+m_2}$

$$= \frac{m_2}{m_1+m_2}$$

$\therefore \; X+Y=n$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது X-ன் நிபந்தனைப் பரவல் $n, \dfrac{m_1}{m_1+m_2}$ -ஐப் பண்பளவைகளாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலாகும்.

எ.கா. 6. X ஒரு பாய்ஸான் மாறி, அதன் பண்பளவை. m Y மற்றொரு தனித்தமாறி. X கொடுக்கப்பட்டுள்ளபோது, Y-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட பரவல்,

$$P[Y = r/X = x] = xc_r\, p^r (1-p)^{x-r}$$

$(0 < p < 1,\ r = 0, 1, 2, \ldots\ldots x)$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. Y-ன் நிபந்தனைக்குட்படாத பரவல் என நிறுவுக.

$$P[X = x] = \frac{e^{-m} m^x}{x!} \quad (\because X \text{ ஒரு பாய்ஸான் மாறி})$$

$$P[Y = r/X = x] = x C_r\, p^r (1-p)^{x-r}$$

$$\therefore \quad P[X = x, Y = r] = P[X = x] \cdot P[Y = r/X = x]$$

$$= \frac{e^{-m} m^x}{x!} x C_r\, p^r (1-p)^{x-r}$$

$\therefore$ Y-ன் நிபந்தனைக்குட்படாத பரவல்

$$P[Y = r] = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-m} m^x}{x!}\, x c_r\, p^r (1-p)^{x-r}$$

$$= e^{-m} \sum_{x=0}^{\infty} x c_r \frac{p^r m^x (1-p)^{x-r}}{x!}$$

$$= e^{-m} \left[\sum_{x=0}^{\infty} \frac{m^x}{x!} \frac{x!}{r!(x-r)!} p^r (1-p)^{x-r} \right]$$

$$= \frac{e^{-m}}{r!} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{m^x}{(x-r)!} p^r (1-p)^{x-r}$$

$$\frac{e^{-m}(mp)^r}{r!} \sum_{x=r}^{\infty} \frac{m^{x-r}(1-p)^{x-r}}{(x-r)!}$$

$$\frac{e^{-m}(mp)^r}{r!}\sum_{x=r}^{\infty}\frac{[m(1-p)]^{x-r}}{(x-r)!}$$

$$\frac{e^{-m}(mp)^r}{r!}\,e^{m(1-p)}$$

$$=\frac{e^{-mp}(mp)^r}{r!},\ r=0,1,2,\ \ldots$$

எனவே Y, mp-ஐ பண்பளவையாகக் கொண்ட ஒரு பாய்ஸான் மாறி.

எ.கா. 7. X, m-ஐக் கூட்டுச்சராசரியாக உடைய ஒரு பாய்ஸான் மாறி. $\frac{X-m}{\sqrt{m}}$ என்பது கூட்டுச்சராசரி 0 ஆகவும், பரவற்படி ஒன்றாகவும் உடைய ஒரு மாறி. இந்த மாறிக்கு விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பைக் கண்டு, அது $m\to\infty$ எனும் போது $e^{\frac{1}{2}\theta^2}$-ஐ அணுகுகிறது என நிறுவுக.

$$Y=\frac{X-m}{\sqrt{m}}\text{ என்க.}$$

$$E(Y)=E\left[\frac{X-m}{\sqrt{m}}\right]=\frac{1}{\sqrt{m}}E[X-m]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{m}}[E(X)-m]=\frac{1}{\sqrt{m}}[m-m]=0$$

$$V(Y)=E\left[\frac{X-m}{\sqrt{m}}\right]^2=\frac{1}{m}E(X-m)^2$$

$$=\frac{1}{m}\mu_2=\frac{1}{m}m=1$$

Y-ன் வி.பெ.தொ.உ.சா. $= M_y(\theta)$

$$=E(e^{Y\theta})=E\left[e^{\theta(X-m)/\sqrt{m}}\right]$$

$$= e^{-\sqrt{m}\theta} \{ E(e^{\theta X/\sqrt{m}}) \}$$

$$= e^{-\sqrt{m}\,\theta} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-m} \cdot m^x}{x!} e^{\frac{\theta x}{\sqrt{m}}}$$

$$= e^{-\sqrt{m}\,\theta} \cdot e^{-m} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\left[m e^{\frac{\theta}{\sqrt{m}}} \right]^x}{x!}$$

$$= e^{-m-\sqrt{m}\theta} \left[1 + \frac{m e^{\frac{\theta}{\sqrt{m}}}}{1!} + \frac{\left(m e^{\frac{\theta}{\sqrt{m}}} \right)^2}{2!} + \ldots \ldots \right]$$

$$= e^{-m-\sqrt{m}\theta} e^{m e^{\frac{\theta}{\sqrt{m}}}}$$

$$= e^{-m-\sqrt{m}\theta + m\left(1 + \frac{\theta}{\sqrt{m}} + \frac{\theta^2}{2!\, m} + \frac{\theta^3}{3!\, m^{\frac{3}{2}}} + \ldots \ldots \right)}$$

$$= e^{\frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{3!} \frac{\theta^3}{\sqrt{m}} + \ldots \ldots}$$

$m \to \infty$ எனும் நிலையில் இதற்கு எல்லை காணுங்கால்,

$$\underset{m \to \infty}{Lt}\; M_y(\theta) = e^{\frac{1}{2}\theta^2}$$

பயிற்சி

1. பாய்ஸான் பரவல் நடைமுறையில் தோன்றுவதற்குரிய நிலைமைகள் யாவை ? இரு எடுத்துக்காட்டுகள் தருக.

பாய்ஸான் பரவலில் கூட்டுச்சராசரி மாறுபாட்டுக்கு சமம் என நிறுவுக.

எந்த சூழ்நிலையில் பாய்ஸான் பரவல் இயல்நிலைப் பரவலை நெருங்குகிறது ? (ம.ப.)

2. ஒவ்வொன்றிலும் 200 திருகுகள் கொண்ட பெட்டிகளில் சராசரி 2% திருகுகள் பழுதானவை. 10 பெட்டிகள் வாங்கப் பட்டால் அவற்றில் 8 பெட்டிகளில் இரண்டுக்கும் குறைவாக, பழுதுள்ள திருகுகள் இருப்பதற்கு வாய்ப்பு என்ன ? (செ.ப.)

3. ஓர் அலகு பரப்பில் எதிர்ப்பார்க்கப்படும் பாக்டீரியா கிருமிகள் 5 எனில், 25 அலகு பரப்பினில் (அ) ஐந்து (ஆ) ஐந்திற்கு மேற்பட்ட கிருமிகளைக் காண்பதற்குரிய நிகழ்தகவினைக் காண்க.

4. கீழ்க்கண்ட பரவலின் கூட்டுசராசரியும் மாறுபாடும் ஏறத்தாழச் சமமானவை எனக்காட்டுக. மூன்றுவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகையையும் காண்க. பரவலின் வகையைப்பற்றி விளக்கம் தருக.

பண்பு	0	1	2	3	4
அலைவெண்	46	38	22	9	1

5. ஒரு திறமையுள்ள தட்டெழுத்தாளர் அன்றுடம் தான் அடிக்கும் பிரதிகளில் ஏற்படும் பிழைகளைக் குறித்து 300 நாட்களுக்குக் கீழ்கண்டவாறு பட்டியலமைத்திருந்தார்.

ஒவ்வொரு நாளும் ஏற்படும் பிழைகள்	0	1	2	3	4	5	6	மொத்தம்
நாட்கள்	143	90	42	12	9	3	1	300

இதற்கு ஒரு பாய்ஸான் பரவலைப் பொருத்தி, கணக்கியல் அலைவெண்களைக் காண்க.

6. ஒரு பல்கலை கழகத்தில் 100 ஆண்டுகளில், ஒவ்வொரு ஆண்டிலும் பேராசிரியர் பதவிக்கான காலி இடங்களின் விவரங்கள் பின்வருமாறு:

ஆண்டுதோறும் உள்ள காலி இடங்களின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4
ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை	68	20	13	8	2

இவ்விவரங்களுக்குப் பொருந்துமாறு ஒரு பாய்ஸான் பரவலை அமைக்க. கணக்கியல் அலைவெண்களையும் காண்க.

($e^{-\cdot 76} = \cdot 4677$) (விடை : 47, 36, 14, 3, 1)

7. பிளேடுகள் (Blades) உற்பத்தி செய்யும் தொழிற்சாலை ஒன்றில், பிளேடுகளில் குறைபாடுகள் வருவதற்குரிய நிகழ்தகவு 1/1000 என்று அனுபவத்தில் தெரியவந்தது. ஒவ்வொரு கட்டிலும் (Packets) 10 பிளேடுகள் எடுத்து, 10,000 கட்டுகளில் பாய்சாஸன் பரவலைப் பயன்படுத்தி, எத்தனை கட்டுகள் முறையே (1) குறைபாடில்லாமல் (2) ஒருபிளேடு குறையுள்ளதாக, (3) இரண்டு பிளேடுகள் குறைவுள்ளதாகக் காணப்படும்?

8. (அ) பண்பளவை 'm' ஆக உடைய பாய்ஸான் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பைப் பெறுக. அதிலிருந்து ஆதியோடு இணைந்த முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகளைக் காண்க.

(ஆ) பாய்ஸான் பரவல் ஈருறுப்புப் பரவலின் நெருக்கம் என்பதை நிறுவலின் பல்வேறு நிலைகளுக்குத் தெளிவாக விளக்கம் தந்து, நிறுவுக. பாய்ஸான் பரவல் பொருந்தக்கூடிய இரு எடுத்துக் காட்டுகள் கூறுக. (செ.ப.)

9. பல்வேறு துறைகளில் பாய்ஸான் பரவல் காணப் படுவதை சில எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விளக்குக. இப்பரவலுக்கு $\mu_3 = m$, $\mu_4 = 3m^2 + m$ என நிறுவுக. (செ.ப.)

10. ·9-ஐ மாறிலியாகக் கொண்ட பாய்ஸான் பரவலைக் குறிப்பிடுக. இப்பரவலில் 1000 எண்ணிக்கையுடைய ஒரு பெருங் கூறில் 0,1,2,வெற்றிக்குரிய கணக்கியல் நிகழ்வெண்களைக் காண்க. (ம:ப)

11. 'm'-ஐ பண்பளவையாகக் கொண்ட x ஒரு பாய்ஸான் மாறியானால் $e^{-kx}\, kx$-ல் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பென்ன? இங்கு k ஒரு மாறிலி.

12. r_1, r_2, r_3 .... r_k என்பவை $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ .... γ_k பண்பளவைகளாக உடைய k சார்பற்ற பாய்ஸான் மாறிகள் என்றால் (1) $r = \sum_{1}^{k} r_i$ என்பது ஒரு பாய்ஸான் மாறி

(2) $P\left(r_1\, r_2 \ldots\ldots \frac{rk}{r}\right)$ எனும் நிபந்தனைக்குட்பட்ட பரவல் $r = (r_1 + r_2 + \ldots . r_k)$ என்பது நிலையாக இருக்கும்போது ஒரு பல்லுறுப்புப் பரவல் என நிறுவுக.

13. பாய்ஸான் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து காணப் படும் சராசரி விலக்கத்தைக் காண்க.

14. ஒரு பாய்ஸான் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி 2·25. பரவலின் மற்ற பண்பளவைகளைக் காண்க.

(விடை : $\sigma = 1{\cdot}5,\ \mu_2 = 2{\cdot}25,\ \mu_3 = 2{\cdot}25,\ \mu_4 = 17{\cdot}4$
$\beta_1 = {\cdot}44,\ \beta_2 = 3{\cdot}44$)

15. பெண்களின் தற்கொலைகளின் பரவல் கீழே தரப் பட்டுள்ளது.

தற்கொலைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5	6	7
நிகழ்வெண்கள்	364	376	218	89	33	13	2	1

ஒரு பாய்ஸான் பரவலைப் பொருத்துக.

(விடை :

x	0	1	2	3	4
f	209·4	92·1	20·3	2·9	·32)

16 ஒரு புத்தகத்தில் ஒவ்வொரு பக்கத்திலும், கீழ்க்காணும் பிழைகள் காணப்படுகின்றன.

ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் பிழைகளின் எண்ணிக்கை	பக்கங்களின் எண்ணிக்கை
0	211
1	90
2	19
3	5
4	0
	325

ஒரு பாய்ஸான் பரவலைப் பொருத்துக.

{விடை :

x	0	1	2	3	4
f	209·4	92·2	20.2	3	3}

41

17. X, கூட்டுச்சராசரி λ ஐ உடைய ஒரு பாய்ஸான் மாறி.

(1) $E(X^2) = \lambda\, E(X+1)$

(2) $E[\,|X-1|\,] = \dfrac{2}{e}$ [$\lambda = 1$ எனில்]

18. X_1, X_2 முறையே 1, 2 ஐக் கூட்டுச்சராசரிகளாகக் கொண்ட இரு பாய்ஸான் மாறிகள்.

(i) $X_1 + X_2 \geq 4$ (ii) $X_1 + X_2 < 4$ என்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

19. (அ) ஒரு பாய்ஸான் பரவலுக்கு, $X = 1$, $X = 2$ எனுமிடங்களில் இரட்டை முகடு உண்டானுல், $P(X=1)$ காண்க.

(ஆ) ஒரு பாய்ஸான் பரவலில் $P(X = 0) = P(X = 1) = k$ என்றுல் $k = \dfrac{1}{e}$ என நிறுவுக.

(இ) $P(X = 1) = P(X = 2)$ எனும்படி X பாய்ஸான் பரவலைத் தழுவுகிறது. $P(X = 4)$ ஐக் காண்க.

20. X, Y m_1, m_2-வைப் பண்பளவைகளாகக் கொண்ட இரு சார்பற்ற பாய்ஸான் மாறிகள்.

(i) $X + Y = k$ (ii) $X = Y$ ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

13. இயல் நிலைப்பரவல்

(NORMAL DISRTRIBUTION)

நிகழ்வெண் வரைகளில் மிகச் சிறப்புடையதாகிய இயல் நிலை வரையை இப்பகுதியில் காண்போம். இதன் சமன்பாடு $y = y_0 e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$. 1733-ல் டிமாவர் (De Moivre) என்பவர் சூதாட்டத்தில் நிகழக்கூடிய நிகழ்ச்சிகளின் வாய்ப்புகளை ஆராயும் போது, அவை ஓர் குறிப்பிட்ட விதியை தழுவுகின்றன என கண்டறிந்து, இப்பரவலின் கருத்தினை முதன்முதல் எடுத்துரைத் தார். ஈருறுப்பு பரவலின் நெருக்கமே இயல்நிலைப்பரவல் என்பதனைக் கூறியவரும் இவரே.

பௌதீக ஆராம்ச்சிகளில் அளவுகளில் ஏற்படும் முரண்பாடு களைக் குறித்து ஆராயும் போது லாப்லாஸ் (Laplace), காஸ் (Gauss) எனும் இருவரும் இயல்நிலைப் பரவலைத் தனித்தனியாகக் கண்டறிந்தனர்.

சோதனைகளில் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பிற்கும், நேரில் காணும் மதிப்பிற்கும் வேறுபாடு இருப்பது இயற்கை. எடுத்துக் காட்டாக ஒரு பொருளின் நீளத்தை அளவுகோல் ஒன்றை கொண்டு அளக்கும் போது, அளவுகோலின் குறிகளில் ஏற்பட்டுள்ள சிறு தேய்வுகளாலோ, அளப்பவரது சிறு கவனக் குறைவாலோ, சிறுபிழைகள் ஏற்பட்டு, ஒவ்வொரு தடவையும், ஒரே மதிப்பு வராமல் சிறு சிறு மாற்றங்களுடன், வெவ்வேறு நீளங்கள் கிடைக்கலாம். இது போலவே ஒரு பொருளின் நிறையைக்காணும் போது ஒவ்வொரு முறையும் நிறையில் மிகச் சிறிய வேறுபாடுகள் இருக்கலாம். இத்தகைய பிழைகளுக்கும், வான ஆராய்ச்சிகளில் கண்டறிந்த பிழைகளுக்கும் விளக்கம் தெரிவித்தலில் இந்நியதி அடிப்படையாக உள்ளதால் இவ் வரையை பிழைகளின் இயல்நிலைவரை, (Normal curve of

error), இயல்நிலை நிகழ்தகவுவரை (Normal probability curve) என்று அழைக்கின்றனர். காஸியன் பரவல் என்றும் இப்பரவலைக் கூறுவதுண்டு.

(1) அளவுகளின் பிழைகள் நேர்க்குறி அல்லது குறைகுறி உடையவை. (2) சமமதிப்பு உடைய மிகை அல்லது குறை பிழைகள் ஒரே சிறு அளவில் காணப்படுகின்றன. (3) பெரும் பிழைகளைவிட சிறு பிழைகளே அதிகம் காணப்படுகின்றன.

பிழைகளின் விதிகள் இயல் நிலைப்பரவலோடு நன்கு பொருந்தியதால் புள்ளியியலில் இதனைப் பெரிதும் பயன்படுத்தத் தொடங்கி, இயற்கையில் காணப்படும் எல்லாப் பரவல்களுமே இதனையே தழுவுதல் வேண்டும் என்ற முடிவுக்கு வந்து விட்டனர். பல புள்ளியலறிஞர், 19-ம் நூற்றுண்டின் புள்ளியியல் நிபுணர் லிப்மான் (Lipmann) என்பவரின் கூற்றின் படி 'பிழைகளின் நியதியை ஒவ்வொருவரும் நம்புகிருர்கள். ஏனெனில் ஆராய்ச்சியாளர் இதனை ஒரு கணக்கியல் தேற்றமாகக் கருதுகின்றனர். கணித வல்லுநர்கள் ஒரு ஆராய்ச்சி உண்மை யாக கருதுகின்றனர்.

"Everybody believes in the law of errors (the nomal curve), the experimenters because they think it is a mathematical theorem, the mathematicians because they think it is an experimental fact" .... *Lipmann*.

எனவே கணித வல்லுநரும் ஆராய்ச்சியாளரும்இந்நியதி மற்ற வரால் நிறுவப்பட்டதாக தமக்குள் எண்ணிக்கொண்டனர். ஆனுல் காலப்போக்கில், இயல் நிலைவரை மட்டுமன்றி வேறு பல வரைகளும் பல சிறந்த கணக்கியல் பண்புகளைக் கொண்டுள்ளன என்பதைக் கண்டறிந்தனர். இருப்பினும் கணித ஆராய்ச்சியின் விளைவாக இயல் நிலை வரையின் தனி சிறப்பு மீண்டும் நிறுவப் பட்டு, புள்ளியியலின் பெரும்பான்மையான பரவல்கள் இயல்நிலை பரவல்களாகவோ அன்றி குறிப்பிட்ட சூழ்நிலைகளில் ஏறத்தாழ இயல்நிலைப் பரவல்களாக அமைந்துள்ளதைக் காண்கிருேம்.

ஈருறுப்புப்பரவலிலிருந்து இயல்நிலை வரையைப் பெறுதல்

n-ன் மிகப்பெரிய மதிப்புகட்கு p அல்லது q மிகச்சிறியனவாக இல்லாத போது ஈருறுப்புப் பரவலின் நெருக்கமே இயல்நிலைப் பரவல் என நிறுவலாம்.

$p = q = \frac{1}{2}$ எனின், பரவல் சமச்சீருடையது.

$$N(q+p)^n = N\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^n = N\left(\frac{1}{2}\right)^n [1+nC_1+nC_2+\ldots]$$

$$x \text{ வெற்றிக்குரிய நிகழ்வெண்} = N\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

n-ஐ ஒரு இரட்டைப்படை எண்ணுக, $n = 2k$ என எடுத்துக் கொள்வோம். இறுதியில் $n \to \infty$ எனும் போது, $k \to \infty$ ஆதலால், வழிமுறை வசதிக்காக இவ்வாறு எடுத்துக்கொள்வது பரவலின் பொதுத்தன்மையைப் பாதிப்பதில்லை.

ஈருறுப்புப் பரவலில், $n = 2k$ ஆக இருக்கும்போது, நடு உறுப்பாகிய $(k+1)$ ஆவது உறுப்பே மிகப்பெரியது. எனவே $x = k$ எனும் இடத்தில் அமையும் நிலைக்கோடு பெருமத்தைப் பெறும். இதனை y_0 எனக் கொண்டால்,

$$y_0 = N\cdot 2kC_k \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= N\cdot 2k\,C_k\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

$$= N\,\frac{2k!}{k!\,k!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

y_0-ற்கு இரு புறத்திலும், பரவல் சமச்சீராக அமைந்து, இறுதியாக x அச்சுடன் ஒன்றுகிறது.

$(k+x)$ வெற்றிகட்குரிய நிகழ்வெண்,

$$y_x = N\cdot 2k\,C_{k+x}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = N\,\frac{(2k)}{(k+x)!\,(k-x)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

$$\frac{y_x}{y_0} = \frac{!\;k!}{(k+x)!\,(k-x)!}$$

$$= \frac{k!}{[k!(k+1)(k+2)\ldots\ldots(k+x)]}$$

$$\frac{[(k-x)!\,(k-x+1)(k-x+2)\ldots\ldots(k-1)^k]}{(k-x)!}$$

$$= \frac{k(k-1)(k-2)\ldots\ldots(k-x+1)}{(k+1)(k+2)\ldots\ldots(k+x)}$$

$$\frac{y_x}{y_0} = \frac{k^x\left[1\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{k}\right)\right]}{k^x\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{2}{k}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{k}\right)\right]}$$

$$\log\left(\frac{y_x}{y_0}\right) = \log\left[1\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{k}\right)\right]$$

$$-\log\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{2}{k}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{k}\right)\right]$$

$$= \sum_{r=1}^{x-1}\log\left(1-\frac{r}{k}\right)-\sum^{x}\log\left(1+\frac{r}{k}\right)$$

$$= -\sum_{r=1}^{x-1}\left[\frac{r}{k}+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{k}\right)^2+\ldots\ldots\right.$$

$$\left.-\sum_{r=1}^{x}\left(\frac{r}{k}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{k}\right)^2+\ldots\ldots\right]$$

$n \to \infty$ எனின், $2k \to \infty$.

எனவே k ஒரு பெரிய எண் ஆகும்,

எனவே $\left(\frac{r}{k}\right)^2$, $\left(\frac{r}{k}\right)^3$, …… முதலிய உறுப்புகளை மிகச் சிறியவை என நீக்க,

$$\log \frac{y_0}{y_x} = -\frac{1}{k}\left[1+2+\dots+(x-1)\right] - \frac{1}{k}[1+2+\dots+(x-1)+x]$$

$$= -\frac{2}{k}[1+2+\dots+(x-1)] - \frac{x}{k}$$

$$= -\frac{2}{k}\cdot\frac{(x-1)x}{2} - \frac{x}{k} = -\frac{x^2}{k} + \frac{x}{k} - \frac{x}{k}$$

$$= -\frac{x^2}{k}$$

$$\frac{y_x}{y_0} = e^{-\frac{x^2}{k}}$$

$$y_x = y_0\, e^{-\frac{x^2}{k}}$$

ஈருறுப்புப் பரவலில் $\sigma^2 = npq = 2k \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$$= \frac{k}{2}$$

$$\therefore \quad k = 2\sigma^2$$

$$\therefore \quad y_x = y_0\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

x மீப்பெரு y தூரத்திலிருந்து அளக்கப்படுகிறது. (x, y) $(-x, y)$ என்னும் இரு புள்ளிகளும், இயல்நிலைப் பரவலின் சார்பைத் திருப்திபடுத்துவதால், இவ்வரை y அச்சிற்கு இரு மருங்கிலும் சமச்சீராக அமைகிறது. இப்பரவலின் கூட்டுச்சராசரி y அச்சில் அமைவதால் $\bar{x} = 0$ என்ற மூலப்புள்ளியை வேறொரு புள்ளிக்குமாற்ற, கூட்டுச்சராசரியின் x ஆயதூரம் m ஆனால் சமன்பாட்டில் x-ற்குப் பதிலாக x — m என மாற்றவேண்டும்.

ஒரு செவ்வகப் படத்தின் நெருக்கமே நிகழ்வெண் வரையாகும். எனவே ஈருறுப்புச் செவ்வகப் படத்தில் அடைபடும்

மொத்தப் பரப்பாகிய N நிகழ்வெண் வரைக்குள் அமையும் பரப்பு N-க்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

$$\int_{-\infty}^{\infty} y\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} y_0 \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx = N$$

$$N = y_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \sqrt{2}\,\sigma . du$$

$$= y_0 \sqrt{2}\,\sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = y_0\,\sqrt{2}\,\sigma . \sqrt{\pi}$$

$$\therefore\ y_0 = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

எனவே இப்பரவலின் சமன்பாடு

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$t = \frac{x-m}{\sigma}$ என பிரதியிட்டால்,

$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{t^2}{2}}$ என அமைகிறது.

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{t^2}{2}}$ என்பதை $\phi\,(t)$ எனக்குறிப்பிட்டால்

$$y = \frac{N}{\sigma}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{t^2}{2}}\right] = \frac{N}{\sigma}\,\phi\,(t) \qquad \ldots\ldots \quad (I)$$

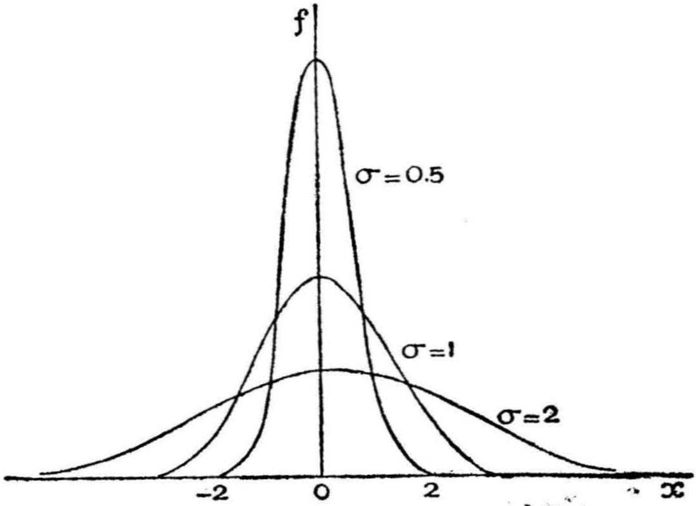
என்றாகிறது.

சமன்பாடு I-ல் $N = 1,\ \sigma = 1$ எனப் பிரதியிட்டால்

$y = \phi\,(t)$ என்றாகிறது.

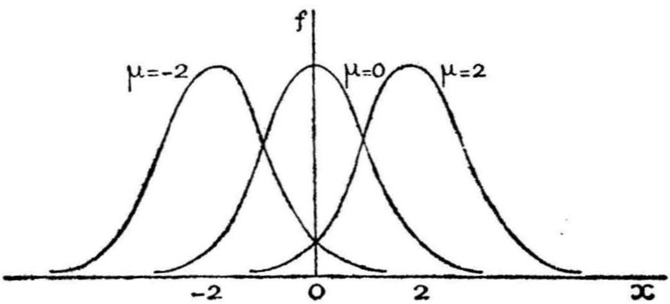
∴ மொத்த நிகழ்வெண் 1 ஆகவும், திட்டவிலக்கம் 1 ஆகவும் உடைய இயல்நிலைவரையே $\phi(t)$,. இது இயல்நிலை நிகழ்தகவுச் சார்வு என்று அழைக்கப்படுகிறது.

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$ என்னும் சமன்பாட்டைக் கொண்ட வரையானது இயல்நிலை நிகழ்தகவு வரையெனப்படுகிறது.



படம் 13·1

(13·2) படத்தில் காணப்படுகின்ற இயல்நிலை வரைகள் மூன்றும் வெவ்வேறு கூட்டுச்சராசரிகளை, முறையே $\mu = -2, 0,$



படம் 13·2

2-ஐக் கொண்டுள்ளன. ஆனால் இவற்றின் திட்டவிலக்கங்கள் ஒரே மதிப்பை உடையன. எனவே மூன்றும் வடிவத்தில்

ஒன்றாகவும், மீப்பெருநிலைத் தூரத்தின் இட அமைப்பில் மட்டுமே மாறுபட்டுக் காணப்படுகின்றன. எனவே கூட்டுச்சராசரியில் ஏற்படும் மாற்றம் மீப்பெரு நிலைக்கோட்டை மட்டும் வலப் பக்கமாகவோ, இடப்பக்கமாகவோ மாற்றி அமைக்கிறது· உருவத்தைப் பாதிப்பதில்லை.

(13·1) படத்தில் காணப்படும் இயல்நிலை வரைகள் மூன்றிற்கும் கூட்டுச்சராசரி பூஜ்யம். திட்டவிலக்கங்கள் 5, 1, 2 என உள்ளன. வரைக்குள் அடங்கும் பரப்பில் பெரும் பகுதி $\mu - 3\sigma$-விலிருந்து, $\mu + 4\sigma$-விற்குள் இருப்பதால், σ-வின் மதிப்பு அதிகரிக்க, அதிகரிக்க அடித்தளம் அதிகரிப்பதால், உயரம் குறைகிறது: எனவே இம்மூன்று வரைகளும் $x = 0$ என்னும் நிலைக்கோட்டிற்கு இருமருங்கிலும் சமச்சீராக உள்ளன. ஆனால் உருவ அமைப்பில் மாறுபடுகின்றன.

மொத்த நிகழ்வெண் N-ல் ஏற்படும் மாற்றங்கள் வரையின் வடிவத்தைப் பாதிக்காமல், வரையினுள் அடங்கியுள்ள பரப்பு N ஆக இருக்குமாறு, வரையை மேல் நோக்கியோ அல்லது கீழ் நோக்கியோ மாற்றி அமைக்கின்றன.

இயல்நிலைப் பரவலின் y-தூரப்பட்டியல் (Table of ordinates of the normal distribution)

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$ என்ற வாய்பாட்டில்: $\frac{x-m}{\sigma} = 6$,

$N = 1$, $\sigma = 1$ எனப் பிரதியிட்டால், $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$

$= \phi(t)$ எனக் கிடைக்கிறது.

$t = -\infty$-யிலிருந்து $+\infty$ வரை. $\phi(t)$ யின் மொத்தப் பரப்பு $= 1$ எனவே $y = \phi(t)$ என்பதனை இயல்நிலை நிகழ்தகவு வளைகோடாகக் (Normal probability curve) கருதலாம்.

$y = \phi(t)$ எனும் வரையில், $t = 0$ முதல் $t = 4$ வரை, ·01 இடைவெளியில் அம்மதிப்புகளோடு இணைந்த y-தூரங்கள் ஒரு பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன. y-தூரப்பட்டியல் சமச்சீருடையதாதலால், t-யில் இணைந்த y-தூரமே, $-t$-க்கும் உரியது·

$y = \frac{N}{\sigma}\phi(t)$ என்ற தொடர்பின் மூலம், கொடுக்கப்பட்டுள்ள இயல் நிலை வரையின் y ஆயத்தூரங்களைக் கணக்கிடலாம்.

$t = 0$-ல் y தூரம் $= \cdot 3989\cdot$ $t = 1, 2, 3$ ல் y தூரங்கள் ·2420, ·0540, ·6044 ஆதலால், அவை முறையே ·607, ·135, ·011 முறைகள் கூட்டுச்சராசரியிலுள்ள தூரத்தைப் போன்றவை.

இயல்நிலைப் பரவலின் பரப்புப்பட்டியல் (Table of areas of Normal Curve)

இயல்நிலைப் பரவலின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $\phi(t)$ அடைக்கும் மொத்தப் பரப்பு

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\, dt = 1\cdot$$ இவ்வளைவரை சமச்சீராக இருப்பதால்,

$t = 0$-ல் வரையப்படும் நிலைக்கோடு, மொத்தப் பரப்பளவை இரு சமபாகங்களாகப் பிரிக்கிறது

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\, dt = 2\int_{0}^{\infty} \phi(t)\, dt = 2 \times 0\cdot 5 = 1$$

மேலும் $$\int_{-t}^{0} \phi(t)\, dt = \int_{0}^{t} \phi(t)\, dt$$

$$p[-1 \leq t \leq 1] = \int_{-1}^{1} \phi(t)\, dt = 2\int_{0}^{1} \phi)t)\, dt = \cdot 3413 \times 2 = \cdot 6826$$

எனவே மொத்த எண்ணிக்கை 100 ஆனால், $m - \sigma$, $m + \sigma$ இடைவெளி 68% மதிப்புகளைக் கொண்டுள்ளது.

இது போன்றே $P[-2 \leq t \leq 2]$

$$= 2\int_{0}^{2} \phi(t)\, dt = 2 \times \cdot 4772 = \cdot 9544$$

$$P\,]-3 \le t \le 3]$$

$$= 2\int_0^3 \phi(t)\,dt = 2 \times \cdot 49865$$

$$= \cdot 9973.$$

∴ மொத்த நிகழ்வெண்ணில், 95%-க்கு மேல், $(m - 2\sigma, m + 2\sigma)$ இடைவெளியிலும், 99%-க்கு மேல் $m - 3\sigma$, $m + 3\sigma$ இடைவெளியிலும் காணப்படுகின்றன.

பரப்புப்பட்டியலைப் பயன்படுத்தும் முறைக்கு சில எடுத்துக் காட்டுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

1. $t = 0$ முதல் $t = 1{\cdot}576$ வரை

2. $t = -1{\cdot}75$ முதல் $t = 2{\cdot}51$ வரை

3. $t > 1{\cdot}85$ ஆக இருக்கும் போது, இயல்நிலை நிகழ்தகவு வரையின் பரப்புகளைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு

$t = 1{\cdot}57$ எனும்போது பரப்பு $= \cdot 4418$

$t = 1{\cdot}58$ எனும்போது பரப்பு $= \cdot 4429$

t-யில் $\cdot 01$ வேறுபாடு இருக்கும்போது, பரப்பில் உள்ள

வேறுபாடு $= \cdot 0011$

t-யில் $\cdot 006$ வேறுபாடு இருக்கும்போது பரப்பில் உள்ள

$$\text{வேறுபாடு} = \frac{\cdot 0011 \times \cdot 006}{\cdot 01}$$

$$= \cdot 00066$$

$$\text{எனவே} \int_0^{1.576} \phi(t)\,dt = \cdot 44246$$

$$= \cdot 4425 \text{ என்றாகிறது.}$$

2. $$\int_{-1.75}^{2.51} \phi(t)\,dt = \int_{-1.75}^{0} \phi(t)\,dt + \int_{0}^{2.51} \phi(t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{1.75} \phi(t)\,dt + \int_{0}^{2.51} \phi(t)\,dt = \cdot 4599 + \cdot 4941 = .9540$$

3. $$\int_{1.85}^{\infty} \phi(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} \phi(t)\,dt - \int_{0}^{1.85} \phi(t)\,dt$$

$$= 0.5 - \cdot 4713 = \cdot 0287$$

இயல்நிலைப் பரவலின் மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்

$$\mu_k = \frac{1}{N} \int f(x)\,(x - \bar{x})^k\,dx$$

$$\mu_{2n+1} = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^{2n+1} \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

$f(x)\,(x - m)^{2n+1}$ ஒரு ஒற்றைப்படைச் சார்பு.

எனவே $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,(x - m)^{2n+1}\,dx = 0$$

எனவே இயல்நிலைப் பரவலின் எல்லா ஒற்றைப்படை மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளும் பூஜ்யமாகும்.

$$\mu_{2n+1} = 0 \qquad n = 0, 1, 2 \ldots\ldots$$

இயல்நிலைப் பரவலின் இரட்டைப்படை விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்

$$\mu_{2n} = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,(x - m)^{2n}\,dx$$

$$= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} (x-m)^{2n} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot t^{2n} \sigma^{2n} \sigma \, dt$$

$t = \dfrac{x - m}{\sigma}$ எனக் கொள்வோம்.

$$\sigma t = x - m.$$

$$\sigma \, dt = dx.$$

$$\mu_{2n} = \frac{\sigma^{2n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot t^{2n} \, dt$$

$$I_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot t^{2n} \, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n-1} \left(e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot t \, dt \right)$$

$$= \int_{\infty}^{\infty} t^{2n-1} \, d \left[- e^{-\frac{t^2}{2}} \right]$$

பகுதிப்படுத்தித் தொகை காணும்போது

$$I_{2n} = \left[- t^{2n-1} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$+ (2n-1) \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n-2} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

முதல் உறுப்பு இரு எல்லைகளிலும் பூஜ்ஜியமாகிறது

$$\therefore \quad I_{2n} = (2n-1)\, I_{2n-2}$$

$$= (2n-1)(2n-3)\, I_{2n-4}$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= (2n-1)(2n-3)\ldots\ldots 3\cdot1\cdot I_0$$

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} t^0 \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{2\pi}$$

$$\therefore \quad \mu_{2n} = (2n-1)(2n-3)\ldots\ldots 3\cdot1\cdot \sqrt{3\pi}\cdot \frac{\sigma^{2n}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= (2n-1)(2n-3)\ldots\ldots 3\cdot1\cdot \sigma^{2n}$$

$$\mu_2 = \sigma^2$$

ஆனால் $\mu_2 = (\text{திட்டவிலக்கம்})^2$

எனவே இயல்நிலைப் பரவலின் திட்டவிலக்கம் σ ஆகும்.

β, γ கெழுக்கள்

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = 0$$ [∵ ஒற்றைப்படை விலக்கப் பெருக்குத் தொகை $\mu_3 = 0$]

எனவே இயல்நிலைப் பரவல் சமச்சீருடையது.

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = 0$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} = 3$$

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = 0$$

எ.கா. ஒரு இயல்நிலைப் பரவலில் 10-ஐ மூலமாகக் கொண்ட முதல் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை 40. 50-ஐ மூலமாகக் கொண்ட நான்காவது விலக்கப் பெருக்குத்தொகை 48. பரவலின் கூட்டுச் சராசரியையும் திட்டவிலக்கத்தையும் காண்க. (செ.ப.)

A என்பது மூலமானல்

$$\bar{x} - A = \mu_1'$$

$$A = 10 = \mu_1' = 40$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \mu_1' + A$$
$$= 40 + 10$$
$$= 50$$

$A = 50$ ஆனால் $\mu_4' = 48$

இங்கு $\bar{x}$-ம் 50 ஆதலால்

$\mu_A' = \mu_4 = 48.$

ஆனால் இயல்நிலைப் பரவலில் $\mu_4 = 3\sigma^4$

$$48 = 3\sigma^4$$
$$\sigma^4 = 16$$
$$\therefore \quad \sigma = 2.$$

இயல்நிலைப் பரவலின் முகடு

$f(x)$, மீப்பெரு மதிப்படையும் x-ன் மதிப்பே முகடாகும். முகட்டின் மதிப்பு α ஆனால், $f'(\alpha) = 0$, $f''(\alpha) < 0$.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\therefore \quad \log f(x) = \log \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \log e$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-2(x-m)}{2\sigma^2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sigma^2}(x-m)f(x)$$

$f'(x) = 0$ எனின், $x - m = 0.$

$$\therefore \quad x = m.$$

$$f''(x) = -\frac{1}{\sigma^2}[1 \cdot f(x) + (x-m)f'(x)]$$

$$f''(x)_{x=m} = -\frac{f(m)}{\sigma^2} = -\frac{1}{\sigma^2}\,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

$$f''(x) < 0 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^3}$$

$\therefore \quad x = m$ (முகடு) $=$ இயல்நிலைப் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி

இயல் நிலைப்பரவலின் இடைநிலை

இயல் நிலைப்பரவலின் இடைநிலை M ஆனால்

$$\int_{-\infty}^{M} df(x)\, dx = \frac{N}{2} \text{ ஆகும்.}$$

$$\frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{M} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \frac{N}{2}$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{m} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\, dx + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{m}^{M} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{m} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \left[\frac{x-m}{\sigma} = t\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-z} \frac{dz}{\sqrt{2z}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{t^2}{2} = z \\ \frac{2t\, dt}{2} = dz \end{array} \right\}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-z} z^{\frac{1}{2}-1}\, dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_m^M e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_m^M e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx = 0$$

இதிலிருந்து $m = M$ எனக் கிடைக்கிறது.

எனவே கூட்டுச்சராசரியே. இடை நிலையும் ஆகிறது.

இயல் நிலைப்பரவலின் சராசரி விலக்கம்.

$$\text{கூட்டுச்சராசரி விலக்கம்} = \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,|\,x-m\,|\,dx$$

$$= \frac{N}{N\cdot\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,|\,x-m\,|\,dx$$

$x = m$ என்னும் நிலைக்கோட்டினைப் பற்றி வளைவரை இரு மருங்கிலும் சமச்சீராயிருப்பதால்

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\int_m^{\infty} f(x)\,dx \text{ என எழுதலாம்.}$$

இடைவெளி (m, ∞) யில், $x > m$ ஆக இருப்பதனால் $(x-m)$ நேர்க் குறியுடையதாகும்.

$$\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_m^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,(x-m)\,dx$$

$z = \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}$ எனக் கொண்டால், $dz = \frac{2(x-m)}{2\sigma^2} dx$

சராசரி விலக்கம் $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma^2 \int_0^\infty e^{-z}\, dz$

[∵ $x = m$
$z = 0$
$x \to \infty$
$z \to \infty$]

$= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 1 = \cdot 79788\,\sigma$

$= \frac{4}{5}\,\sigma$ (தோராயமாக)

இயல்நிலைப் பரவலின் கால்மான விலக்கம்

முதல் கால்மானம் Q_1 ஆனால்,

$$\int_{-\infty}^{Q_1} f(x)\, dx = \frac{1}{4}$$

Q_1 க்குரிய t யின் மதிப்பு $-t_1$ ஆனால்,

$$\int_{-\infty}^{t^1} \varphi(t) dt = .25$$

$$\therefore \int_{-t_1}^{0} \varphi(t)\, dt = .25 = \int_0^{t_1} \varphi(t)\, dt$$

$\therefore \quad t_1 = \cdot 6745$

ஆனால் $-t_1 = \frac{Q_1 - m}{\sigma}$

$$-\frac{2}{3} = \frac{Q_1 - m}{\sigma}$$

$$Q_1 = m - \frac{2}{3}\sigma$$

இதுபோன்றே மூன்றும் கால்மானம் Q_3-விற்குரிய t மதிப்பு t_2 ஆனல் $\int_{-\infty}^{t_2} \varphi(t)\,dt = \cdot 75$

$$\text{அதாவது} \int_{0}^{t_2} \varphi(t)\,dt = .25$$

$$t_2 = .6745$$

$$t_2 = \frac{Q_3 - m}{\sigma} = \frac{2}{3}$$

$$Q_3 = m + \frac{2}{3}\sigma$$

$$\text{கால்மான விலக்கம்} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{2}{3}\sigma$$

எ.கா. x, பூஜ்யத்தைக் கூட்டுச் சராசரி ஆகவும், 1 ஐப் பரவற்படி ஆகவும் கொண்டு இயல் நிலைப்பரவலைச் சார்ந்துள்ளது. x^2-ன் எதிர்பார்த்தலையும், பரவற்படியையும் காண்க.

தீர்வு

பூஜ்யத்தைக் கூட்டுச் சராசரி ஆகவும், 1 ஐப் பரவற்படி ஆகவும் கொண்ட இயல்நிலை வரையின் சமன்பாடு,

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\therefore \quad E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 . f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 . \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x\left(x\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-x\, e^{-\frac{1}{2}x^2} \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx.$$

$$= 0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{2\pi} = 1. \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$\mu_2' = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2)^2 \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 . \left(x\, e^{-\frac{1}{2}x^2} \right) dx.$$

$$= 0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 3x^2\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx.$$

$$= 3 \times 1 = 3 \text{ (சமன்பாடு 1-லிருந்து)}$$

$$\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = 3 - 1 = 2.$$

எ.கா. $N(m, \sigma^2)$ என்ற இயல்நிலைப்பரவலுக்கு, $\mu_{2n+2} = \sigma^2 \mu_{2n} + \sigma^3 \frac{d}{d\sigma}\mu_{2n}$ என நிறுவுக. (μ_n என்பது கூட்டுச் சராசரி m-ஐப்பற்றிய n ஆவது விலக்கப் பெருக்குத்தொகை). β_2-ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$\mu_{2n} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^{2n}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx.$$

$$\frac{d\mu_{2n}}{d\sigma} = -\frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^{2n} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$+ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-m)^{2n+2}}{\sigma^3} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$\therefore \sigma^3 \frac{d\mu_{2n}}{d\sigma} + \sigma^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^{2n} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^{2n+2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= \sigma^3 \frac{d}{d\sigma} \mu_{2n} + \sigma^2 \mu_{2n} = \mu_{2n+2}$$

$n = 0$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$\mu_2 = \sigma^2 \mu_0 + \sigma^3 \frac{d}{d\sigma} \mu_0 = \sigma^2 . 1 = \sigma^2$$

$$n = 1,\ \mu_4 = \sigma^2 \mu_2 + \sigma^3 \frac{d}{d\sigma} \mu_2 = \sigma^2 . \sigma^2 + \sigma^3 . 2\sigma = 3\sigma^4$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} = 3.$$

எ.கா. ஒரு நிகழ்வெண் பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

x	0	1	2	3	4	5	6
f	3	9	2	30	22	10	5

இதனை இயல் நிலைப்பரவலில் இருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு கூறுகக் கொண்டு பரவலை எழுதுக. இதனை அடிப்படையாகக் கொண்டு 2 5 – 3·5 என்ற வீச்சில் காணப்படுகின்ற நிகழ்வெண்களைக் கணக்கிடுக. மேலும் $x > 5.5$ ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்வெண்களைக் கணக்கிடுக. (மதுரை '71)

முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி விலக்கத்தையும் காண்க

x_r	f_r	$f_r d_r^2$	$x - \bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$f_r(x-\bar{x})^2$
0	3	0	– 3 09	9 5481	0
1	9	9	– 2·09	4 3681	4·36 1
2	21	84	– 1·09	1 1081	2·2162
3	30	270	– 0·09	0 0081	0·0243
4	22	352	·91	0 8281	3 3124
5	10	250	1·91	3 6481	18 2405
6	5	180	2 91	8·4681	50·8086
	100	1145			78·9701

$$\bar{x} = \frac{9 + 42 + 90 + 88 + 50 + 30}{100}$$

$$= \frac{309}{100} = 3{\cdot}09.$$

இயல்நிலை வரைக்கு உரிய சமன்பாடு

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\sigma^2 = \frac{1145}{100} - (3\ 09)^2$$

$$= 11{\cdot}45 - 9{\cdot}5\ 481$$

$$= 1{\cdot}9019.$$

$$y = \frac{100}{\sqrt{2\pi \times 1{\cdot}9019}}\, e^{-\frac{(x-3{\cdot}09)^2}{2 \times 1{\cdot}9019}}$$

$$t = \frac{x - m}{\sigma} = \frac{2\cdot3 - 3\cdot09}{\sqrt{1\cdot9019}}$$

$$= \frac{-\cdot59}{1\cdot379} = -0\cdot4279.$$

$$t = \frac{3\cdot5 - 3\cdot09}{1\cdot379}$$

$$= \frac{0\cdot41}{1\cdot379}$$

$$= 0\cdot2973.$$

$-0\cdot4279 - 0\cdot2973$-ல் உள்ள இடைவெளியில் அமைந்துள்ள பரப்பைக் காணவேண்டும்.

$$\int_{-0\cdot4279}^{\cdot2973} \phi(t)\,dt = \int_{0}^{-\cdot4279} \phi(t)\,dt + \int_{0}^{\cdot2973} \phi(t)\,dt$$

$$= 0\cdot1664 + 0\cdot1141$$

$$= 0\cdot2805.$$

எனவே $2\cdot5 - 3\cdot5$ என்ற இடைவெளியில் அமைந்துள்ள நிகழ்வெண் 28·05

$x = 5\cdot5$ என இருக்கும்போது,

$$t = \frac{5\cdot5 - 3\cdot09}{1\cdot379}$$

$$= \frac{2\cdot41}{1\cdot379} = 1\cdot748.$$

$x > 5\cdot5$-ஐ எனின் $\int_{1\cdot748}^{\infty} \phi(t)$-ஐக் காணவேண்டும்.

$$\int_{1\cdot748}^{\infty} \phi(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} \phi(t)\,dt - \int_{0}^{1\cdot748} \phi(t)\,dt$$

$$= 0{\cdot}5 - 0{\cdot}4579$$

$$= 0{\cdot}0401$$

நிகழ்வெண் $= 0{\cdot}0401 \times 100$

$$= 4{\cdot}01$$

சராசரி விலக்கம் $= \frac{4}{5}\sigma = \frac{4}{5} \times 1{\cdot}379$

$$= 1.103$$

இயல்நிலைப் பரவலின் பண்புகள்

1. இயல்நிலைப் பரவலின் வரை மீப்பெரு நிலைத்தூரத்திற்கு இருமருங்கிலும் சமச்சீராக உள்ளது.

2. இயல்நிலைப் பரவலில் கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகிய மூன்றும் ஒன்றுகின்றன.

3. இயல் நிலை வரையின் மீப்பெரு நிலைத்தூரம் $\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. இங்கு மொத்த நிகழ்வெண் N. திட்ட விலக்கம் σ. மீப்பெரு நிலைத்தூரம் வரையை இருசமபாகமாகப் பிரிக்கிறது

4. இயல்நிலைப்பரவலின் கூட்டுச்சராசரியை ஒட்டிய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் அனைத்தும் 0 ஆகும். இரட்டைப்படை விலக்கப் பெருக்குத்தொகை $\mu_{2n} = (2n-1)(2n-3)(2n-5) \ldots\ldots 3{\cdot}1\,\sigma^{2n}$ எனும் மடங்குத் தொடர் மூலம் கிடைக்கிறது.

5. இயல்நிலைப் பரவலின் கோட்டளவை $\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = 0$ எனவே வரை சமச்சீருடையது. இயல்நிலை வரையின் தட்டை அளவை $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 3$.

6. இயல்நிலைப் பரவலின் கால்மான விலக்கம் $\frac{2}{3}\sigma$ (ஏறக்குறைய) சராசரி விலக்கம் $\frac{4}{5}\sigma$; திட்டவிலக்கம் σ.

அவை 10 : 12 : 15 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன.

7. இயல்நிலை வரையின் நிகழ்திறப்பிழை $= \frac{2}{3}\sigma$.

8. இயல்நிலைப் பரவலில் $m - \sigma$, $m + \sigma$ எனும் இடைவெளியில் ஏறக்குறைய 68% ராசிகளும், $m - 2\sigma$, $m + 2\sigma$ -ல் 95% ராசிகளும், $m - 3\sigma$, $m + 3\sigma$ எனும் இடைவெளியில் 99% ராசிகளும் உள்ளன. எனவே ஒரு இயல்நிலைப் பரவலில் $m - 3\sigma$, $m + 3\sigma$ எனும் இடைவெளியில் ஏறக்குறைய பரவலின் எல்லா ராசிகளுமே அடங்கியுள்ளன.

9. இயல்நிலை வரையின் சமன்பாட்டை

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$ எனக் கொண்டால்,

$x = m \pm \sigma$ எனும் இரு புள்ளிகளிலும் இவ்வரையின் திருகுப் புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன.

10. x_1, x_2 எனும் இருசார்பற்ற இயல்நிலை மாறிகள், m_1, m_2 எனும் சராசரிகளையும், σ_1, σ_2 எனும் திட்டவிலக்கங்களையும் முறையே கொண்டிருந்தால் $z = a_1 x_1 + a_2 x_2$ (a_1, a_2 மாறிலிகள்) என்பதும் $a_1 m_1 + a_2 m_2$ என்பதனைக் கூட்டுச் சராசரியாகவும், $a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2$ என்பதனை பரவற்படியாகவும் கொண்டு இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்துள்ளன.

எ.கா. 5000 மாறிகள் இயல்நிலைப்பரவலில் அமைந்துள்ளன. $\bar{x} = 50$ நிகழ்திறப்பிழை 13·49 பட்டியலைப் பயன்படுத்தாமல் கால்மானம், இடைநிலை, முகடு, திட்டவிலக்கம், சராசரி விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக. 1250-ஐக் குவிவு அலைவெண்ணைக் கொண்ட மாறியின் மதிப்பு யாது ?

தீர்வு

$$N = 5000; \quad \bar{x} = 50$$

$$\frac{2}{3}\sigma = 13.49$$

$$\sigma = \frac{3}{2} \times 13{\cdot}49$$

$= 20{\cdot}235$

திட்ட விலக்கம் $= 20{\cdot}24.$

சராசரி விலக்கம் $= \frac{4}{5} \times 20{\cdot}24$

$= 16{\cdot}192$

$t = {\cdot}6745$

$$Q_1 = \frac{x - m}{t\sigma} = {\cdot}6745$$

$$x - m = {\cdot}6745\,\sigma$$

$$x = m + {\cdot}6745\,\sigma$$

$$Q_3 = m + {\cdot}6745\,\sigma.$$

$$Q_1 = m - {\cdot}6745\,\sigma$$

எனவே கால்மான விலக்கம் $= \frac{2}{3}\sigma. = \frac{2}{3} \times 20{\cdot}235 = 13{\cdot}49$

$$Q_3 = 50 + {\cdot}6745 \times 20{\cdot}235$$

$$= 50 + 13{\cdot}651880$$

$$= 63{\cdot}65$$

$$Q_1 = 50 - {\cdot}6745 \times 20{\cdot}235$$

$$= 50 - 13{\cdot}551880$$

$$= 36{\cdot}35.$$

$m =$ கூட்டுச்சராசரி $= 50.$

$\therefore$ இடைநிலை $= 50.$

$N = 5000$; $-\infty$ யிலிருந்து $-t$ வரை உள்ள நிகழ்வெண்

1250 ஆனால் $\int_{-\infty}^{-t} \phi(t)\, t = \frac{1250}{5000} = \frac{1}{4} = {\cdot}25$

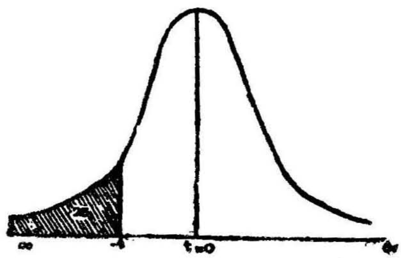
$$\text{எனவே} \int_{-t}^{0} \phi(t)\,dt = \cdot 5 - \cdot 25$$

$$= \cdot 25.$$

$$t = -\cdot 6745$$

$$-\cdot 6745 = \frac{x - m}{\sigma}$$

$$= \frac{x - 50}{20 \cdot 24}$$



படம் 13.3

$$-(\cdot 6745 \times 20 \cdot 24) = x - 50$$

$$\therefore \quad x = -(\cdot 6745 \times 20 \cdot 24) + 50.$$

$$= 36 \cdot 35.$$

எ.கா. போர் வீரர்களது உயரங்களின் கூட்டுச்சராசரி 68.22, பரவற்படி 10.8 (அங்)². 1000 போர் வீரர் அடங்கியுள்ள ஒரு குழுவில் 6 அடி உயரத்திற்குமேல் எத்தனை பேருடைய உயரத்தை எதிர் பார்ப்பாய்?

$t = 0$ விலிருந்து $t = \cdot 35$ வரை இயல்நிலை நிகழ்தகவு வரையால் அடைக்கப்படும் பரப்பு ·1368 எனவும், $t = 0$ விலிருந்து $t = 1 \cdot 15$ வரை பரப்பு ·3746 எனவும் தரப்பட்டுள்ளது. (I.A,S. 1954)

தீர்வு

$$t = \frac{x - m}{\sigma} = \frac{72 - 68 \cdot 22}{\sqrt{10.8}} = \frac{37.8}{3.2\,6} = 1 \cdot 15$$

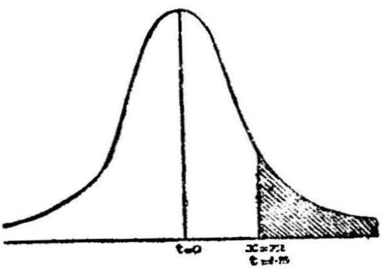
$x=6$ அடி $=72''$ற்குமேல் உயரம் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \int_{1.15}^{\infty} \phi(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} \phi(t)\,dt - \int_{0}^{1.15} \phi(t)\,dt$$

$$= \cdot 5 - \cdot 3746$$

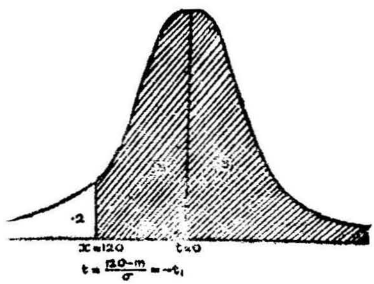
$$= \cdot 2254$$

எனவே 6 அடிக்குமேல் உயரம் உள்ளோரின் எண்ணிக்கை
$= \cdot 2254 \times 1000 = 225\ 4 = 225$ பேர்.



$x = 68.22$

படம் 13.4



படம் 13.5

எ.கா. ஒரு இயல்நிலைப் பரவலில் மாறுபாட்டுக்கெழு 2%. முழுமைத் தொகுதியில் 80% மதிப்புகள் 120 செ.மீ க்கு மேலே உள்ளன. கூட்டுச்சராசரியையும், திட்ட விலக்கத்தையும் காண்க.

தீர்வு

பரவலின் கூட்டுச்சராசரி m எனவும், திட்ட விலக்கம் σ எனவும் கொள்வோம். (படம் 13.5)

$$\therefore \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = 2$$

$$\sigma = \frac{2m}{100} = \cdot 02\, m$$

$$\int_{-t_1}^{\infty} \phi(t)\,dt = .8$$

$$\int_{-t_1}^{0} \varphi(t)\, dt = .3 = \int_{0}^{t_1} \varphi(t)\, dt \quad \therefore \quad t_1 = ?$$

பரப்புப் பட்டியலிலிருந்து,

$$\int_{0}^{t} \varphi(t)\, dt = .2881 \quad \text{ஆக இருந்தால்} \quad t = .8$$

$$\int_{0}^{t} \phi(t)\, dt = .3159 \quad \text{ஆக இருந்தால்} \quad t = .9$$

$.3159 - .2881 = .0278$க்கு t யில் கூடுதல் $= .1$

$\therefore \quad .3000 - .2881 = .0019$க்கு t யில் கூடுதல் $= .428$

$$\therefore \quad t_1 = .8 + .0428 = .8428$$

$$\frac{x-m}{\sigma} = -.8428$$

$$m - .8428\,\sigma = 120$$

$$50\,\sigma - .8428\,\sigma = 120$$

$$\therefore \quad \sigma = \frac{120}{49.1572} = 2.44 \text{ செ.மீ.}$$

$$\therefore \quad m = 2.44 \times 50 = 122.05 \text{ செ.மீ.}$$

எ.கா. ஒரு அறிவு கூர்மைச் சோதனையில், 1000 மாணவரது கூட்டுச் சராசரி 42, திட்ட விலக்கம் 24. (1) 50 க்குமேல் மதிப்பெண்கள்பெற்ற மாணவரது எண்ணிக்கை (2) 30 லிருந்து 54க்குள் மதிப் பெண் பெறுவோரது எண்ணிக்கை (3) முதல் 100 மாணவர்கள் எந்த மதிப்பெண்ணைக் காட்டிலும் அதிகமாகப் பெற்றார்கள் என்பவற்றைக் காண்க.

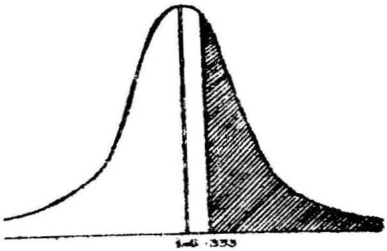
தீர்வு

$$(1) \quad t = \frac{x-m}{\sigma} = \frac{50-42}{24} = .333$$

தேவையான நிகழ்தகவு $= P(t > .333)$

$$= \int_0^{\infty} \phi(t)\,dt - \int_0^{.333} \phi(t)\,dt$$

$$= .5 - .1304 = .3696$$



படம் 13.6

எனவே 50க்கு மேல் மதிப்பெண் பெறுவோரது எண்ணிக்கை

$$= .3696 \times 1000 = 369.6 = 370$$

2. $x = 54$ ஆனால் $t = \dfrac{54-42}{24} = \dfrac{12}{24} = .5$

$x = 30$ ஆனால் $t = \dfrac{30-42}{24} = -\dfrac{12}{24} = -.5$

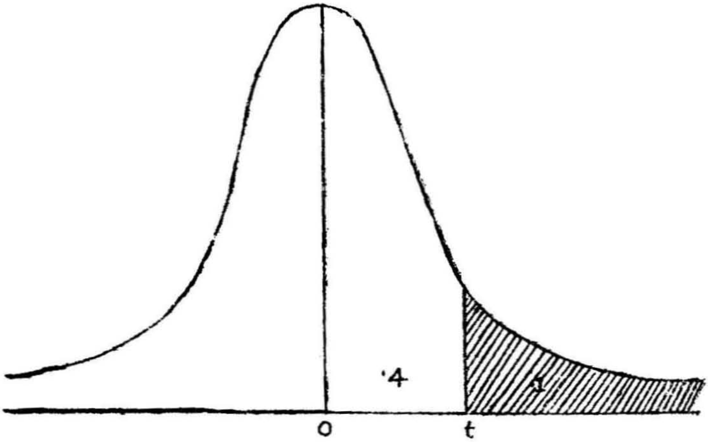
$$\int_{-.5}^{.5} \phi(t)\,dt = 2\int_0^{.5} \phi(t)\,dt = 2 \times .1915 = .3830$$

எனவே 30 லிருந்து 54 க்குள் மதிப்பெண் பெறுவோரது எண்ணிக்கை $= .3830 \times 1000 = 383$

3. முதல் 100 மாணவர்கள் மதிப்பெண் x ஐ விட அதிகம் பெறுகிறார்கள் என்க,

$\therefore\ t = \dfrac{x-42}{24}$ எனின் நிகழ்தகவு $= \dfrac{100}{1000} = 0.1$

$$\therefore \int_0^{t} \phi(t)\,dt = .4$$



படம் 13 7

பரப்புப்பட்டியலிலிருந்து t யின் மதிப்பு 1.281 எனக் கணக் கிடலாம்.

$$1.281 = \frac{x - 42}{24}$$

$$x - 42 = 24 \times 1{\cdot}281$$

$$x = 24 \times 1{,}281 + 42$$

$$= 72{\cdot}7$$

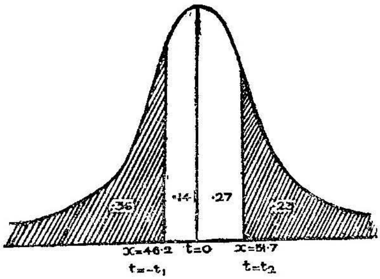
எ.கா. ஒரு இயல்நிலைப் பரவலில் 36% மதிப்புகள் 46 2-க்குக் குறைவாகவும், 23% மதிப்புகள் 51·7 க்கு அதிகமாகவும் உள்ளன. பரவலின் கூட்டுச்சராசரியையும், திட்ட விலக்கத்தையும் காண்க·

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\kappa}} \int_0^{\cdot 36} e^{-\frac{1}{2} t^2} dt = \cdot 14 \right.$$

$$\left. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\cdot 74} e^{-\frac{1}{2} t^2} dt = \cdot 27 \right)$$

(செ.ப. 1971)

பரவலின் கூட்டுச்சராசரியை m எனவும், திட்டவிலக்கம் σ எனவும் கொள்வோம்.



படம் 13·3

$x = m$-ல் காணும் நிலைக்கோட்டிற்கு இடது பக்கத்தில் $x = 46{\cdot}2$ உள்ளதால், அதற்குரிய t-யின் மதிப்பு குறை குறி உடையதாகும்.

$$t = \frac{46{\cdot}2 - m}{\sigma} = -t_1$$

$$\int_{-\infty}^{-t_1} \phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} \phi(t)\,dt - \int_{-t_1}^{0} \phi(t)\,dt$$

$$\cdot 36 = \cdot 5 - \int_{-t_1}^{0} \phi(t)\,dt$$

$$\int_{-t_1}^{0} \phi(t)\,dt = \int_{0}^{t_1} \phi(t)\,dt = \cdot 14$$ (வரைசமச்சீருடையது)

ஆனல் $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\cdot 36} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt = \cdot 14.$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.)

$$\therefore \quad t_1 = \cdot 36$$

$$\therefore \quad \frac{46{\cdot}2 - m}{\sigma} = -t_1 = -\cdot 36.$$

$\therefore \quad 46{\cdot}2 - m = -{\cdot}36\sigma$ I

$$t = \frac{51{\cdot}7 - m}{\sigma} = t_2$$

$$\int_0^{t_2} \phi(t)\,dt = \int_0^{\infty} \phi(t)\,dt - \int_{t}^{\infty} \phi(t)\,dt$$

$$= {\cdot}5 - {\cdot}23 = {\cdot}27$$

ஆனல் $\int_0^{\cdot 74} \phi(t)\,dt = {\cdot}27$ (கணக்கின்படி)

$$\therefore \quad t_2 = {\cdot}74$$

$$.74 = \frac{51.7 - m}{\sigma}$$

$\therefore \quad 51{\cdot}7 - m = {\cdot}74\sigma$

$51{\cdot}7 = m + {\cdot}74\sigma$ II

$-46{\cdot}2 = -m + {\cdot}36\sigma$ I

$I + II =, 5{\cdot}5 = 1{\cdot}1\sigma$

$\therefore \quad \sigma = 5.$

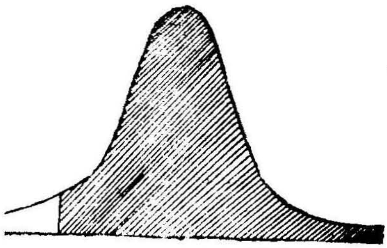
$m = 51{\cdot}7 - {\cdot}74 \times 5$

$= 51{\cdot}7 - 3{\cdot}7 = 48$

எனவே பரவலின் கூட்டுச்சராசரி $= 48$

திட்டவிலக்கம் $= 5$

எ.கா. 10,000 நபர்கள் அடங்கிய ஒரு குழுவின் வருமானங்கள் மாதம் 750 ரூ. கூட்டுச்சராசரியும், 50 ரூ திட்டவிலக்கமும் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலைத் தருகிறது. இக்குழுவில் சுமார் 95% நபர்கள் 668 ரூபாய்க்கு அதிகமாகவும், 5 நபர்கள் மட்டும் 832 ரூபாய்க்கு அதிகமாகவும் வருமானம் உடையவர்கள் எனக் காட்டுக. மிகப் பெரும் பணக்காரர்கள் 100 பேரின், மிகம் குறைந்த வருமானம் என்ன ?



படம் 13·9

தீர்வு

$m = 750,\ \sigma = 50$ என்க.

$$\begin{aligned}\text{(i)}\quad P(x > 668) &= 0{\cdot}5 + P(668 < x < 750)\\ &= 0{\cdot}5 + P(-1{\cdot}64 < t < 0)\\ &= 0{\cdot}5 + P(0 < t < 1{\cdot}64)\\ &= 0{\cdot}5 + 0{\cdot}4495\\ &= 0{\cdot}9495\end{aligned}$$

$\therefore$ 668 ரூபாய்க்கு மேல் வருமானம் பெறுவோரின் சதவீதம்
$= 94{\cdot}95\%$
$= 95\%$

$$\begin{aligned}\text{(ii)}\quad P(x > 832) &= 0{\cdot}5 - P\{750 < x < 832\}\\ &= 0{\cdot}5 - P(0 < 2 < 1{\cdot}64)\\ &= 0{\cdot}5 - 0{\cdot}4495\\ &= 0{\cdot}0505\end{aligned}$$

$\therefore$ ரூ· 832-க்கு மேல் வருமானம் பெறுவோரின் சதவீதம்
$= 5\%$

(iii) $P\{x > x_1\} = 0{\cdot}01$

மிகுந்த பணக்காரர்கள் 100 பேரின் மிகக் குறைந்த வருமானம் x ஆகும்.

$$P(750 < x < x_1) = 0\ 49$$

$$P\left(0 < t < \frac{x_1 - 750}{50}\right) = 0{\cdot}49$$

$$\frac{x_1 - 750}{50} = 2{\cdot}3267$$

$$x_1 = 866{\cdot}34 \text{ ரூ.}$$

$x = 0$ என்னும் மூலத்தையொட்டிய இயல்நிலைப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு.

$$M(\theta) = E[e^{\theta x}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$t = \frac{x-m}{\sigma}$$

$$x - m = t \cdot \sigma$$

$$x = \sigma t + m$$

$$dx = \sigma\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta(m+\sigma t)} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma\, dt$$

$$= e^{\theta m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot e^{\theta\sigma t}\, dt.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{m\theta + \frac{\theta^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t-\theta\sigma)^2}\, dt.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{m\theta + \frac{\theta^2\sigma^2}{2}} \cdot \sqrt{2\pi}$$

$$= e^{m\theta + \frac{\theta^2\sigma^2}{2}}$$

$$\therefore\quad E[e^{\theta x}] = e^{m\theta + \frac{\theta^2\sigma^2}{2}}$$

கூட்டுச்சராசரி m-ஐ ஒட்டிய விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு.

$$M(\theta) = E[e^{\theta(x-m)}]$$

$$= E[e^{\theta x} \cdot e^{-m\theta}]$$

$$= e^{-m\theta} E\left(e^{\theta x}\right) = e^{m\theta} \cdot e^{m\theta + \frac{\theta^2 \sigma^2}{2}}$$

$$M(\theta) = e^{\frac{\theta^2 \sigma^2}{2}}$$

$$= 1 + \frac{\frac{\theta^2 \sigma^2}{2}}{1!} + \frac{\left(\frac{\theta^2 \sigma^2}{2}\right)^2}{1!} + \cdots\cdots \frac{\left(\frac{\theta^2 \sigma^2}{2}\right)^n}{n!} + \cdots\cdots$$

மேற்கூறிய விரிப்பில்வரும் உறுப்புகள் இரட்டைப்படிகளிலேயே உள்ளதால்,

$$\mu_r = \left[\frac{d^r M}{d\,\theta^r}\right]_{\theta = 0}.$$

$$\therefore \quad \mu_{2n+1} = 0 = \mu_{2n-1}$$

மேலும் $\mu_{2n} = \left[\dfrac{d^{2n} M}{d\,\theta^{2n}}\right]_{\theta=0}$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)(2n)!}{n!} = 1.3.5, \ldots\ldots (2n - 1)\, \sigma^{2n}.$$

கீழ்க்காணும் விலக்கப்பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்புகளிலிருந்து, அவற்றிற்குரிய நிகழ்தகவுச் சார்புகளைக் காண்க.

1. $M_x(\theta) = e^{2\theta + 2\theta^2}$

2. $M_x(t) = e^{32 t^2}$

m, σ இவற்றைப் பண்பளவைகளாக உடைய இயல் நிலைப் பரவலில் விலக்கப்பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு,

$$M_x(\theta) = e^{m\theta + \frac{\theta^2 \sigma^2}{2}}$$

M.G.F.-ன் மாற்றற்றத்தன்மை தேற்றத்தின் படி,

$$m\theta + \frac{\theta^2 \sigma^2}{2} = 2\theta + 2\theta^2$$

$$n = 2$$

$$\frac{\sigma^2}{2} = 2$$

$$\sigma^2 = 4$$

$$\sigma = 2$$

எனவே மாறிலி ஒரு (2, 2) மாறி ஆகும்.

2. $$e^{32 t^2} = e^{mt + \frac{t^2 \sigma^2}{2}}$$

$$\frac{\sigma^2}{2} = 32$$

$$\sigma^2 = 64$$

$$\sigma = 8$$

$\therefore$ எனவே மாறி $N(0, 8)$ மாறி ஆகும்.

இயல் நிலைப்பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை (வி.பெ.தொ.உ. சார்பைப் பயன்படுத்தி) :

$$M_{x-m}(\theta) = e^{\frac{\sigma^2 \theta^2}{2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right)^2 + \ldots\ldots\ldots$$

வலப்பக்கத்திலிருந்து, எல்லா ஒற்றைப்படை விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளும் பூஜ்யமாகும் எனத் தெரிகிறது.

$$\mu_{2n} = \left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)^n \frac{1}{n!}(2n)!$$

$$= \frac{(2n)!}{2^n\, n!}\sigma^{2n}$$

$$= 1.3.5\ldots\ldots(2n-1)\,\sigma^{2n}.$$

n-ன் பெரியமதிப்புகளுக்கு இயல்நிலை வரையை, ஈருறுப்புப்பரவலின் நெருக்கமாகக் கருதுதல் : (மற்றொரு முறை).

ஈருறுப்புப் பரவலின் வி.பெ.தொ.உ. சார்பு இயல் நிலைப் பரவலின் வி.பெ.தொ.உ. சார்பை அணுகுவதை நிறுவி, வி.பெ.தொ.உ. சார்பின் மாற்றற்ற தேற்றத்தின் மூலம், இயல் நிலைவரைய ஈருறுப்புப் பரவலின் நெருக்கமாகப் பெறுகிறோம்.

$$t = \frac{x - m}{\sigma} = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$$

$$M_t(\theta) = M_{x-m}\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)$$

$$= e^{-\frac{m\theta}{\sigma}} M_x\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)$$

$$= e^{-\frac{m\theta}{\sigma}}\left(q + pe^{\frac{\theta}{\sigma}}\right)^n$$

$$\therefore \quad \log M_t(\theta) = -\frac{m\theta}{\sigma} + n\log\left(q + pe^{\frac{\theta}{\sigma}}\right)$$

$$= -\frac{m\theta}{\sigma} + n\log\left\{q + p\left(1 + \frac{\theta}{\sigma} + \frac{1}{2!}\frac{\theta^2}{\sigma^2} + \cdots\cdots\right)\right\}$$

$$= -\frac{m\theta}{\sigma} + n\log\left[1 + p\left(\frac{\theta}{\sigma} + \frac{1}{2!}\frac{\theta^2}{\sigma^2} + \cdots\cdots\right)\right]$$

$$= -\frac{m\theta}{\sigma} + n\left[p\left(\frac{\theta}{\sigma} + \frac{1}{2!}\frac{\theta^2}{\sigma^2} + \cdots\cdots\right)\right] - \frac{p^2}{2}\left(\frac{\theta}{\sigma} + \frac{1}{2!}\frac{\theta^2}{\sigma^2} + \cdots\cdots\right)^2 + \cdots\cdots\Big]$$

$$= -\frac{m\theta}{\sigma} + \frac{np\theta}{\sigma} + n\left(\frac{p}{\sigma^2} - \frac{p^2}{\sigma^2}\right)\frac{\theta^2}{2!} + \cdots$$

$$np = m, \quad \sigma^2 = npq$$

$$\therefore \quad \log M_t(\theta) = \frac{\theta^2}{2!} + 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

n முடிவிலியை அணுகும் போது, θ-ன் உயர்படிகளின் குணகங்கள் பூஜ்யத்தை அணுகுகின்றன.

$$\therefore \quad \log M(\theta) \rightarrow \frac{\theta^2}{2}$$

$$\therefore \quad M(\theta) \rightarrow e^{\frac{\theta^2}{2}}$$

$e^{\frac{\theta^2}{2}}$ இயல் நிலைப்பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பைக் குறிக்கிறது. எனவே ஈருறுப்பு மாறி, n-ன் பெரிய மதிப்புகளுக்கு $N(0, 1)$ மாறியாகிறது.

எ.கா. ஒரு தொழிற்சாலையில் பெருமளவில் ஒரு பொருளின் உற்பத்தி நடக்கிறது 100 பொருட்கள் அடங்கியுள்ள ஒவ்வொரு தொகுதியிலிருந்தும், 10 பொருட்கள் சராசரியாகத் தள்ளப் படுவதாக அநுபவ மூலமாகத் தெரிகிறது. ஒதுக்கித்தள்ளப்பட்ட எண்ணிக்கையின் திட்டவிலக்கத்தைக் காண்க.

ஒவ்வொன்றிலும் 100 பொருட்கள் அடங்கிய பெருவு தொகுதி களிலிருந்தும், ஒதுக்கித் தள்ளப்படுகின்ற பொருட்களின் எண்ணிக்கையின் பரவலைக் குறிக்கும் இயல்நிலை வரையின் சமன் பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

$$N = 100\ ; \ \bar{x} = \text{கூட்டுச்சராசரி} = 10\ ; \quad p = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

$$q = 1 - p = \frac{9}{10}$$

$$\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{100 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10}} = 3.$$

எனவே இயல்நிலைப் பரவலின் சமன்பாடு

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{100}{3\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\times 9}(x-10)^2}$$

மைய எல்லைத் தேற்றம் (Central limit Theorem)

$X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ என்பவை, $F(x)$ என்ற பரவல் சார்பையும், $E(X) = m$, $V(X) = \sigma^2$ எனவும் கொண்ட n சார்பற்ற சமவாய்ப்பு மாறி.

மைய எல்லைத் தேற்றத்தின்படி,

$$\text{எல்லை} \; \underset{n \to \infty}{P} \left[\frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq x \right] = \phi(x), \text{ இங்கு } \bar{x} = \frac{1}{n} \Sigma x_i,$$

$\phi(x)$ இயல்நிலை மாறியின் பரவல் சார்பைத் தருகிறது.

இத்தேற்றம், புள்ளியியலில் இயல்நிலைப் பரவலின் பெரும் பங்கை விளக்குகிறது.

நிறுவுதல்

x-ன் வி.பெ.தொ.உ. சார்பை வரையறுக்க இயலும் எனக் கொண்டு,

$Z = \dfrac{x - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ன் வி.பெ.தொ.உ. சார்பு, $N(0, 1)$-க்குரிய வி.பெ.தொ.உ. சார்பை முடிவிலியில் அணுகுவதாக நிறுவுகிறோம்..

$$M_Z(\theta) = e^{-\frac{a\sqrt{n}\,\theta}{\sigma}} \, M_{\bar{x}} \left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \theta \right)$$

$$[\, Y = aX + b \text{ எனின் } M_y(\theta) = e^{b\theta} M_x(a\theta)]$$

$$= e^{\frac{a\sqrt{n}\theta}{\sigma}} \left[M_x \left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \theta \cdot \frac{1}{n} \right) \right]^n$$

$$\therefore \; \log M_Z(\theta) = -\frac{a\sqrt{n}}{\sigma} \theta + n \log \left[1 + \mu_1' \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} + \mu_2' \frac{\theta^2}{2\sigma^2 n} + \ldots \right]$$

$$= -\frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\theta + n\left[\left(\mu_1'\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}} + \mu_2'\frac{\theta^2}{2\sigma^2 n} + \cdots\cdots\right)\right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\left(\mu_1'\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}} + \mu_2'\frac{\theta^2}{2\sigma^2 n} + \cdots\cdots\right) + \cdots \right]$$

இதன் விரிப்பில் t-ன் குணகம் $= 0\ (\mu_1' = a)$

t^2-ன் குணகம் $\frac{\mu_2'}{2\sigma^2} - \frac{\mu_1'}{2\sigma^2} = \frac{\mu_2}{2\sigma^2} = \frac{1}{2};\ \mu_2 = \sigma^2$

$\therefore \quad \log M_Z(\theta) = \frac{\theta^2}{2} + 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$M_z(\theta) \to e^{\frac{\theta^2}{2}}$ இது $N(0, 1)$ மாறியின் வி.பெ.உ. சார்பு எனவே வி.பெ.தொ.உ. சார்பின் மாற்றற்றத் தேற்றத்தின்படி, Z, $N(0, 1)$ மாறியாக, முடிவிலியில் அமைகிறது.

இயல்நிலைப் பரவலின் குமுலண்டு உருவாக்கும் சார்பு :

$$K_x(\theta) = \log_e M_x(\theta) = \log_e\left(e^{m\theta + \frac{\theta^2\sigma^2}{2}}\right)$$

$$= m\theta + \frac{\theta^2\sigma^2}{2}$$

$\therefore$ கூட்டுச்சராசரி $= k_1 = k_x(\theta)$-வில் θ-ன் குணகம் $= m$

பரவற்படி $= k_2 = k_x(\theta)$-வில் $\frac{\theta^2}{2!}$ ன் குணகம் $= \sigma^2$

$k_r = k_x(\theta)$-வில் $\frac{\theta^r}{r!}$ ன் குணகம் $= 0,\ r = 3,\ 4.$

$\mu_3 = k_3 = 0\ \mu_4 = k_4 + 3k_2^2 = 3\sigma^4$

$$\therefore \quad \beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = 0;\ \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 3.$$

தேற்றம்

x_i $(i = 1, 2, \ldots \ldots n)$ என்பவை n சார்பற்ற இயல்நிலை மாறிகள். அவற்றின் கூட்டுச்சராசரிகள் முறையே $m_1, m_2 \ldots m_n$, பரவற்படிகள் முறையே $\sigma_1^2, \sigma_2^2 \ldots \ldots \sigma_n^2$, ஆனால் $\Sigma c_i x_i$ என்பது $\Sigma c_i m_i$-ஐ கூட்டுச்சராசரியாகவும், $\Sigma c_i^2 \sigma_i^2$-ஐ பரவற்படியாகவும் கொண்ட ஒரு இயல்நிலை மாறியென நிறுவுக. [c_i, $i = 1, 2, \ldots \ldots n$ மாறிலிகள்]

$x [N (m, \sigma)]$ எனும் இயல்நிலை மாறியானால் cx என்பது cm-ஐ கூட்டுச் சராசரியாகவும், $c^2 \sigma^2$-ஐப் பரவற்படியாகவும் கொண்ட ஒரு இயல்நிலை மாறியாகும்.

எனவே, cx-ன் விலக்கப்பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும்

$$\text{சார்பு} = e^{\left[cm\,\theta + \frac{1}{2} c^2 \sigma^2 \theta^2\right]}$$

$x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ சார்பற்ற மாறிகள்.

எனவே, $c_1 x_1, c_2 x_2 \ldots c_n x_n$-ம் சார்பற்ற மாறிகள்.

∴ சார்பற்ற மாறிகளின் கூட்டுத்தொகையின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை சார்பு மாறிகளின் விலக்கப்பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்புகளின் பெருக்குத்தொகை.

$$E\left[e^{\theta \Sigma c_i x_i}\right] = E\left[e^{\theta c_1 x_1}\right] \times E\left[e^{\theta c_2 x_2}\right] \ldots \ldots E\left[e^{\theta c_n x_n}\right]$$

$$= \left[e^{c_1 m_1 \theta + \frac{1}{2} c_1^2 \sigma_1^2 \theta^2}\right] \ldots \ldots \left[e^{c_n m\theta + \frac{1}{2} c_n^2 \sigma_n^2 \theta^2}\right]$$

$$= e^{\theta [c_1 m_1 + c_2 m_2 + \ldots \ldots + c_n m_n] + \frac{1}{2} [c_1^2 \sigma_1^2 + c_2^2 \sigma_2^2 + \ldots \ldots c_n^2 \sigma_n^2]}$$

ஆனால் இது $c_1 m_1 + c_2 m_2 + \ldots \ldots c_n m_n$-ஐக் கூட்டுச் சராசரியாகவும் $c_1^2 \sigma_1^2 + c_2^2 \sigma_2^2 + \ldots \ldots c_n^2 \sigma_n^2$ ஐ பரவற்படியாகவும் கொண்ட ஒரு இயல்நிலை மாறியின் விலக்கப்பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு.

எனவே x_i $(i = 1, 2 \ldots\ldots n)$ என்பவை n சார்பற்ற இயல்நிலை மாறிகளானால் $\Sigma\, c_i\, x_i$ என்பதும் இயல்நிலைப் பரவலைப் பின்பற்று கிறது.

$$\Sigma\, c_i\, x_i = N\,[\, \Sigma\, c_i\, x,\ \sqrt{\Sigma\, c_i^2\ \sigma_i},]$$

கிளைத்தேற்றம்

1. $m_i = m,\ \sigma_i = \sigma,\ c_i = \frac{1}{n}\ (i = 1, 2 \ldots\ldots n)$

$$\text{ஆனல்} \sum_{i=i}^{n} c_i\, x_i = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_n}{n} = \bar{x}$$

$$\sum C_i^2\, \sigma_i^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots\ldots \sigma_n^2}{n^2}$$

$$= \frac{n\,\sigma^2}{n^2} \cdot = \frac{\sigma^2}{n}$$

எனவே, x_1, x_2 …… x_n எனும் n சார்பற்ற மாறிகள், கூட்டுச் சராசரி n, பரவற்படி ^{2} எனக் கொண்டிருந்தால், அவற்றின் கூட்டுச்சராசரி $\bar{x}$-ம் m-ஐ கூட்டுச்சராசரியாகவும், $\frac{\sigma^2}{n}$ என்பதைப் பரவற்படியாகவும் உடைய ஒரு இயல்நிலை மாறி.

$\dfrac{\bar{x} - m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ என்பது ஒரு திட்ட இயல்நிலை மாறி.

2. $C_1 = C_2 = \ldots\ldots C_n = 1$ ஆனல் $x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_n$ என்பது ஒரு இயல்நிலை மாறி. இதன் மூலம் இயல்நிலை மாறிகளின் கூட்டல் பண்பு புலனுகிறது.

3. $C_1 = 1, \quad C_2 = -1, \quad C_3 = C_4 \ldots\ldots = 0$ எனக் கொள்வோம்.

x_1, x_2 எனும் இருசார்பற்ற இரு இயல்நிலை மாறிகளின் கூட்டுச் சராசரி m_1, m_2, பரவற்படி $= \sigma_1^2, \sigma_2^2$.

$(x_1 - x_2)$ என்பது $m_1 - m_2$-ஐப் கூட்டுச்சராசரியாகவும், $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$-ஐ பரவற்படியாகவும் உடைய ஒரு இயல்நிலை மாறி எனப் பெறுகிறோம்.

4. $C_1 = 1$, $C_2 = 1$ என்றால் $x_1 + x_2$ என்பது $[\ _1 + m_2,$ $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}]$ எனவே இரு இயல்நிலை மாறிகளின் கூட்டுத் தொகையும், ஒரு இயல்நிலை மாறியே.

எ.கா. கூட்டுச்சராசரி 4 செ.மீ., பரவற்படி 01 செ.மீ. கொண்டு, ஒரு கோலின் நீளம் இயல்நிலைப் பரவலைச் சார்ந்துள்ளது. இத்தகைய இரு கோல்கள் ஒன்றின் முனையோடு ஒன்று பொருந்த, ஒரு துளையில் (slot) வைக்கப்படுகின்றன. இரு கோல்களும் பொருந்தி அமைய நிகழ்தகவு என்ன? [துளையின் நீளம் ± 0·1 செ.மீ., ஏறத்தாழ வேறுபாடுடன் (tolerance) கூடிய 8 செ.மீ. ஆகும்).

தீர்வு

x_1, x_2 என்பவை முதல், இரண்டாவது கோல்களின் நீளங்களைக் குறிக்கட்டும். இயல் மாறிகளின் கூட்டல் பண்பின்படி, $x = x_1 + x_2$ என்பது இயல்நிலைப் பரவலை, கூட்டுச்சராசரி 8, பரவற்படி 0·02 உடன் சார்ந்துள்ளது,

எனவே $P\,(7{\cdot}9 \le x \le 8{\cdot}1)$

$$= P\left[\frac{7{\cdot}9 - 8}{0{\cdot}14} < \frac{x - 8}{0{\cdot}14} < \frac{8{\cdot}1 - 8}{0{\cdot}14}\right]$$

$$= 0{\cdot}526.$$

(இயல்நிலைப் பரவலின் பரப்புப் பட்டியலிலிருந்து)

பாய்ஸான் பரவலின் நெருக்கமாக இயல்நிலைப் பரவலைக் கருதுதல்

பாய்ஸான் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி m அதிகமாக இருக்கும் போது, இது இயல்நிலைப் பரவலை அணுகுகிறது.

பண்பளவை m கொண்ட பாய்ஸான் பரவலின் நிகழ்தகவுச் சார்பு $f(x) = \dfrac{e^{-m} \cdot m^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots\ldots \infty$. [$x!$ ற்கு ஸ்டர்லிங் தோராயமதிப்புடைய வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தினால்]

$$f(x) = \frac{e^{-m}\, m^x}{\sqrt{2\pi}\, e^{-x}\, x^{x+\frac{1}{2}}} = \frac{e^{x-m}}{\sqrt{2\pi\, m}}\left[\frac{m}{x}\right]^{x+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{e^{x-m}}{\sqrt{2\pi\, m}\left[\dfrac{x}{m}\right]^{x+\frac{1}{2}}}$$

தரப்படுத்தப்பட்ட பாய்ஸான் மாறி

$$u = \frac{X - m}{\sqrt{m}} \qquad \left(\because \quad u = \frac{X - \text{சராசரி}}{\text{திட்டவிலக்கம்}} \right)$$

$$u\sqrt{m} = X - m$$

$$\frac{u}{\sqrt{m}} = \frac{X}{m} - 1$$

$$\frac{X}{m} = \frac{u}{\sqrt{m}} + 1$$

எனவே u-ன் நிகழ்தகவு

$$g(u)\, du = \frac{e^{u\sqrt{m}}}{\sqrt{2\pi}\left[1 + \frac{u}{\sqrt{m}}\right]^{m u\sqrt{m} + \frac{1}{2}}}\, du$$

$$\therefore \quad \log g(u) = u\sqrt{m} - \log\sqrt{2\pi} - \left(m + u\sqrt{m} + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{u}{\sqrt{m}}\right)$$

$$= u\sqrt{m} - \log\sqrt{2\pi} - \left(m + u\sqrt{m} + \frac{1}{2}\right) \left[\frac{u}{\sqrt{m}} - \left(\frac{u}{\sqrt{m}}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(\frac{u}{\sqrt{m}}\right)^3 \frac{1}{3} \cdots\cdots\right]$$

$$= u\sqrt{m} - \log\sqrt{2\pi} - \left[u\sqrt{m} - \frac{u^2}{2} + u^2 + 0\left(m^{-\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$= -\log\sqrt{2\pi} - \frac{u^2}{2} + 0\left(m^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\log g(u) = \log\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\right] + 0\left(m^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$m \longrightarrow \infty$ எனும்போது

$$g(u) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

மேலும் $u = \frac{x-m}{\sqrt{m}}$, $X = 0, 1, 2, \ldots \infty$

$X = 0,\ u = -\sqrt{m} \to \infty,\ (\because\ m \to \infty)$

$X = \infty, u = \infty$

எனவே $m \to \infty$ எனும்போது, u-ன் பரவல் $(-\infty, \infty)$ எனும் இடை வெளியில் காணப்படும் ஒரு தொடர் மாறிப் பரவலாகிறது. அதன் நிகழ்தகவுச் சார்பு,

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}, -\infty < u < \infty$$

இது இயல் நிலைப்பரவலைக் குறிக்கிறது.

எ.கா. (அ) $\log_{10} X$ கூட்டுச்சராசரி 4, பரவற்படி 4 எனக் கொண்டு இயல் நிலைப் பரவலைத் தழுவுகிறது.

$P(1{\cdot}202 < X < 831\ 80000)$ காண்க.

(ஆ) $\log_{10} X$ இயல்நிலைப் பரவல கூட்டுச்சராசரி 7, பரவற்படி 3 கொண்டு, தழுவுகிறது. $\log_{10} Y$ கூட்டுச்சராசரி 3 பரவற்படி 1 கொண்டு, இயல்நிலைப் பரவலைத் தழுவுகிறது. X, Y-ன் பரவல்கள் சார்பற்றவையாயின், $P(1.202 < (X/Y) < 83180000)$ காண்க.

$$[\log_{10} 1{\cdot}202 = 3.08, \log_{10} 8318 = 3.92]$$

தீர்வு

(அ) $\log x$, x-ன் குறையாத சார்பாதலால்,

$$P(1{\cdot}202 < X < 83180000)$$
$$= P(\mathrm{lo}_{10}\ 1202 < \mathrm{glo}_{10}\ X < \mathrm{glog}_{10}\ 83180000)$$
$$= P(0.08 < \log_{10} X < 7{\cdot}92)$$

இங்கு $Y = \log_{10} X$, இது ஒரு $N(4, 4)$ மாறியாகுமா?

$$P = 0.08 \text{ எனின், } t = \frac{0{\cdot}08 - 4}{2} = -1.96$$

$$Y = 7.92 \quad ,, \quad t = \frac{7.92 - 4}{2} = 1.96$$

$\therefore$ தேவையான நிகழ்தகவு $= P[0.08 < Y < 7.92]$
$= P[-1{\cdot}96 < t < 196]$
$= 2P(0 < Z < 1{\cdot}96)$
$= 2 X 0{\cdot}4750 = 0.9500$

(ஆ) $P(1{\cdot}202 < (X/Y) < 83180000)$

$$= P\left[\log 1.202 < \log_{10}\left(\frac{X}{Y}\right) < \log_{10} 83180000\right]$$

$$= P[0.08 < u < 7.92]$$

$$u = \log_{10}\left(\frac{X}{Y}\right) = \log_{10} X - \log_{10} Y$$

$\log_{10} X$, $N(7,3)$ மாறி· $\log_{10} Y$ $N(3, 1)$ மாறி

$\therefore$ $u = \log_{10} X - \log_{10} Y$, $N(7-3, 3+1)$ மாறி

$\therefore$ தேவையான நிகழ்தகவு $P = P[0{\cdot}08 < u < 7{\cdot}92]$ 0.95 (அ) விலிருந்து.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்களுக்கு இயல்நிலை வரையைப் பொருத்துதல்

புள்ளியியலில் பெரும்பான்மையான மாறிகளின் பரவல்கள் இயல்நிலைப் பரவலைத் தழுவுகின்றன; அல்லது அவற்றின் பரவல்கள் ஏறக்குறைய இயல்நிலைப் பரவலைச் சார்ந்துள்ளன. எனவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரத்துக்கு மிகச்சிறந்த முறையில் பொருந்தக் கூடிய இயல்நிலை வரையைக் காண வேண்டும். இவ்வரையின் சமன்பாட்டில் N, , σ என்ற மூன்று மாறிலிகள் உள்ளன. இவற்றை நேரில் கண்ட விவரங்களிலிருந்து கணக்கிட்டு, வரையினைப் பெறுகின்றோம்.

மேலும் இவ்வரையைப்பயன்படுத்திப் பெறப்படும் கணக்கியல் நிகழ்வெண்களையும், நேரில் காணும் நிகழ்வெண்களையும் ஒப்பிட்டுப் பார்த்து, வரை எவ்வளவு சிறப்பாகப் பொருந்துகின்றது என்று ஆராய்கிறோம்.

$t = \frac{x-a}{\sigma}$ என்ற தொடர்பால், $y = f(x)$ என்ற வரையை $z = \phi(t)$ என்ற இயல்நிலை திட்டச் சமன்பாட்டுக்கு மாற்றிவிடுகிறோம். பட்டியலிலிருந்து t-ன் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கு $\phi(t)$-யைக் கணக்கிடுகிறோம்.

$y = \frac{N}{a}\phi(t)$ ஆதலால், நிலைத்தூரப்பட்டியலிலிருந்து கண்ட $\phi(t)$யின் மதிப்புகளுக்கு இணைந்த y-ன் மதிப்புகளைப்பெறுகிறோம் இவ்வாறு கணக்கியல் நிகழ்வெண்களைக் காணும் முறையை நிலைத்தூர பட்டியலைப் பயன்படுத்தும் முறை என்கிறோம்.

நிலைத்தூரப் பட்டியலைப் பயன்படுத்துதல்

எடுத்துக் காட்டுக் கணக்கு

கீழ்க்காணும் பரவலுக்கு ஒரு இயல்நிலை வரையைப் பொருத்துக. கணக்கியல் நிகழ்வெண்களைக் கண்டு, அவற்றை நேரில் கண்ட நிகழ்வெண்களுடன் ஒப்பிடுக.

x	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70
நிகழ்வெண்	4	8	11	15	12	6	4

மையமதிப்பு	நிகழ்வெண்	d_r	d_r^2	$f_r d_r$	$f_r d_r$
5	4	—3	9	—12	36
15	8	—2	4	—16	32
25	11	—1	1	—11	11
35	15	0	0	0	0
45	12	1	1	12	12
55	6	2	4	12	24
65	4	3	9	12	36
	60			—3	151

$m = 35 - \frac{3}{60} \times 10 = 34{\cdot}5.$

$$\sigma^2 = \left(\frac{151}{160} - \frac{9}{3600}\right) 10^2 = \frac{9051}{3600} \times 100$$

$$\sigma = 1{\cdot}585 \times 10 = 15{\cdot}85$$

மைய மதிப்பு	t	$\phi(t)$	$\frac{N}{\sigma}\phi(t)$	$\frac{N}{\sigma}\phi(t)\times c$	கணக்கியல் நிகழ்வெண் முழு எண் சுத்தமாக	நேரில் கண்ட நிகழ் வெண்
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
x						
5	—1.86	·0656	·2483	2·483	3	4
15	— 1·229	·1942	·7350	·7350	7	8
25	—·5992	·3332	1·261	12·61	13	11
35	·0315	·3989	1·510	15·1	15	15
45	·6624	·3123	1·182	11·8	12	12
55	1·229	·1714	·6489	6·489	7	6
65	1·923	·0656	·2484	2·484	3	4
				மொத்தம்	60	60

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரத்துக்கு m, σ கண்டுபிடித்த வுடன், இயல்நிலை வரையின் சமன்பாடு $y = \frac{60}{15{\cdot}85} e^{-\frac{(x-34{\cdot}5)^2}{2(15{\cdot}85)^2}}$

$t = \frac{x - m}{\sigma}$ என்பதன் மூலம், t-யின் மதிப்புகளை (2)-ல் எழுது கிறோம்.

$t = -1{\cdot}86$ ஆக இருக்கும்போது அதற்கான $\phi\ (t)$-யின் மதிப்பை, நிலைத் தூரப்பட்டியலிலிருந்து காண்கிறோம். அதற்குரிய சரியான மதிப்பை இடைச் செருகல் முறையில் கணக்கிடலாம்.

(4)ல் $\phi\ (t)$-யின் மதிப்பை $\frac{N}{\sigma}$ ஆல் பெருக்குகிறோம். $\frac{N}{\sigma} \cdot \phi\ (t)$ என்பது ஒவ்வொரு பிரிவின் மையப் புள்ளியின் நிலைத்தூரம். அப்பிரிவின் நிகழ்வெண்ணானது, குறிப்பிட்ட பிரிவு இடைவெளியில் வரையின் பரப்பாகும். ஆனால் இது தோராயமாக, அப்பிரிவின் மைய நிலைத்தூரத்தைப் பிரிவு இடைவெளியால் பெருக்கினால் கிடைக்கும்.

$\therefore\ \frac{N}{\sigma}\ \phi\ (t) \times$ பிரிவு இடைவெளி

(5)-ல் காணப்படுகிறது

(6)-ல் கணக்கியல் நிகழ்வெண்களை முழு எண்ணுக்குச் சுத்தமாக எழுதும்போது, அவற்றின் கூட்டுத்தொகை மொத்த நிகழ்வெண்ணாக இருக்குமாறு பார்த்தல் வேண்டும்.

(7)-ல் நேரில் கண்ட நிகழ்வெண்களை எழுதி, அவற்றைக் கணக்கியல் நிகழ்வெண்களுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கிறோம்.

பரப்புப்பட்டியல் $\int_0^t \phi\ (t)\ dt$-யைப் பயன்படுத்தி இயல்நிலை

வரையைப் பொருத்துதல்

கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரங்களுக்கு ஒரு இயல்நிலை வரையைப் பொருத்துக.

x	2	4	6	8	10
f	1	4	6	4	1

$$m = \frac{\Sigma f_r\ x_r}{N} = \frac{96}{16} = 6.$$

$$\sigma^2 = \frac{1{\cdot}16 + 4{\cdot}4 + 6{\cdot}0 + 4{\cdot}4 + 16}{16} = \frac{64}{16} = 4$$

$$\sigma = 2.$$

$$y = \frac{16}{2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-6)^2}{2\times 4}} = \frac{8}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-6)^2}{8}}$$ என்பது

இயல்நிலை வரையின் சமன்பாடு.

மாறியின் மேல் எல்லை மதிப்பு (1)	$t = \frac{x-m}{\sigma}$ (2)	பரப்பு (3)	பரப்பின் வேறுபாடு $\triangle A$ (4)	$N\cdot\triangle A$ (5)	முழு எண்ணுக்குச் சுத்தமாக்கப்பட்ட போது. (6)
$-\infty$	$-\infty$	·5000	·668	1·0688	1
3	—1·5	·4332	·2417	3·8672	4
5	—·5	·1915	(·3830)	6·1280	6
7	·5	·1915			
9	1·5	·4312	·2417	3·8672	4
∞	∞	·5000	·0668	1.0688	1
			மொத்தம்		16

(1)-ல் பிரிவுகளின் மேல் எல்லைகளை எடுத்துக் கொள்கிறோம். முதல் பிரிவின் கீழ் எல்லை $-\infty$ ஆகவும், கடைசி பிரிவின் மேல் எல்லை $+\infty$ ஆகவும் எடுத்துக் கொள்வதால், வரையின் பரப்பு முழுவதும் சேர்த்துக் கொள்ளப்படுகிறது. (2)-ல் x-ன் மதிப்புகளுக்கு இணைந்த t-யின் மதிப்புகளைக் காண்கிறோம். (3)-ல்

$\int_0^t \phi(t)\,dt$ என்பது பல்வேறு பரப்புகளைத் தருகிறது,

$$\int_{-\infty}^{0} \phi(t)\,dt - \int_{-1.5}^{0} \phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1\cdot5} \phi(t)\,dt$$ ஆதலால்,

நெட்டுப் பிரிவு (4)-ல், (3)-ல் உள்ள பரப்புகளின் வேறு பாடுகளைக் காண்கின்றோம்.

$$\int_{-\cdot5}^{\cdot5} \phi(t)\,dt = \int_{-1\cdot5}^{0} \phi(t)\,dt + \int_{0}^{\cdot5} \phi(t)\,dt$$ ஆதலால், இங்கு

மட்டும் இரு பரப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்கின்றோம். (5)-ல் $N(\triangle A)$ என்பது, $\phi(t)$ வரையின் மொத்தப் பரப்பை 1 எனக் கொண்டு நாம் கணக்கிட்ட நிகழ்வெண்களை N-ஆல் பெருக்கிடுவதால், ஒவ்வொரு பிரிவிலும் மொத்த நிகழ்வெண் 16 எவ்வாறு பரவியுள்ளது எனப் பெறுகிறோம். அதனை முழு எண்ணுக்குச் சுத்தமாக எழுதுகிறோம்.

1. கீழ்க்கண்ட பட்டியல் ஒரு மரத்திலிருந்து சமவாய்ப்பாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 30 இலைகளின் நீளங்களை கொடுக்கிறது.

இலையின் நீளம் மி.மீ.	20—24	25—29	30—34	35—39	40—44	45—49	50—54
நிகழ்வெண்	2	4	6	7	6	3	2

பரப்பளவு பட்டியலை பயன்படுத்தி இதற்குப் பொருத்தமான இயல்நிலை வளைக்கோட்டைப் பொருத்தி, கணக்கியல் நிகழ்வெண்களைக் காண்க.

x மையமதிப்பு	f	$d=\frac{x-A}{c}$	fd	fd^2
22	2	—3	—6	18
27	4	—2	—8	16
32	6	—1	—6	6
37	7	0	0	0
42	6	1	6	6
47	3	2	6	12
52	2	3	6	18
மொத்தம்			—2	76

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f} \times c$$

$$= 37 + \frac{-2 \times 5}{30}$$

$$= 37 - \cdot 333 = 36 \cdot 667.$$

$$\bar{x} = 36 \cdot 67$$

$$\sigma^2 = s^2 - c^2 = \frac{76}{30} - \left(\frac{-2}{30}\right)^2 = \frac{1140 - 2}{450} = \frac{1138}{450}$$

$\therefore \quad \sigma = 1 \cdot 591$ (பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில்)

$\therefore \quad \sigma = 1 \cdot 591 \times 5 = 7 \cdot 95$

கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பட்டியல், கணக்கியல் அலைவெண் களைக் கணக்கிடும் முறையை விளக்கும்.

x-மாறியின் எல்லை மதிப்பு	$t = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$	பரப்பு $\int_0^t \phi(t)\, dt$	பரப்பின் வேறுபாடு $(\triangle A)$	நிகழ்வெண் $N \cdot (\triangle A)$	நிகழ்வெண் (முழு எண் திருத்தமாக)	நேரில் கண்ட நிகழ்வெண்
$-\infty$	$-\infty$	·5000				
24	−1·59	·4441	·0669	1·6770	2	2
29	− ·96	·3315	·1126	3·3780	3	4
34	− ·34	·1334 }	·1981	5·743	6	6
39	·29	·1147 }	·2481	7·443	7	7
44	·92	·3212	·2165	6·495	6	6
49	1·55	·4394	·1182	3·546	4	3
$+\infty$	$+\infty$	·5000	·0606	1·818	2	2

எ. கா. பின்வரும் பரவலுக்கு இயல்நிலை வரையைப் பொருத்துக.

x	45—	50—	55—	60	65—	70—	75—	80—	மொத்தம்
y	3	21	150	335	326	135	26	4	1000

$M \pm \sigma$, $M \pm 2\sigma$, $M \pm 3\sigma$ என்ற இடைவெளிகளில் உள்ள நிகழ்வெண்களைக் கணக்கிட்டு, பரவலின் இயல்நிலைத் தன்மையை ஆராய்க.

x மையமதிப்பு	f	d	$f \cdot d$	fd^2
47 5	3	—3	— 9	27
52·5	21	—2	— 42	84
57·5	150	— 1	— 150	150
62 5	335	0	0	0
67·5	326	1	326	326
72·5	135	2	270	540
77·5	25	3	78	234
82·5	4	4	16	64
			489	1425

$$M = 62{\cdot}5 + \frac{489}{1000} \times 5$$

$$= 62{\cdot}5 + 2{\cdot}445 = 64{\cdot}945$$

$$\sigma^2 = \left[\frac{1425}{1000} - \left(\frac{489}{1000}\right)^2\right] \times 25$$

$$\sigma = 1{\cdot}089 \times 5 = 5{\cdot}445$$

இடைவெளி $M \pm \sigma$ $64{\cdot}945 \pm = 5{\cdot}445 =$ $(59{\cdot}5 - 70{\cdot}39)$

$M \pm 2$ $54{\cdot}06$ $— = 75{\cdot}84$

$M \pm 3$ $48{\cdot}61$ $— = 81{\cdot}28$

பிரிவெல்லைக்குக் குறைவாக	வளர் நிகழ் வெண்	இடைச்செருகலுக்குப் பிறகு	
		குறிப்பிட்ட மதிப்புக்குக் குறைவாக	வளர் நிகழ் வெண்
45	0		
50	3		
55	24		
60	174	48·61	2·2
65	509	54·06	20·1
70	835	59·50	159·0
75	970	70·39	845·5
80	996	75·84	974·3
85	1000	81·28	997·0

	நேரில் காணும் நிகழ்வெண் சதவீதம்	கணக்கியல் நிகழ் வெண்ணின் சதவீதம்
$M \pm \sigma$	68·65	68·26
$M \pm 2\sigma$	95·42	95·44
$M \pm 3\sigma$	99·48	99·74

நேரில் காணும் நிகழ்வெண் சதவீதத்திற்கும், கணக்கியல் நிகழ்வெண்ணின் சதவீதத்திற்கும் மிகக்குறைந்த வேறுபாடே உள்ளதால், இயல்நிலைவரை மேலே தரப்பட்டுள்ள பரவலுக்கு மிகச்சிறந்த பொருத்த முடைய வரையாகும்.

எ. கா. ஓர் அழகுப் போட்டியில் 40 பெண்கள் பின்வருமாறு தீர்மானிக்கப்பட்டார்கள்.

அழகு அரசிகள் 3. மிக அழகிகள் —7. அழகிகள் — 20 மிகச்சுமாரான அழகிகள்—13. சுமாரான அழகிகள்—7 இந்த நிகழ்வெண்கள் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்திருப்பதாகக் கொண்டு " அழகு"க்கு 50 60 மதிப்பெண்கள் பிரிவு இடைவெளி யாக இருந்தால், மற்றவைகளுக்கு மதிப்பெண்களின் பிரிவு இடை வெளிகளைக் காண்க.

வகை (1)	f (2)	$\frac{f}{N}$ (3)	கீழிருந்து பிரிவு இடை வெளியின் மேல் எல்லை வரை குவிவு அலைவெண் (4)	பிரிவு இடைவெளியின் மேல் எல்லைக்கு உகந்த t ன் மதிப்பு (5)	ஒவ்வொரு பிரிவு இடை வெளியின் எல்லைகள் (σ அலகுகளில்) (6)	பிரிவு இடைவெளி (σ அலகுகளில்) (7)	பிரிவு இடைவெளியின் மதிப்பெண்கள் (8)	ஒவ்வொரு பிரிவிற்கும் மதிப்பெண் இடைவெளி (9)
அழகரசிகள்	3	.06	1.00	+ ∞	(+1 56)−(+ ∞)	∞	—	68—100
மிக அழகிகள்	7	.14	94	+1·56	(+ ·84)—(+1·56)	.72	7	61— 67
அழகிகள்	20	.40	.80	+ ·[illegible]4	(2·5)—(+ ·84)	1.09	10	50— 60
மிகச்சுமாரான அழகிகள்	13	.26	.40	— ·25	(−1·08)—(— ·25)	.83	8	42— 49
சுமாரான அழகிகள்	7	.14	.14	—1·08	(— ∞)−(—1·08)	∞	—	0 — 41
	50	1.00						

விளக்கம் : (3) வது நெட்டுப்பிரிவு அந்தந்த பிரிவு இடை வெளியின் பரப்புக்களின் பின்னங்களைக் கொடுக்கிறது. (8) வது நெட்டுப்பிரிவு பின்வருமாறு கணக்கிடப் படுகிறது.

1·09 σ என்பது 'அழகு'க் கான 10 மதிப்பெண்களுக்கு உகந்ததெனில், .72 என்பது 7 மதிப்பெண்களுக்கும் .83 என்பது 8 மதிப்பெண்களுக்கும் உகந்தவை. (9) வது நெட்டுப்பிரிவில் "அழகி"களுக்கெதிரான மதிப்பெண் பிரிவு இடைவெளி கொடுக்கப் பட்டிருக்கிறது. (8) வது நெட்டுப்பிரிவின் உதவி கொண்டு மீதியுள்ளவற்றை நிரப்புக,

எ. கா. ஒரு கல்லூரியில் திறமைக்குத் தக்கவாறு, எந்தப் பாடத்திலும் $A+$, A, $A-$, $B+$, B, $B-$, $C+$, C, C , D என்ற 10 சிறப்புத் தகுதிகள் தரப்படுகின்றன. மாணவரின் திறமையின் பரவல் இயல்நிலைப் பரவல் எனக் கொண்டு, 1000 பேரில் எவ்வளவு பேர் ஒவ்வொரு வகைத் தகுதியையும் பெறு கின்றனர் எனக் காண்க.

தீர்வு

மாணவரின் திறமையின் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி m, திட்ட விலக்கம் σ என்க. $t = \frac{x-m}{\sigma}$

99% எல்லைகளைத் தேர்ந்தெடுத்தால், t, -3 யிலிருந்து $+3$ வரை மதிப்புகளை ஏற்கிறது. வேறுபாடு 6 அலகுகள் கொடுக்கப் பட்டுள்ள 10 தகுதிகள் ஒரே மதிப்புடைய இடைவெளியிலுள்ள வையாதலால், அவை t அச்சை 10 சம பாகங்களாகப் பிரிக்கின்றன. ஒவ்வொரு பாகத்தின் இடைவெளி $= \frac{6}{10} = 0·6$.

எனவே மதிப்புகள் -3.0, -2.4, -1.8, -1.2, $-0·6$ 0 0.6, 1·8, 2.4, 3.0 உடன் சிறப்புத் தகுதிகளுக்குப் பொருத்தலாம்.

முதல் இடைவெளி 3.0 - —2.4க்கான நிகழ்வெண்ணைக் கணக்கிட பரப்புப் பட்டியலைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$$p_1 = P(-3 \leq t \leq -2.4) = \phi(-2.4) - \phi(-3)$$
$$= .0082 - .0013$$
$$\therefore \quad p_1 = p_1 \times 1000 \quad 6\ 9$$
$$f_1 = 6.9 \simeq 7$$ மாணவர்கள் தகுதி $A+$ ஐப் பெறுகிறார்கள்.

$f_9 = 28$. A தகுதி பெறும் மாணவரைக் குறிக்கிறது. இவ்வாறே மற்ற நிகழ்வெண்களையும் கணக்கிடலாம்.

$f_1 = f_{10}$, $f_2 = f_9$ ...(இயல்நிலைப் பரவல் சமச்சீருடையதால்)

t யில் பிரிவு இடைவெளிகள்	மாணவரின் எண்ணிக்கை
— 3·0 — — 2.4	7
— 2.4 — — 1·8	28
1.8 — — 1.2	79
— 1,2 — 0.6	160
— 0·6 0	226
0 — 0.6	226
0.6 — 1.2	160
1.2 — 1.8	79
1.8 — 2.4	28
2.4 — 3.0	7
	1000

பயிற்சி

கணக்கு

1. பின்வரும் பட்டியல் ஒரு கல்லூரியில் புதிதாகச் சேர்ந்த மாணவர்களின் உயரங்களின் பரவலைத்தருகிறது.

உயரம் (அங்குலங்களில்)	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74
நிகழ்வெண்	2	10	11	38	57	93	106	126	109	87	75	23	9	4

$M \pm \sigma$, $M \pm 2\sigma$, $M \pm 3\sigma$ என்ற இடைவெளியில் காணப்படும் நிகழ்வெண்களைக் கணக்கியல் மதிப்புகளுடன் ஒப்பிட்டு, பரவலின் இயல்நிலைத் தன்மையை ஆராய்க.

[விடை : $M \pm \sigma$ (65·5, 70·2) இடைவெளியில் 69%
$M \pm 2\sigma$ (6·36, 72·8) இடைவெளியில் 95%
$M \pm 3\sigma$ (6·1, 74·8) இடைவெளியில் 100%]

2. (அ) ஒரு இயல்நிலைப் பரவலின் 3-வது பத்துமானம், மூன்றும் கால்மானம் முறையே 56, 63 ஆகும். பரவலின் சராசரியையும், பரவற்படியையும் காண்க.

(ஆ) பின்வரும் விவரங்களுக்குக் கால்மான விலக்கம், திட்ட விலக்கம் இவற்றைக் காண்க. இதனை இயல்நிலைப் பரவல் எனக் கொண்டு, பெறப்படும் கால்மான விலக்கத்தோடு, கணக்கிடப் பட்ட கால்மான விலக்கத்தை ஒப்பிடுக.

x மையமதிப்பு	0	1	2	3	4	5	6
நிகழ்வெண்	5	0	15	32	21	10	8

3. இருபகுதிகளை நீளவாட்டத்தில் இணைத்து, பொருட்கள் செய்யப்படுகின்றன. பகுதிகளின் கூட்டுச்சராசரி, திட்ட விலக்கங்கள் முறையே 3 செ.மீ., 0·4 செ மீ., 2 செ.மீ., 0·3 செ.மீ. எனின், உற்பத்தியான பொருட்களின் கூட்டுச்சராசரியையும், திட்ட விலக்கத்தையும் காண்க.

6 செ.மீ. க்கு மேல் நீளமுள்ள பொருட்களை ஒதுக்கிவிட்டால், ஒதுக்கித் தள்ளப்பட்ட பொருட்களின் விகிதத்தைக் காண்க.

{ $x_1 + x_2 = N\ (5, \cdot 5)$ (இருபகுதிகளின் நீளங்கள் x_1, x_2 எனும் இயல்நிலை மாறிகள் என்க)

$$t = \frac{6 - 5}{\cdot 5} = 2.$$

$$\int_2^{\infty} \phi(t)\, dt = 1 - \int_0^2 \phi(t)\, dt = 1 - \cdot 4772 = \cdot 0228 \}$$

4. $N(X) = P(X \leq x)$, X இயல்நிலை மாறி. $N(-x) = 1 - N(x)$ என நிறுவுக. (கௌஹாதி ப.க. '71)

5. X ஒரு இயல்நிலை மாறி. கூட்டுச்சராசரி 1. திட்டவிலக்கம் $\cdot 0 \cdot 6$. $P(X > 0)$, $P[\,|X - 1| \geq 0{\cdot}6]$, $P[-1{\cdot}8 < X < 2{\cdot}0$ இவற்றைக் காண்க. $4X + 5$-ன் பரவலைக்காண்க.

ஈருறுப்புப் பரவலுக்கு தோராயமாக இயல்நிலைப் பரவலைப் பயன் படுத்தல் (Normal approximation to the Binomial)

ஈருறுப்புப் பரவலில் தேவையான நிகழ்வெண்களை இயல்நிலை வரையின் பரப்புப்பட்டியலைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடலாம்

நிலை 1

$p = q$ ஆக இருக்கும்போது, n பெரியதாக இல்லாதபோது கூட கிடைக்கும் சமச்சீருள்ள ஈருறுப்புப்பரவலை இயல்நிலை வரைக்குத் தோராயமாகக் கொள்ளலாம். எனவே வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை x_1-லிருந்து x_2-க்குள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு அவற்றிற்கிணைந்த t மதிப்புகளுக்கு இடையே உள்ள நிகழ்தகவுக்குத் தோராயமாக இயல்நிலை வரையின் பட்டியலி லிருந்து கணக்கிடப்படுகிறது.

நிலை 2

$p \neq q$ ஆக இருக்கும்போதுகூட n ஓரளவு பெரியதாக இருந்தால் இயல்நிலை வரையை ஈருறுப்புப் பரவலுக்குத் தோராயமாகப் பயன்படுத்தலாம்.

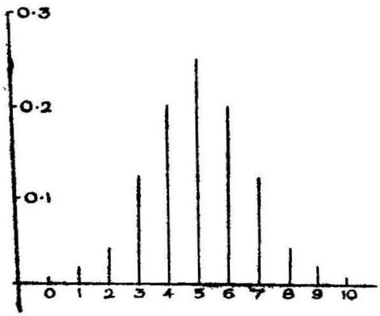
இருநிலைகளிலும் t-யின் மதிப்பைக் கணக்கிடவேண்டும். $\left(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right)$ என்பதே x வெற்றிக்குரிய மெய்ப்பிரிவு இடைவெளி.

$$\text{எனவே } t_1 = \frac{x - m}{\sigma} = \frac{x - \frac{1}{2} - np}{\sigma}$$

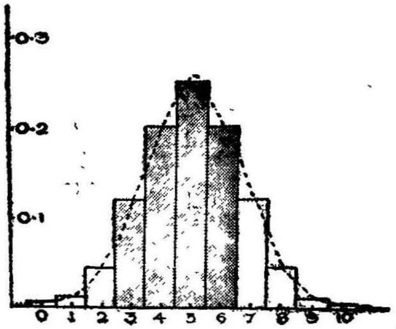
$$t_2 = \frac{x + \frac{1}{2} - np}{\sigma}, \quad \sigma = \sqrt{npq}$$

$$\therefore \text{ தேவையான நிகழ்தகவு} = \int_{t_1}^{t_2} \phi(t)\, dt.$$

எ கா. 1. ஒரு தலைச்சார்பற்ற ஒரு நாணயத்தை 10 முறைகள் வீசும்போது கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கை 3 முதல் 6 வரை இருக்கவேண்டுமானுல் அதற்கான நிகழ்தகவை (1) ஈருறுப்புப் பரவல் மூலயாக (2) இயல்நிலைப் பரவலை ஈருறுப்புப் பரவலுக்குத் தோராயமாக கருதிக் கணக்கிடுக.



படம் 13·10,



படம் 13·11

ஈருறுப்புப் பரவலின்படி x தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= nc_x \, p^x \, q^{n-x}$.

எனவே $P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) + P(x=6)$

$$= 10c_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^7 + 10c_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$+ 10c_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 10c_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

$$= \frac{15}{128} + \frac{105}{512} + \frac{63}{256} + \frac{105}{512} = \frac{99}{128}.$$

$$= .7734.$$

நாணயத்தை 10 முறை வீசினுல் கிடைக்கக்கூடிய நிகழ்தகவு வரையைக் கீழே காண்கிறேம். படம் 13.11-ல் மதிப்புக்களைத் தொடர்மாறிகளாகக் கருதுவதால். தேவையான நிகழ்தகவு குறிப்பிடப்பட்ட செவ்வகங்களால் அடைபட்டுள்ள பரப்பை அதற்கான இயல்நிலை வரை அடக்கியுள்ள பரப்புக்குத்

தோராயமாகக் கொண்டு பெறப்படுகிறது. 3-லிருந்து 6 தலைகள், $3 - \cdot 5 = 2\cdot 5$-லிருந்து $6 + \cdot 5 = 6\cdot 5$ தலைகளாக எடுக்கப்படுகிறது.

எனவே கூட்டுச்சராசரி $\bar{x} = np = 10 \times \frac{1}{2} = 5.$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 1\cdot 58$$

எனவே கணக்கிடப்படவேண்டிய பரப்பு

$$= \int_{t_2}^{t_1} \phi(t)\, dt, \quad t_1 = \frac{3 - \cdot 5 - 5}{1\cdot 58} = -1\cdot 58.$$

$$t_2 = \frac{6 + \cdot 5 - 5}{1\cdot 58} = \cdot 95.$$

$$= \int_{-1\cdot 58}^{\cdot 95} \phi(t)\, dt = \int_{-1\cdot 58}^{0} \phi(t)\, dt + \int_{0}^{\cdot 95} \phi(t)\, dt$$

$$= .4429 + \cdot 3289 = \cdot 7718.$$

நிகழ்தகவின் சரியான மதிப்பு ·7734 உடன் இத்தோராய மதிப்பு ·7718-ஐ ஒப்பிடும்போது அதிகவேறுபாடில்லை. N-ன் பெரிய மதிப்புகளுக்கு இவ்வேறுபாடு இன்னும் குறைகிறது.

எ.கா. 2. ஒரு நாணயம் 500 முறைகள் வீசப்படுகிறது, **தலைகளின் எண்ணிக்கை 250-லிருந்து 30-க்கு அதிகமாக வேறுபடாது இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.**

$$\bar{x} = 500 \times \frac{1}{2} = 250.$$

வேறுபாடு 30 க்குள் இருக்க வேண்டுமாதலால் தலைகளின் எண்ணிக்கை, 220-லிருந்து 280-க்குள் இருக்கலாம். அல்லது மாறியை தொடர்மாறியாகக் கொண்ட 219·5-லிருந்து 280·5 வரை தலைகளின் எண்ணிக்கை இருக்கலாம்.

எனவே $\int_{t_1}^{t_2} \phi(t)\, dt$-ல் $t_1 = \dfrac{219.5 - 2\cdot0}{\sqrt{500 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}} = -2\cdot73$

$$t_2 = \frac{2\,0\cdot5 - 2\cdot0}{\sqrt{500 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}} = 2\cdot73.$$

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2} \phi(t)\, dt = \int_{-2.73}^{2\cdot73} \phi(t)\, dt = 2 \int_{0}^{2\,73} \phi(t)\, dt$$

$$= 2 \times (\cdot4968) \quad .9936$$

இயல்நிலைப் பரவலின் சிறப்பு

1. பௌதிக ஆராய்ச்சிகளில் வரும் E, J போன்ற மாறிலி களின் மதிப்புகளைப் பல்வேறு சோதனைகளில் கணக்கிடும்போது கணக்கியல் மதிப்பிற்கும், நேரில் கண்ட மதிப்பிற்கும் உள்ள வேறுபாடுகள், இம்மாறிகளின் உண்மையான மதிப்பைக் கூட்டுச் சராசரியாகக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்துள்ளன. இதுபோலவே கூறுகளில் தற்செயலாகக் காணப்படும் வாய்ப்புப் பிழைகளும் இப்பரவலைச் சார்ந்துள்ளன

2. உயிரியல், அறிவியல் துறைகளில் காணப்படும் அளவைகள், பண்புகள் முதலியன இயல்நிலைப் பரவலைச் சார்ந்துள்ளன.

3. வயது, இனம், வாழுமிடம் போன்றவற்றில் வேறுபாடு இன்றி, ஒரே தன்மையுடையவர்களிடமிருந்து பெருங்கூறை எடுக்கும்போது உயரங்கள், நிறைகள், மார்பு அளவுகள் போன்றவை இயல்நிலைப் பரவலைத் தருகின்றன.

4. செடிகள், மிருகங்கள் இவற்றின் தன்மைகளை ஆராயும் அளவுகளில் கூட இந்நியதி காணப்படுகிறது.

5. கலப்பு சேர்க்கையில் உருவாகும் பல்வேறு மெண்டிய லியன் விதிகளும் இயல்நிலைப் பரவலைத் தெரிவிக்கின்றன.

6. சமூக, பொருளாதார விவகாரங்களில் பெரும்பான்மையான பரவல்கள் நேரிடையாக இயல்நிலைப் பரவலைச் சார்ந்திராவிடினும் இறுதியில் இதனைச் சார்கின்றன. ஒரேமாதிரியான சூழ்நிலைகளில்

பிறப்பு, இறப்பு விகிதங்களிப் இந்நியதி காணப்படுகிறது. காலணிகளின் வியாபாரத்தில் கால்களின் அளவுகள், ஆடை தயாரிக்கும் தொழிலில் இடுப்பு கழுத்து அளவுகள் போன்றவை, பெரும்பான்மையான மக்களது அளவுகளைப் பொறுத்தவை ஆதலால் அவையும் இயல்நிலை பரவலை சார்கின்றன.

7. கல்வி, உளவியல் துறைகளிலும் பெரும்பான்மையான பரவல்கள் இயல்நிலைப் பரவல்களைத் தருகின்றன. தேர்வுகளில் மாணவர்களது மதிப்பெண்கள், அறிவுக் கூர்மை சோதனைகளின் முடிவுகள் போன்றவை இந்நியதியின் அடிப்படையிலேயே கணிக்கப்படுகின்றன. தொழில்துறையில் பொருட்களின் தரக் கட்டுப்பாட்டிற்கும் இது பெருமளவு பயன்படுகிறது.

8 புள்ளியியலில் ஒரு முகடுடைய மணி வடிவ வரைகளுக்கு மிக நெருங்கிப் பொருத்தக்கூடிய வரையாக இயல்நிலை வரை உள்ளது முழுமைத் தொகுதியின் சரியான அமைப்பு தெரியாத போது, அதன் ஒரு சில கணிப்புகளிலிருந்து பெருமளவில் சமச் சீருடையதென அறிந்தால் முழுமைத் தொகுதியின் பரவலை இயல் நிலைப் பரவலாகவே கொள்வதில் தவறொன்றுமில்லை.

9. இயல்நிலைப் பரவலுக்கு எளிதில் புரிந்து கொள்ளக் கூடிய பல பண்புகளுண்டு. விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள், தட்டையளவை, கோட்டளவை, பண்பளவைகளின் திட்டப் பிழைகள் இவற்றை இயல்நிலைப் பரவலைப் பொறுத்த வரை எளிதில் கணக்கிடலாம். விலக்கப் பெருக்குத் தொகை மடங்கு தொடர்பு $\mu_{2n} = (2n-1)\ (2n-3)\ (2n-5) \ldots\ldots\ldots \sigma^{2n}$ மூலம் காணலாம். இதை அடிப்படையாக வைத்து மற்ற பரவல்களின் கோட்டளவை தட்டையளவுகள் போன்றவற்றையும் ஒப்பிடலாம். [$\beta_1 = 0; \beta_2 = 3$]

10. ஒரு மாறி, இயல்நிலைப் பரவலைத் தழுவாமலிருக்கும் போதும், சிற்சில மாற்றங்களின் வாயிலாக இதனை இயல் நிலைப் பரவலை இறுதியில் அடைந்திடச் செய்ய இயலும். ஒட்டுறவுக்கெழு z-ன் பரவல் கை வர்க்க மாறியின் பரவல் இவை கோட்ட முடையவை ஆனல் $z = \frac{1}{2}\log\frac{1+r}{1-r}\ \sqrt{2x^2} - \sqrt{2n-1}$ போன்றவை இயல்நிலைப் பரவலைத் தழுவுகின்றன.

11 ஈருறுப்புப் பரவல், பாய்ஸான் பரவல் போன்றவையும் குறிப்பிட்ட சூழ்நிலைகளில் இயல்நிலைப் பரவலை அணுகுகின்றன.

அதுபோலவே ஸ்டுடண்ட் டீ, ஸ்நெக்டரர் கை வர்க்க மாறியின் பரவல்கள் போன்றவை பெருங்கூறுகளில் இயல்நிலை மாறிகளா கின்றன. முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவை கூறு பரவல்களும் இயல்நிலைப் பரவல்களாகும். எனவே தான் பெருங் கூறுகளின் கணிப்புகளிலிருந்து முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைகளின் மதிப்பளவைகளைக் காணும்போது, இயல்நிலைப் பரவலையே பயன் படுத்துகிறோம். பெருங்கூறுகளில், நேரில் காணும் மதிப்பு களுக்கும், கணக்கியல் மதிப்புகளுக்குமுள்ள வேறுபாட்டின் மிகைத்தன்மையை ஆராயும் சோதனைகளில், $P\,[m-3\sigma<x<m+3\sigma]$ $=\cdot 9973$ எனும் அடிப்படைக் கருத்து பெரிதும் பயன்படுகிறது.

12. ஈருறுப்புப் பரவலின் நெருக்கமாக இயல்நிலைப் பரவல் உள்ளதால், இயல்நிலைப் பரவலின் நிகழ்தகவுக் கோவையின் பெருமளவு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை காண முற்படும்போது அதற்கு இயல்நிலைப் பரவலைப் பயன்படுத்தலாம்.

எ.கா. $f(x)=K\,e^{(-0\cdot125\,x^2+3x-18)}$ என்ற இயல்நிலைப் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி, திட்ட விலக்கம், K-யின் மதிப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

m என்பதை கூட்டுச்சராசரியாகவும், σ என்பதைத் திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட x என்ற இயல்நிலை மாறியின்

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

கொடுக்கப்பட்ட இயல்நிலைப் பரவல்

$$f(x)=K\cdot e^{-0.125\,x^2+3x-18} \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

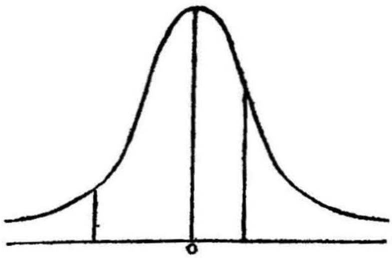
x^2-ன் குணகங்களை (1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளில்

சமப்படுத்த நமக்குக் கிடைப்பது $-\frac{1}{2\sigma^2}=-\,0\cdot125$ அல்லது

$$\frac{1}{2\times0\cdot125}=\frac{1}{0\cdot25}=4=\sigma^2$$

$\therefore$ திட்ட விலக்கம் $=\sigma=2$

அதுபோலவே x-ன் குணகங்களைச் சமப்படுத்த நமக்குக்கிடைப்பது



படம் 13.12

$$\frac{m}{\,^{2}} = 3 \quad = 3\sigma^{2} = 3 \times 4 = 12$$

K என்பது $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}.2}$

பயிற்சி

1. (அ) இயல்நிலைப் பரவலின் படம் வரைந்து அதன் பண்புகளை எடுத்துரைக்க.

(ஆ) ஒரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியின் மதிப்புகள் 36% 46· -க்கு கீழும், 23% 5·7-க்கு மேலும் அமைந்தால் அதன் கூட்டுச் சராசரியையும், திட்டவிலக்கத்தையும் கணக்கிடுக.

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\cdot 36} e^{-\frac{t^{2}}{2}}\,dt = \cdot 14 \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\cdot 14} e^{-\frac{t^{2}}{2}}\,dt = \cdot 27\right]$$

(செ.ப)

2. ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் மொத்த அலைவெண்கள் 1,000 எனவும், கூட்டுச்சராசரி 48 எனவும் திட்ட விலக்கம் 6 எனவும் இருந்தால் கால்மானங்களையும் கால்மான விலக்கத்தையும் கணக்கிடுக.

3· ஒரு மரத்திலுள்ள 900 இலைகளின் நீளங்களை அளந்ததில் அதன் கூட்டுச்சராசரி 3 செ.மீ. எனவும், திட்டவிலக்கம் 5 செ.மீ. எனவும் தெரிந்தது· இதன் பரவலை இயல்நிலையாகக் கொண்டு 1. 4·2 செ.மீ. க்கு மேல் நீளங்களையுடைய இலைகள் எத்தனை என்றும் கணக்கிடுக.

4. (அ) ஒரு இயல்நிலை வரையில் திருகுப் புள்ளிகள் (points of inflexion) கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து சமதூரத்தில் உள்ளன எனக் காட்டுக.

(ஆ) இரு இயல்நிலை மாறிகளின் கூடுதல் பண்பை நிறுவுக. (செ ப·)

5. இயல்நிலைப் பரவலில் பண்பளவைகளான '*m*', 'σ'-வின் முக்கியத்தன்மைகளை விளக்குக.

ஒரு மாணவர் ஒரு தேர்வில் 60% மதிப்பெண்களை எதிர் பார்க்கிறார். திருத்துபவர் விடைத்தாள்களை மதிப்பிடுவது 36-ஐ பரவற்படியாகக் கொண்டுள்ளது. திருத்துபவர் கொடுக்கும் மதிப்பெண்கள் ஒரு இயல்நிலைப் பரவலைச் சார்கின்றன எனக் கொண்டு, தேர்ச்சி பெறுவதற்குரிய மதிப்பெண்கள் 35% என்றால் மாணவர் தேர்ச்சி அடையாமல் இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவைக் காண்க. (செ.ப.)

6. (அ) கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்வெண் பரவலுக்கு எவ்வாறு இயல்நிலைப்பரவலைப் பொருத்துவாய்?

(ஆ) ஒரு இயல்நிலைப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி 75, திட்ட விலக்கம் 8. மொத்த அலைவெண்ணில் நடு 75% எந்த எல்லைகளுக்குள் இருக்கும்?

7. கூட்டுச் சராசரி 39, பரவற்படி 16 ஆக உள்ள ஒரு மாறியின் இயல்நிலைப் பரவலின் சார்பினை எழுதுக. இயல்நிலைப் பரவலின் பரப்புப் பட்டியலைப் பயன்படுத்தி 36—38, 38—42 எனும் வீச்சுகளில் உள்ள அலைவெண்ணின் விகிதாசாரம் (Proportion) கண்டுபிடி.

அலைவெண்களில் நடு 50% இருக்கக் கூடிய வீச்சைக் கண்டு பிடிக்க. (ம.ப,)

8. இரு இயல்நிலை வரைகளுக்கு ஒரே மொத்த அலைவெண்ணும் திட்டவிலக்கமும் உள்ளன முதல் பரவலின் திட்ட விலக்கம் இரண்டாவதைப் போன்று மூன்று மடங்குள்ளது. இரண்டாவதன் உச்ச நிலைக்கோடு *y* அலகுகள் ஆனால், முதலாவதன் உச்ச நிலைக்கோட்டையறிக. (ம,ப. '69)

9. இயல்நிலைப் பரவலின் முக்கிய பண்புகளைக் கூறுக. புள்ளியியல் அறிமுறையிலும் அனுபவமுறையிலும் அதன் முக்கியத்துவத்தை நடைமுறையில் விளக்குக.

ஒரு இயல்நிலைப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி μ, திட்டவிலக்கம் σ. இதன் , சராசரி விலக்கம் $2\sqrt{\beta}$, β_2 ன் மதிப்புகளைக் காண்க. (ம.ப. '69)

10. ஒரு இயல்நிலைப் பரவலின் பரவற்படி σ^2 ஆனுல் கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக.

1. $\mu_{2n} = (2n - 1)\sigma^2 \mu_{2n-2}$

2. $\beta_2 = 3$

3. கூட்டுச்சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட சராசரி விலக்கம் $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma$

11. கீழ்க்கண்ட பரவலின் இயல்நிலைத் தன்மையினை ஆராய்க.

எடை (பவுண்டில்)	110	120	130	140	150	160	170
ஆட்கள்	250	670	1,310	2,425	2,100	1,705	925
	180	190	200				
	625	355	220				

12. என்பது, கூட்டுச்சராசரி பூஜ்ஜியமாகவும் பரவற்படி ஒன்ருகவும் உள்ள ஒரு இயல்நிலை மாறி. (1) x^2 (2) e^{ax}-ன் எதிர்பார்த்தலையும் பரவற்படியையும் கணக்கிடுக.

13 x எனும் ஒரு இயல்நிலை மாறியின் கூட்டுச்சராசரி 'm' பரவற்படி σ^2 -ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட பரவலில் கூட்டுச்சராசரி

$$= m + \frac{n(a) - n(b)}{N(b) - N(a)}\,\sigma^2 \qquad [a < x < b]$$

எனக் காட்டுக.

இங்கு $N(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2} dx.$

$$n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-m)^2}$$

14. (அ) ஒரு ஈருறுப்பு பரவலின் நெருக்கமே இயல்நிலைப் பரவல் என நிறுவுக.

(ஆ) இயல்நிலைப் பரவலின் பண்புகளைக் கூறுக.

(இ) ஒரு இயல்நிலைப் பரவலில் 30-க்குக்கீழ் 15% மதிப்புகளும் 42-க்கு மேல் 10% மதிப்புகளும் உள்ளன. இதன் திட்ட விலக்கத்தினையும் கூட்டுச்சராசரியையும் காண்க.

15. (அ) திட்ட இயல்நிலைப் பரவல் (Standard Normal Distribution) என்றால் என்ன ? அதனுடைய அமைப்பைக் கூறி 2 r வது விலக்கப் பெருக்குத்தொகை காண்க. இரட்டைப்படை விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளின் மடங்குத் தொடர்பைப் பெறுக.

(ஆ) நிகழ்திறப் பிழையின் கருத்தை இயல்நிலைப் பரவலை அடிப்படையாகக் கொண்டு விளக்குக. 45 கூட்டுசராசரி பரவற்படி 9 ஆக உள்ள இயல்நிலைப் பரவலில் நிகழ்திறப் பிழை இடைவெளியின் எல்லைப் புள்ளிகளைக் காண்க.

16. 100 மாணவர்கள் ஒரு தேர்வின் முடிவில், பின்வருமாறு தேர்ச்சி பெற்றவராக பிரிக்கப்பட்டனர்.

இணையற்றோர் — 5 மிகச் சிறந்தவர் — 10 சிறந்தவர் — 30

சராசரிக்குமேல் தேர்ச்சி பெற்றவர் — 25

சராசரி தேர்ச்சி பெற்றவர் — 20

சராசரிக்குக் கீழ் தேர்ச்சி பெற்றவர் — 10

நிகழ்வெண்கள் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்துள்ளன எனக் கொண்டு, மதிப்புகள் 47 — 56 என்ற பிரிவில் சராசரிக்கு மேல்

தேர்ச்சி பெற்றவர் இருந்தால், மற்ற இனங்களுக்குரிய மதிப்பெண்களின் பிரிவு இடைவெளிகளைக் காண்க.

[விடை : இணையற்றவர் 80 — 100
மிகச்சிறந்தவர் 71 — 79
சிறந்தவர் 57 — 70
சராசரிக்கு மேல் தேர்ச்சி பெற்றவர் 47 — 36
சராசரி தேர்ச்சி பெற்றவர் 35 — 46
சராசரிக்குக் கீழ் தேர்ச்சி பெற்றவர் 0 — 34]

17. ஒரு இயல்நிலைப் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி 25 ; பரவற்படி 25.

(i) வரையின் அடியில் நடு 50% இருக்கக்கூடிய எல்லைகளைக் காண்க.

(ii) திருகுப்புள்ளிகளுக்கான x-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

(விடை : 30, 10)

18. அரசாங்க அலுவல்களுக்குத் தகுதியுடையவராயிருக்க 60% வாலிபருக்கு வாய்ப்பு இருக்குமாறு ஒரு குறிப்பிட்ட, குறைந்த உயரம் நிர்ணயிக்கப்படுகிறது. வாலிபர்களின் உயரங்கள் 60·6" கூட்டுச்சராசரி, 2·55" திட்டவிலக்கம் கொண்டு இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்துள்ளன. குறிப்பிடப்பட்ட குறைந்த உயரம் யாது ? [விடை : 59·9"]

19. 300 நபர்களின் உயரங்கள் ஏறுவரிசையில் அமைக்கப் படுகின்றன. 120 ஆவது உயரம் 64·50", 210 ஆவது உயரம் 67·35". உயரங்கள் ஒரு இயல்நிலைப் பரவலில் அமைவதாகக் கொண்டு 60 ஆவது, 270 ஆவது நபர்களின் உயரங்களை மதிப்பிடுக. (62·36", 70·11")

20. ஒரு தேர்வில் கணிதம், நிலையியல், வேதியியல் என்ற பாடங்களில் மாணவர்கள் வாங்கும் மதிப்பெண்கள் முறையே 50, 52, 48-ஐ கூட்டுச்சராசரிகளாகவும், 15, 12, 16 இவற்றைத் திட்டவிலக்கங்களாகவும் கொண்டு இயல்நிலைப் பரவலைச் சார்ந்துள்ளன.

(i) 180-க்கு மேலே (ii) 90 அல்லது அதற்குக் கீழே, மூன்று பாடங்களிலும் மொத்த மதிப்பெண்கள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவென்ன ?

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{1.2}^{\infty} e^{-\frac{Z}{2}}\, Z = 0{\cdot}1942;\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{2.4}^{\infty} e^{-\frac{Z^2}{2}}\, dZ \quad 0{\cdot}0224\right]$$

[விடை : 0·1942, 0·0224]

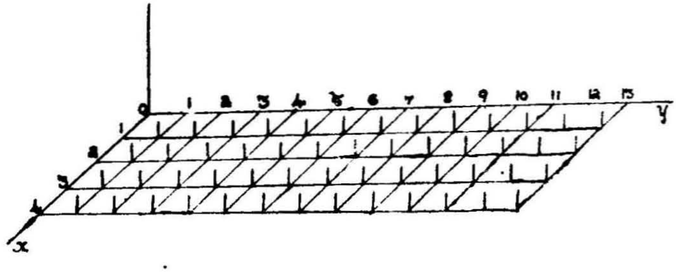
22. ஒரு தேர்வில், தேர்ச்சி பெற்றவர்கள், சிறப்புச் தேர்ச்சி பெற்றவர்கள் (distinction) முறையே 46, 9 ஆகும். தேர்ச்சி, சிறப்புத் தேர்ச்சி பெற மீச்சிறு மதிப்பெண்கள் 40, 75 ஆனால், மாணவர் பெற்ற சராசரி மதிப்பெண்களைப் பெறுக. ($m = 36{\cdot}4$, $\sigma = 28{\cdot}2$).

14. பல்மாறிப் பரவல்கள்

(MULTIVARIATE DISTRIBUTIONS)

ஒரு வாய்ப்பு நிகழ்ச்சியின் (chance event) விளைவு, ஒன்றுக்கு மேற்பட்டதாயின், நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு, ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறியின் சார்பாக அமையும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து எடுக்கப்படும் சீட்டு, சீட்டில் உள்ள எண்ணைப் பொறுத்தோ அல்லது அதன் ஜாதியைப் பொறுத்தோ மாறுபடலாம். ஸ்பேடு, ஹார்ட்டு, டைமன்டு, கிளாவர் என்னும் நால்வகை ஜாதியைப் பொறுத்து $x = 1, 2, 3, 4$ என அமையலாம். எண்களைப் பொறுத்து $A, 2, 3, \ldots 10, J, Q, K$ என்று $y = 1, 2, \ldots\ldots 13$ என்னும் மதிப்புகளைப் பெறுகிறது. ஒரு குறிப்பிட்ட சீட்டை எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவை $f(x, y)$ எனக் கொண்டோமானால் $f(x, y) = \frac{1}{52}$ $1 \leq x \leq 4$; $1 \leq y \leq 13$. இச்சார்பினை ஒரு தளத்தில் குறிக்கலாம். படுகைத் தளத்தில் உள்ள பல்வேறு புள்ளிகளில் வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடுகள் நிகழ்தகவுகளைக் குறிக்கின்றன. இங்கு நிகழ்தகவுச்சார்பு மாறிலியாதலால் கோடுகளின் உயரங்கள் யாவும் சமமானவை.

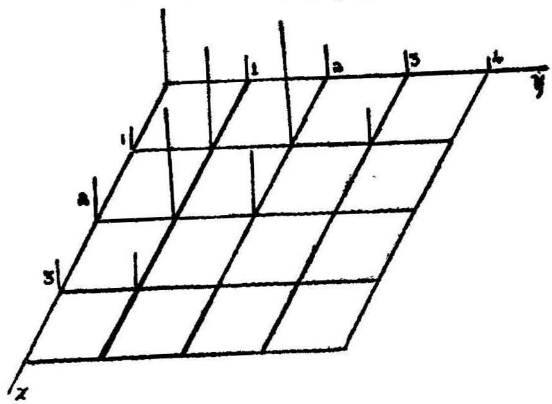


படம் 14·1

5 பச்சை, 6 வெள்ளை, 7 சிவப்புப் பந்துகள் ஒரு பாத்திரத்தில் உள்ளன. அவற்றிலிருந்து 4 பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. எடுக்கப்படும் வெள்ளைப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை y எனில்

$$f(x, y) = \frac{6\,C_x\,7\,C_y\,5\,C_{4-\overline{x+y}}}{18\,C_4} \qquad 0 \leq x + y \leq 4$$

பாத்திரத்திலிருந்து எடுக்கப்படும் பச்சைப் பந்துகளை மூன்றுவது மாறியாகக் கொண்டால் நமக்கு மூன்று மாறிகளைக் கொண்ட பரவல் கிடைக்கிறது ஆனால் $z = 4 - x - y$ ஆதலால் x, y-ன் மதிப்புகள் தெரிந்தால் z-ன் மதிப்பு உறுதியாகத் [திட்ட வட்டமாகத்] தீர்மானிக்கப்படுகிறது. எனவே $f(x, y, z)$ என்னும் சார்பு தரக்கூடிய நிகழ்தகவுகளே $f(x, y)$ மூலம் கிடைக்கிறது.



படம் 14.2

கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாறிகள் தனித்த மாறிகளானால் அவற்றின் கூட்டு நிகழ்தகவுப் பரவலை பல்மாறித் தனித்த பரவல் என்றும் தொடர் மாறிகளானால் அவற்றின் கூட்டு நிகழ்தகவுப் பரவல் பல்மாறித் தொடர் பரவல் என்றும் அழைக்கப்படுகிறது. x_1, x_2 என்பவை இரு சமவாய்ப்பு மாறிகளானால் அவற்றின் கூட்டு நிகழ்தகவுப் பரவல் இருமாறிப் பரவலாகும். அது போன்றே $x_1, x_2 \ldots\ldots x_k$ என்னும் k சமவாய்ப்பு மாறிகளின் கூட்டு நிகழ்தகவுப் பரவல் k மாறிப்பரவலாகும். k மாறிகளின் கூட்டு நிகழ்தகவுச் சார்பினை $f(x_1, x_2 \ldots\ldots x_k\,\theta)$ எனக் குறிப்பிடலாம் இங்கு θ என்பது பரவலில் உள்ள எல்லாப் பண்பளவைகளையும் குறிக்கும்.

இருமாறிப் பரவல் (Bivariate Distribution)

ஒரு நாணயத்தை இருமுறை வீசினால் நமக்குக்கிடைக்கும் விளைவு கணம் (out comeset) $= (H, H)$; (H, T) ; (T, H) ;

(T, T) ஆகும் இங்கு H தலையையும் T பூவையும் குறிக்கின்றன.

$$P(H, H) = \frac{1}{4};\ P(T, H) = \frac{1}{4};\ P(H, T) = \frac{1}{4}\ P(T, T) = \frac{1}{4}$$

x, y என்னும் இரு சமவாய்ப்பு மாறிகளை எடுத்துக் கொண்டோமானல் [x-தலைகளின் y-பூக்களின் எண்ணிக்கை யாகும்]

$$f(x) = \frac{1}{4} \quad x = 0 \text{ என்னும்போது}$$
$$= \frac{2}{4} \quad x = 1 \text{ என்னும்போது}$$
$$= \frac{1}{4} \quad x = 2 \text{ என்னும்போது}$$
$$= 0 \quad \text{மற்றெங்கிலும்}$$
$$h(y) = \frac{1}{4} \quad y = 0 \text{ என்னும்போது}$$
$$= \frac{2}{4} \quad y = 1 \text{ என்னும்போது}$$
$$= \frac{1}{4} \quad y = 2 \text{ என்னும்போது}$$
$$= 0 \quad \text{மற்றெங்கிலும்}$$

x, y என்னும் இவ்விரு மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுப் பரவலைக் கீழ்க்காணும் இருவழிப்பட்டியலில் குறிப்பிடலாம்.

y \ x	0	1	2	மொத்தம்
0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
மொத்தம்	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

x, y-ன் இணைந்த நிகழ்தகவுச் சார்பை $f(x, y)$ எனக் குறித்தால்

$$f(x, y) = \frac{1}{4} \quad x = 2;\ \ y = 0 \text{ என்னும்போது}$$

$$= \frac{1}{2} \quad x = 1;\ \ y = 1 \text{ என்னும்போது}$$

$$= \frac{1}{4} \quad x = 0 \quad y = 2 \text{ என்னும்போது}$$

$$= 0 \quad \text{மற்றெங்கும்.}$$

∴ இணைந்த நிகழ்தகவுப் பரவலைக் கீழ்க்கண்டவாறு குறிக்கலாம்.

$$f(0, 2) = \frac{1}{4}$$

$$f(1, 1) = \frac{1}{2}$$

$$f(2, 0) = \frac{1}{4}$$

$$f(x, y) = 0 \quad \text{மற்றெங்கும்}$$

கணக்கு

இரண்டு பகடைகள் வீசப்படுகின்றன. x முதல் பகடையில் காணப்படும் எண். y இரண்டாவது பகடையில் காணப்படும் எண். x, y இவற்றில் மிகப்பெரிய எண் Z எனில் (i) Z, x-ன் இணைந்த பரவலை எழுதுக. (ii) Z-ன் கூட்டிடை, பரவற்படி, உடன்மாறுபாடு காண்க.

x, y என்னும் இரு சமவாய்ப்பு மாறிகளும் 6 மதிப்புகளை ஏற்கின்றன.

x	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
y	1	2	3	4	5	6
$P(y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

x, y சார்பற்றவை.

x, y-ன் இணைந்த நிகழ்தகவுப்பரவல், பின்வரும் பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளது.

z / x	1	2	3	4	5	6	
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
2	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
3	0	0	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
4	0	0	0	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$
	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

(i) $P(Z=1, x=1) = P(x=1) \cdot P(y=1) = \frac{1}{36}$.

$P(Z=2, x=1) = P(y=2) \cdot P(x=1) = \frac{1}{36}$.

$P(Z=1, x=2) = 0$.

$P(Z=2, x=2) = P(x=2, y=1) + P(x=2, y=2)$

$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36}.$$

இதுபோன்று $P(x=3, z=3) = P(x=3, y=1)$

$$+ P(x=3, y=2) + P(x=3, y=3)$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36}.$$

இவ்வாறே மற்றவற்றையும் காணலாம்.

(ii) கூட்டிடை: $E(Z)$

$$E(Z) = \Sigma P_i 3 = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36}$$

$$= \frac{1}{36}[1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + 4 \times 7 + 5 \times 9 + 6 \times 1]$$

$$= \frac{161}{36}.$$

பரவற்படி $= \sigma^2$

$$\text{Va } Z = E(Z^2) - [E(Z)]^2$$

$$E(Z^2) = \Sigma P_i Z_i^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{36} + 2^2 \cdot \frac{3}{36} + 3^2 \cdot \frac{5}{36} + 4^2 \cdot \frac{7}{36} + 5^2 \cdot \frac{9}{36} + 6^2 \cdot \frac{11}{36}$$

$$= \frac{1}{36}[1 + 12 + 45 + 112 + 225 + 396]$$

$$= \frac{791}{36}$$

$$[E(Z)]^2 = \left(\frac{161}{36}\right)^2$$

$$\therefore \quad \sigma^2 = \frac{791}{36} - \frac{(161)^2}{36^2}$$

$$= \frac{2555}{1296}$$

x, Z-ன் இணைப் பரவற்படி

$$\text{cov}(x Z) = E(x Z) - E(x) E(Z) = \text{cov}(x 2)$$

$$E(x Z) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{1}{36} + 4 \cdot \frac{1}{36} + 5 \cdot \frac{1}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36}$$

$$+ 4 \cdot \frac{3}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36} + 8 \cdot \frac{1}{36} + 10 \cdot \frac{1}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36}$$

$$+ 9 \cdot \frac{3}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} + 15 \cdot \frac{1}{36} + 18 \cdot \frac{1}{36}$$

$$+ 16 \cdot \frac{4}{36} + 20 \frac{1}{36} + 24 \cdot \frac{1}{36}$$

$$+ 25 \cdot \frac{5}{36} + 30 \frac{1}{36}$$

$$+ 36 \frac{6}{36}$$

$$= \frac{616}{35}$$

$$E(X) = \Sigma P_i x_i = 1 \cdot \frac{6}{36} + 2 \cdot \frac{6}{36} + \ldots\ldots 6 \cdot \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$= \frac{6}{36} [1 + 2 + \ldots\ldots + 6]$$

$$= \frac{7}{2}$$

$$E(Z) = \frac{161}{36.}$$

$$\text{Cov}(XZ) = \frac{616}{36} - \frac{2}{7} \cdot \frac{161}{36}$$

$$= \frac{35}{24}$$

விளிம்பு பரவல் அல்லது ஓரப்பரவல் (Marginal Distribution)

விளிம்புகளில் உள்ள நிகழ்தகவுகள் $\sum_x f(x, y), \sum_y f(x,y)$ என்பவை முறையே y, x-ன் நிகழ்தகவுப் பரவல்களைத் தருகின்றன. இங்கு $\sum_x$ என்பது x-ஐப்பொறுத்து கூட்டுவதையும் $\sum_y$ என்பது

y-யைப் பொறுத்து கூட்டுவதையும் குறிக்கின்றன. எனவே விளிம்புப் பரவல்களைக் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கலாம்.

$f(x, y)$ என்பது x, y என்னும் இரு சமவாய்ப்பு மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுப் பரவல் சார்பானால்

$$f(x) = \sum_{y} f(x, y) \quad \text{இங்கு } X, Y \text{ தனித்தமாறிகள்}$$

$$= \int_{y} f(x, y)\, dy \quad \text{இங்கு } X, Y \text{ தொடர்மாறிகள்}$$

என்னும் பரவல் x-ன் விளிம்புப் பரவல் அல்லது ஓரப்பரவல் எனப்படும்.

இது X மாறி மட்டும் அடங்கியுள்ள பரவல். அதுபோன்றே y மாறியின் விளிம்புப் பரவல் $f(y) = \sum_{X} f(x, y)$ (இங்கு x, y தனித்த மாறிகள்)

$$= \int_{X} f(x, y)\, dx \quad (\text{இங்கு } x, y \text{ தொடர்மாறிகள்})$$

$f(x)$, $h(y)$ இரண்டிற்கும் ஒரே மாதிரியான சார்புகள் அமைய வேண்டிய அவசியம் இல்லை.

விளிம்புப் பரவல்களின் வரையறையை k மாறிகளுக்குப் பொதுவாகக் கீழ்க்கண்டவாறு விரித்துக் கூறலாம்.

$f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_k)$ என்பது $X_1, X_2, \ldots\ldots X_k$ என்னும் சமவாய்ப்பு மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுச் சார்பு எனில் பல்வேறு விளிம்புப் பரவல்கள் அடியிற் கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$$f(X_1) = \sum_{X_2} \sum_{X_3} \cdots\cdots \sum_{X_k} f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_k) \quad \text{இங்கு}$$

$X_1, X_2, \ldots\ldots X_k$ என்பவை தனித்த மாறிகள்.

$$= \int_{X_2} \int_{X_3} \cdots\cdots \int_{X_k} f(x_1, x_2, \ldots x_k)\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_k$$

இங்கு $x_1, x_2 \ldots . x_k$ தொடர் மாறிகள்.

$$f(x_1\ x_2) = \sum_{X_3} \sum_{X_4} \cdots\cdots \sum_{X_k} f(x_3\ x_4\ x_5 \cdots\cdots x_k)$$ இங்கு

மாறிகள் தனித்தவை.

$$= \int_{x_3} \int_{x_4} \cdots\cdots \int_{x_k} f(x_1, x_2, \cdots x_k)\, dx_3\, dx_4 \cdots dx_k$$

இங்கு மாறிகள் தொடர்மாறிகள்.

கீழ்க்கண்ட பண்புகளை உடைய $f(x_1\ x_2 \cdots\cdots x_k)$ என்னும் ஒவ்வொரு சார்பும் ஒரு நிகழ்தகவுச் சார்பாகும்.

$f(x_1, x_2 \cdots\cdots x_k) \geq 0$ (x_i-ன் எல்லா மதிப்புகட்கும் $i = 1, 2, \cdots\cdots\cdots k) - \infty < x_i < \infty$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots\cdots\cdots \int_{-\infty}^{\infty} (f(x_1, x_2 \cdots\cdots x_k)\, dx_1\, dx_2 \cdots\cdots dx_k = 1$$

$x_1, x_2, \cdots\cdots x_k$ தொடர் மாறிகள்,

$$\sum_{-\infty < x_1 < \infty} \cdots\cdots \sum_{-\infty < x_k < \infty} f(x_1\ x_2 \cdots\cdots x_k) = 1$$

இங்கு $X_1, X_2 \cdots\cdots X_k$ தனித்த மாறிகள்.

எனவே A என்பது ஒரு நிகழ்ச்சியாயின்

$A = x_1 \cdots\cdots x_k\ [0 < x_1 < a_1,\ 0 < x_2 < a_2, \cdots\cdots 0 > x_k < a_k]$
A-ன் நிகழ்தகவு

$$P(A) = \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \cdots\cdots\cdots \int_0^{a_k} f(x_1\ x_2 \cdots\cdots x_k)\, dx_1\, dx_2 \cdots\cdots dx_k$$

இங்கு $X_1, X_2 \cdots\cdots X_k$ தொடர்மாறிகள்.

எ.கா. X, Y-ன் கூட்டுப்பரவல் கீழேகொடுக்கப்பட்டுள்ளது. X, Y-ன் விளிம்புப் பரவல்களைக் காண்க.

$f(-1, 0) = \frac{1}{15}$ $f(-1, 1) = \frac{3}{15}$ $f(-1, 2) = \frac{2}{15}$

$f(\ 0, 0) = \frac{2}{15}$ $f(\ 0, 1) = \frac{2}{15}$ $f(\ 0, 2) = \frac{1}{15}$

$f(\ 1, 0) = \frac{1}{15}$ $f(\ 1, 1) = \frac{1}{15}$ $f(\ 1, 2) = \frac{2}{15}$

வேறு x, y மதிப்புகளில் $(x, y) = 0$.

இங்கு $x = -1, 0, 1$; $y = 0, 1, 2$.

$$\therefore\ f(x) = \sum_{y} f(x, y)$$

$x = -1$ என்றிருக்கும் போது,

$$f(x) = f(-1, 0) + f(-1, 1) + f(-1, 2)$$

$$= \frac{1}{15} + \frac{3}{15} + \frac{2}{15}$$

$$= \frac{6}{16}$$

$x = 0$ என்றிருக்கும் போது,

$$f(x) = f(0, 0) + f(0, 1) + f(0, 2)$$

$$= \frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15}$$

$$= \frac{5}{15}.$$

$x = 1$ என்றிருக்கும்போது,

$$f(x) = f(1, 0) + f(1, 1) + f(1, 2)$$

$$= \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{2}{15}$$

$$= \frac{4}{15}$$

$\therefore$ $f(x)$-ன் மதிப்புகள் மற்றெங்கும் பூஜ்ஜியம்.

$$\therefore \quad f(x) = \frac{6}{15} \qquad x = -1 \text{ எனும்போது,}$$

$$= \frac{5}{15} \qquad x = 0 \text{ எனும்போது,}$$

$$= \frac{4}{15} \qquad x = 1 \text{ எனும்போது,}$$

$$= 0 \text{ மற்றெங்கிலும்.}$$

இதேபோன்று,

$$h(y) = \sum_{x} f(x, y).$$

$y = 0$ எனில்,

$$f(y) = f(-1, 0) + f(0, 0) + f(1, 0)$$

$$= \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15}$$

$$= \frac{4}{15}$$

$y = 1$ என்றிருக்கும் போது,

$$f(x) = f(-1, 1) + f(0, 1) + f(1, 1)$$

$$= \frac{3}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15}$$

$$= \frac{6}{15}$$

$y = 2$ என்றிருக்கும் போது,

$$h(y) = f(-1, 2) + f(0, 2) + f(1, 2)$$

$$= \frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{2}{15}$$

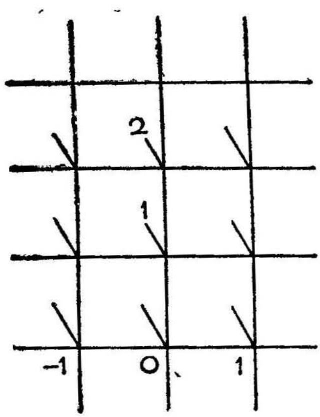
$$= \frac{5}{15}$$

$$\therefore \quad h(y) = \frac{4}{15} \qquad y = 0 \text{ என்றிருக்கும்போது,}$$

$$= \frac{6}{15} \qquad y = 1 \text{ என்றிருக்கும்போது,}$$

$$= \frac{5}{15} \qquad y = 2 \text{ என்றிருக்கும்போது.}$$

$$= 0 \text{ மற்றெங்கிலும்.}$$



படம் 14·3

குறிப்பு : மேற்கண்ட படத்தில் இணைந்த பரவல் காணப்படுகிறது. λ-ன் விளிம்புசார்பு λ அச்சின்மேல் உள்ள நிகழ்தகவுச் சார்பாகும். அதாவது மொத்த நிறை 1 அலகானால் அது x அச்சின் மீது $x = -1, 0, 1$ என்னும் புள்ளிகளில் $\frac{6}{15}, \frac{5}{15}, \frac{32}{15}$ ஆகப் பரவியிருக்கிறது. இது போலவே y-ன் விளிம்புச்சார்பு y-அச்சின் மீது மொத்த நிறை 1 அலகாகப் பரவியுள்ளதைக் குறிக்கிறது.

$y = 0, 1, 2$ என்னும் புள்ளிகளில் $f(y) = \frac{4}{15}, \frac{6}{15}, \frac{5}{15}$ ஆகப் பரவியுள்ளது.

$y = 2$ என்னும் கோட்டின் மீது உள்ள பரவலை நாம் பெற விரும்பினால் மொத்த நிறை 1 ஐ $y = 2$ என்னும் கோட்டின் மீது நிகழ்தகவுகளின் விகிதங்களில் பிரித்தால் x-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட பரவல் கிடைக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு

x, y-ன் இணைந்த பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. x, y-ன் இவைகளின் ஓரப்பரவல்களைக் காண்க:

$$f(x, y) = x + y \qquad 0 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq y \leq 1.$$

$$= 0 \text{ மற்றெங்கிலும்.}$$

x, y இங்கு தொடர்மாறிகளாதலால்

x-ன் விளிம்பு பரவல்,

$$f(x) = \int f(x, y)\, dy.$$

$$= \int_0^1 (x + y)\, dy = x\int_0^1 dy + \int_0^1 y\, dy$$

$$= x\Big[\, y\, \Big]_0^1 + \Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^1$$

$$= x + \frac{1}{2}$$

$$f(x) = x + \frac{1}{2} \qquad 0 \leq x \leq 1$$

$$= 0 \text{ மற்றெங்கிலும்.}$$

y-ன் விளிம்பு பரவல்,

$$h(y) = \int_0^1 (x + y)\, dx$$

$$= \int_0^1 x\, dx + y\int_0^1 dx$$

$$= \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 + y\Big[\, x\, \Big]_0^1$$

$$= y + 2$$

$$h(y) = y + 2 \qquad 0 \le y \le 1$$

$= 0$ மற்றெங்கிலும்.

எடுத்துக்காட்டு

$$f(x, y) = \frac{1}{8}(6 - x - y) \quad 0 < x < 2; \quad 2 < y < 4.$$

$= 0$ மற்றெங்கிலும்.

x, y-ன் விளிம்பு பரவல்களைக் காண்க.

x-ன் விளிம்பு பரவல்

$$f(x) = \int_y f(x, y)\, dy$$

$$= \int_0^4 \frac{1}{8}(6 - x - y)\, dy$$

$$= \left[\frac{6}{8}y - \frac{xy}{8} - \frac{y^2}{16}\right]_2^4 = \frac{3}{2} - \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{x}{4} \qquad\qquad 0 < x < 2$$

$= 0$ மற்றெங்கிலும்

y-ன் விளிம்பு பரவல்,

$$h(y) = \int_0^2 f(x, y)\, dx$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{8}(6 - x - y)\, dx$$

$$= \left[\frac{6}{8}x - \frac{x^2}{16} - \frac{yx}{8}\right]_0^2$$

$$= \frac{5}{4} - \frac{y}{4} \qquad 2 < y < 4.$$

$$= 0 \text{ மற்றெங்கிலும்}$$

பரவல் சார்பு

$f(x_1, x_2, \ldots x_k)$ என்பன $x_1, x_2, \ldots x_k$ என்னும் சமவாய்ப்பு மாறிகளின் கூட்டு நிகழ்தகவுச் சார்பானுல் $F(a_1, a_2, \ldots a_k)$ என்னும் குவிவு நிகழ்தகவுச்சார்பு (பரவல் சார்பு) கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$F(a_1, a_2, \ldots a_k) = \sum_{-\infty < x_1 \le a_1} \sum_{-\infty < x_2 \le a_2} \cdots \sum_{-\infty < x_k \le a_k} f(x_1, x_2, \ldots x_k)$$

இங்கு $x_1, x_2, \ldots x_k$ தனித்த மாறிகள்

$$F(a_1\ a_2 \ldots a_k) = \int_{-\infty}^{a_1} \int_{-\infty}^{a_2} \cdots \int_{-\infty}^{a_k} f(x_1 x_2 \ldots x_k)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_k$$

இங்கு $x_1, x_2, \ldots x_k$ தொடர் மாறிகள்

$$F(\infty, \infty, \ldots) = 1$$

$F(a_1\ a_2 \ldots a_k) = 0$ ஏதேனும் ஒரு $a_1 = -\infty$ எனில்,

எ.கா. கீழ்க்கண்ட நிகழ்தகவுப் பரவலுக்குப் $F(0,2)$, $F(1,3)$, $F(3, 5)$ காண்க.

$$f(1, 1) = \frac{1}{8};\ f(2, 1) = \frac{3}{8};\ f(1, 2) = \frac{2}{8}\ f(2,2) = \frac{2}{8}$$

$x = 1; 2; y = 1, 2$ இவற்றைத் தவிர மற்ற இடங்களில் $f(x, y) = 0$ ஆதலால்

$$F(0,2) = \sum_{-\infty < x \leq 0} \sum_{-\infty < y \leq 2} f(x,y) = 0$$

$$F(1,3) = f(1,1) + f(1,2) + f(1,3)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + 0$$

$$= \frac{3}{8}$$

$$f(3,5) = f(1,1) + f(1,2) + f(2,1) + f(2,2)$$

$$= 1$$

நிபந்தனைக்குட்பட்ட பரவல்கள் (Conditional Distribution)

$f(x, y)$ என்பது x, y என்னும் இரு மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுச் சார்பானால் $y = a$ என்னும்போது x-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட பரவல் $f(x \mid y = a) = \frac{(x, y)}{h(y)} \mid y = a$

$$= \frac{f(x, y)}{\sum_x f(x, y)} \mid y = a$$

இங்கு $h(a) \neq 0$ x, y தனித்த மாறிகள்

x, y தொடர் மாறிகளானால்

$$f(x \mid y = a) = \frac{f(x, y)}{\int_x f(x, y)\, dx} \mid y = a$$

$$f(i) = \int_x f(x,y)\, dx \mid y = a \neq 0 \text{ எனும்போது.}$$

y கொடுக்கப்பட்டுள்ளபோது x-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட பரவல், x, y-ன் இணைந்த பரவலுக்கும் y-ன் விளிம்பு பரவலுக்கும் உள்ள விகிதத்தின் மதிப்பை y-ன் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்பில் கணக்கிடப்படுகிறது.

இது போன்றே $h(y \mid x = b) = \frac{f(x, y)}{\Sigma f(x, y)} \mid x=b$

$$= \frac{f(x, y)}{f(x)} \mid x=b \qquad f(b) \neq 0$$

இவ்வரையறைகளைப் பொது முறையாக்கலாம்.

$f(x_1, x_2, \dots x_k)$ என்பது $x_1, x_2 \dots\dots x_k$-ன் இணைந்த நிகழ்தகவுப்பரவலானால் நிபந்தனைக்குட்பட்ட பல்வேறு சார்புகளைக் கீழே காணலாம்.

$$f(x_1 \mid x_2, x_3 \dots x_k) = \frac{f(x_1, x_2 \dots x_k)}{f(x_2, x_3 \dots x_k)} \qquad f(x_2, x_3 \dots x_k) \neq 0$$

எனும்போது

$$f(x_1 x_2 \mid x_3, x_4, \dots x_k) = \frac{f(x_1 x_2 \dots x_k)}{f(x_3, x_4 \dots x_k)}$$

இங்கு $f(x_3 x_4 \dots x_k) \neq 0$

எடுத்துக்காட்டு

கீழ்க்கண்ட பரவலுக்கு $y=2$ என்ற நிலையில் x-ன் நிபந்தனைப் பரவலையும் $x=0$ என்ற நிலையில் y-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட பரவலையும் காண்க.

$f(-1, 0) = \frac{1}{15} \qquad f(-1, 1) = \frac{3}{15} \qquad f(-1, 2) = \frac{1}{5}$

$f(0, 0) = \frac{2}{15} \qquad f(0, 1) = \frac{2}{15} \qquad f(0, 2) = \frac{12}{15}$

$f(1, 0) = \frac{1}{15} \qquad f(1, 1) = \frac{1}{15} \qquad f(1, 2) = \frac{12}{5}$

வேறு x, y மதிப்புகளில் $f(x, y) = 0$

$y = 2$ எனும்போது x-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட

பரவல் $f(x \mid y = 2) = \frac{f(x, y)}{h(y)} \mid y = 2$

$y = 2$ எனும்போது y-ன் விளிம்பு பரவல் $h(y) = \frac{5}{15}$

$$\therefore \quad f(x \mid y=0) = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{5}{15}} = \frac{2}{5} \qquad x = -1 \text{ என்னும்போது}$$

$$= \frac{\frac{1}{15}}{\frac{5}{15}} = \frac{1}{5} \qquad x=0 \text{ என்னும்போது}$$

$$\frac{\frac{2}{15}}{\frac{5}{15}} = \frac{2}{5} \qquad x = 1 \text{ என்னும்போது}$$

$$= 0 \text{ மற்றெங்கும்}$$

$x = 0$ என்னும்போது y-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட

பரவல் $f(y \mid x=0) = \frac{f(x, y)}{f(x)} \mid x=0$

$x = 0$ என்னும்போது x-ன் விளிம்பு பரவல் $f(x) = \frac{5}{15}$

$$\therefore \quad f(y \mid x=0) = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{5}{15}} = \frac{2}{5} \qquad y = 0 \text{ என்னும்போது}$$

$$= \frac{2}{5} \qquad y = 1 \text{ என்னும்போது}$$

$$= \frac{\frac{1}{15}}{\frac{5}{15}} = \frac{1}{5} \qquad y = 2 \text{ என்னும்போது}$$

$$= 0 \text{ மற்றெங்கும்}$$

எனவே $y = 2$ என்னும்போது x-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட பரவல்,

$$j(x/y=2) = \frac{2}{5} \qquad x = -1 \text{ என்னும்போது}$$

$= \frac{1}{5}$ $x = 0$ என்னும்போது

$= \frac{2}{5}$ $x = 1$ என்னும்போது

$= 0$ மற்றெங்கும்

$x = 0$ என்னும்போது y-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட பரவல்

$f(y/x = 0) = \frac{2}{5}$ $y = 0$ என்னும்போது

$= \frac{2}{5}$ $y = 1$ என்னும்போது

$= \frac{1}{5}$ $y = 2$ என்னும்போது

$= 0$ மற்றெங்கிலும்.

எ.கா. x, y-ன் கூட்டு நிகழ்தகவுப் பரவல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. அதிலிருந்து x, y ன் விளிம்பு பரவல்களையும் காண்க. $y=1$ என்னும்போது x-ன் நிபந்தனைப் பரவலையும் காண்க. $x=2$ என்னும்போது y-ன் நிபந்தனைப்பரவலையும் காண்க.

X/Y	1	2	3	4
1	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{46}$
4	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{36}$

y-ன் விளிம்பு பரவல் $h(y) = \sum_{x} f(x, y)$

$$= \frac{10}{36} \; y = 1$$

$$= \frac{9}{36}, y = 2$$

$$= \frac{8}{36} \cdot y = 3$$

$$= \frac{9}{36}, y = 4.$$

x-ன் விளிம்பு பரவல் $f(x) = \sum_y f(x, y) = \frac{12}{36} \quad ; x = 1$

$$= \frac{7}{36} \quad , x = 2$$

$$= \frac{8}{36}, x = 3$$

$$= \frac{9}{36}, x = 4$$

x-ன் நிபந்தனைப்பரவல் $= \frac{f(x, y)}{h(y)} \mid y = 1$

$$= \frac{\frac{4}{36}}{\frac{12}{36}} = \frac{4}{12}, \quad x = 1$$

$$= \frac{\frac{2}{36}}{\frac{9}{36}} = \frac{2}{9} \quad , \quad x = 2$$

$$= \frac{\frac{5}{36}}{\frac{8}{35}} = \frac{5}{8} \quad , \quad x = 3$$

$$= \frac{\frac{1}{36}}{\frac{9}{39}} = \frac{1}{9} \quad , \quad x = 4$$

$$y \text{ ன் நிபந்தனைப் பரவல்} = \frac{f(x, y)}{f(x)} \mid x = 2$$

$$= \frac{\frac{2}{36}}{\frac{12}{36}} = \frac{2}{12} \quad y = 1$$

$$= \frac{\frac{3}{36}}{\frac{9}{36}} = \frac{3}{9} \quad y = 2$$

$$= \frac{\frac{1}{36}}{\frac{8}{36}} = \frac{1}{8} \quad y = 3$$

$$= \frac{\frac{1}{36}}{\frac{9}{36}} = \frac{1}{9} \quad y = 4$$

நிபந்தனைக்குட்பட்ட எதிர் பார்த்தல்

$y = a$ என்னும்போது x-ன் நிபந்தனையோடு கூடிய எதிர் பார்த்தல் என்பது $y = a$-ல் x-ன் நிபந்தனைப் பரவலின் x-ன் எதிர் பார்த்தல் ஆகும். இதனை $E(x \mid y)$ எனக் குறிக்கிறோம்.

எனவே X, Y தொடர் மாறிகளானால்

$$E(x \mid y=a) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x \mid y=a)\, dx$$

$x = b$ என்னும்போது y-ன் எதிர் பார்த்தல்

$$E(y \mid x=b) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y \mid x=b)\, dy$$

x, y தனித்த மாறிகளானால்

$$E(x \mid y=a) = \Sigma \; x f(x \mid y=a)$$

$$E(y \mid x=b) = \Sigma \; y f(y \mid x=b)$$

பொதுவாக $\varphi(x)$ என்பது x-ன் ஒரு சார்பானுல் அதன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட எதிர் பார்த்தல்

$$E[\varphi(x) \mid y] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x \mid y)\, dx$$ ஆகும்.

இங்கு x, y தொடர் மாறிகள்

$= \Sigma\, \varphi(x) f(x \mid y)$ இங்கு x, y தனித்த மாறிகள்

எடுத்துக் காட்டு

X, Y என்னும் இரு சமவாய்ப்பு மாறிகளின் கூட்டு நிகழ்தகவுப் பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. (i) $E[x \mid y=1]$

(ii) $V(x \mid y=1)$ இவற்றைக் காண்க.

Y \ X	−1	0	1	மொத்தம்
−1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	0	0	0	0
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
மொத்தம்	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

$$E(x/y=1) = \Sigma\, x f(x/y=1)$$

$$f(x/y=1) = \frac{0}{\frac{2}{3}} \qquad x = 1 \text{ என்னும்போது}$$

$$= 0$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \quad x = 0 \text{ என்னும்போது}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \quad x = 1 \text{ என்னும்போது}$$

$$\therefore \; f\,(x/y = 1) = 0 \qquad x - = 1 \text{ என்னும்போது}$$

$$= \frac{1}{2} \qquad x = 0 \text{ என்னும்போது}$$

$$= \frac{1}{2} \qquad x = 1 \text{ என்னும்போது}$$

$$= 0 \qquad \text{மற்றெங்கும்}$$

$$\therefore \; E\,[x/y = 1] = -1 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$V\,[x/y = 1] = E\,(x/y - 1)^2 - [E\,(x/y = 1)\,]^2$$

$$E\,(x/y = 1)^2 = \Sigma\, x^2\, f\,(x/y = 1)$$

$$= (-1)^2\, 0 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$[E\,(x/y = 1)\,]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \; V\,(x/y = 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$f\,(x/y) = 3x^2 - 8xy + 5y^2 \qquad \begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{array}$$

$$= 0 \text{ மற்றெங்கிலும்.}$$

$f\,(x/y)$, $h\,(y/x)$ இவற்றைக்காண்க.

X, Y சார்பற்றவையல்ல என நிறுவுக.

$$f(x, y) = 3x^2 - 8xy + 6y^2$$

$$f(x) = \int_0^1 (3x^2 - 8xy + 6y^2)\, dy$$

$$= 3x^2 \Big[y \Big]_0^1 - 8x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 + 6 \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1$$

$$= 3x^2 - 4x + 2 \qquad 0 < x < 1$$

$= 0$ மற்றெங்கிலும்.

$$h(y) = \int_0^1 (3x^2 - 8xy + 6y^2)\, ax$$

$$= 3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 - 8y \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + 6y^2 \Big[x \Big]_0^1$$

$$= 1 - 4y + 6y^2 \qquad 0 < y < 1$$

$$h(y) = 1 - 4y + 6y^2 \qquad 0 < y < 1$$

$= 0$ மற்றெங்கிலும்.

$$f(x/y) = \frac{f(\ , y)}{h(y)} / y$$

$$= \frac{3x^2 - 8xy + 6y^2}{6y^2 - 4y + 1} \qquad 0 < x < 1$$

$= 0$ மற்றெங்கும்

$$h(y/x) = \frac{f(x, y)}{f(\ )} / x$$

$$= \frac{3x^2 - 8xy + 6y^2}{3x^2 - 4x + 2} \qquad 0 < y < 1$$

$= 0$ மற்றெங்கும்.

X, Y சார்பற்றவையெனில்,

$$E(x\,y) = E(x)\,E(y).$$

$$E(x\,y) = \int \int f(x, y)\, xy\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 xy\,(3x^2 - 8xy + 6y^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left\{ 3y \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 - 8y^2 \left[\frac{X^3}{3}\right]_0^1 + 6y^3 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \right\} dy.$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{4}y - \frac{8}{3}y^2 + 3y^3\right) dy.$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{8}{9} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{17}{72}$$

$$E(x) = \int_0^1 f(x)\, x\, dx$$

$$= \int_0^1 (3x^2 - 4x + 2)\, x\, dx$$

$$= \left[3\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{5}{12}.$$

$$E(y) = \int_0^1 y f(y)\, dy$$

$$= \int_0^1 y(6y^2 - 4y + 1)\, dy$$

$$= \left[6\frac{y^4}{4} - 4\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$E(x) \cdot E(y) = \frac{5}{12} \cdot \frac{2}{3}.$$

$$= \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

ஆனல் $E(xy) = \frac{17}{72}$

$\therefore \quad E(x\, y) \neq E(x) \cdot E(y).$

$\therefore \quad X, Y$ சார்பற்றவையல்ல.

எ.கா. கீழ்க்காணும் பரவல் X_1, X_2 என்னும் இரு மாறிகளின் கூட்டு நிகழ்தகவு பரவலானல் k-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$f(x_1, x_2) = k\, e^{-3x_1 - 4x_2} \qquad x_1, x_2 > 0$$

$$= 0 \quad \text{மற்றெங்கிலும்.}$$

மேலும் x_1 0 லிருந்து 1-க்கு இடையிலும் x_2, 0-லிருந்து 2-க்கு இடையிலும் மதிப்புகளை ஏற்கும் போது நிகழ்தகவைக் காண்க.

$f(x_1\, x_2)$ ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு எனில்,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1\, x_2)\, dx_1\, dx_2 = 1.$$

இங்கு $x_1 > 0$; $x_2 > 0$

எனவே $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} ke^{-3x_1-4x_2}\, dx_1\, dx_2 = 1$

(அ-து) $\int_0^{\infty} ke^{-4x_2}\int_0^{\infty} e^{3x_1}\, dx_1\, dx_2 = 1$

(அ-து) $\int_0^{+\infty} ke^{-4x_2}\left[\frac{e^{-3x_1}}{-3}\right]_0^{\infty} dx_2 = 1$

$$\int_0^{\infty} \frac{k}{3}\, e^{-4x_2}\, dx_2 = 1$$

$$\frac{k}{3}\left[\frac{e^{-4x_2}}{-4}\right]_0^{\infty} = 1$$

$$\frac{k}{12} = 1$$

$$\therefore\ k = 12.$$

$$P[0 < x_1 < 1;\ 0 < x_2 < 2] = \int_0^{2}\int_0^{1} f(x_1 x_2)\, dx_1\, dx_2$$

$$= \int_0^{2}\int_0^{1} 12\, e^{-3x_1-4x_2}\, dx_1\, dx_2$$

$$= \int_0^{2} 12\, e^{-4x_2}\left[\frac{e^{-3x_1}}{-3}\right]_0^{1} dx_2$$

$$= \int_0^{2} -4\, e^{-4x_2}\,[e^{-3} - 1]\, dx_2$$

$$= -4\,(e^{-3}-1)\int_0^2 e^{-4x_2}\,dx_2$$

$$= -4\,(c^{-3}-1)\left[\frac{e^{-4x_2}}{-4}\right]_0^2 dx_2$$

$$= (e^{-8}-1)\,(e^{-3}-1)$$

$$= e^{-11} - e^{-8} - e^{-3} + 1$$

கீழ்க்காணும் மாறிகள் சார்பற்றனவையா என ஆராய்க.

$$f(x_1\,x_2) = 8\,x_1\,x_2 \qquad 0 \le x_1 \le 1;\;\; 0 \le x_2 \le 1$$
$$= 0 \text{ மற்றெங்கும்.}$$

$$x\text{-ன் விளிம்புச் சார்பு } f(x_1) = \int_0^1 f(x_1\,x_2)\;\; x_2$$

$$= \int_0^1 8\,x_1\,x_2\,dx_2$$

$$= 8\,x_1\left[\frac{x_2^{\,2}}{2}\right]_0^1$$

$$= 4\,x_1$$

$$f(x_1) = 4x_1 \qquad 0 \le x_1 \le 1$$
$$= 0 \text{ மற்றெங்கும்.}$$

$$x_2\text{-ன் விளிம்புச் சார்பு } h\,(x_2) = \int_0^1 8\,x_1\,x_2\,dx_1$$

$$= 4x_2 \qquad 0 \le x_2 \le 1$$
$$= 0 \text{ மற்றெங்கும்.}$$

$$f(x_1)\,f(x_2) = 16\,x_1\,x_2$$
$$f(x_1\,x_2) = 8\,x_1\,x_2$$

∴ மாறிகள் சார்பற்றவையல்ல.

எ.கா. கீழ்க்கண்ட அட்டவணை ஒரு இருமாறி முழுமைத் தொகுதியைக் குறிக்கிறது.

Y \ X	—3	−2	—1	0	1	2	3
—3	5	3					
—2	1	4	6	2			
—1		3	4	10	4		
0		1	3	7	5	1	
1			2	5	5	2	1
2			1	7	6		
3			3	5	4		

பின்வரும் நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிடுக.

(i) $P(x > 0)$ (ii) $P(x = y)$ (iii) $P(x > y)$ (iv) $P(x = 1$ (v) $P(y > 0,\ x = 1)$

(i) $P(x > 0) = P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3)$

$$= \frac{4}{100} + \frac{5}{100} + \frac{5}{100} + \frac{6}{100} + \frac{4}{100} + \frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{1}{100}$$

$$= \frac{4+5+5+6+4+1+2+1}{100} = \frac{28}{100}$$

$$= \cdot 28$$

(ii) $P(x = y) = P(x = -3, y = -3) + P(x = -2,$
$y = -2) + P(x = -1, y = -1) + P(x = 0, y = 0)$
$+ P(x = 1, y = 1) + P(x = 2, y = 2)$
$+ P(x = 3, y = 3)$

$$= \frac{5}{100} + \frac{4}{100} + \frac{4}{100} + \frac{7}{100} + \frac{5}{100} +$$

$$= \frac{5 + 4 + 4 + 7 + 5}{100} = \frac{25}{100} = \cdot 25$$

(iii) $P(x > y) = P(x = -3, y = -2) + P(x = -1,$
$y = -2) + P(x = 0, y = -2) + P(x = 0, y = -1)$
$+ P(x = 1, y = -1) + P(x = 1, y = 0) + P(x = 2,$
$y = 0) + P(x = 2, y = 1) + P(x = 3, y = 1)$

$$= \frac{3}{100} + \frac{6}{100} + \frac{2}{100} + \frac{10}{100} + \frac{4}{100} + \frac{5}{100}$$

$$+ \frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{1}{100} = \frac{34}{100} = \cdot 34$$

(iv) $P(x = 1) = P(x = 1, y = -1) + P(x = 1, y = 0)$
$+ P(x = 1, y = 1) + P(x = 1, y = 2) + P(x = 1; y = 3)$

$$= \frac{4}{100} + \frac{5}{100} + \frac{5}{100} + \frac{6}{100} + \frac{4}{100}$$

$$= \frac{4 + 5 + 5 + 6 + 4}{100} = \frac{24}{100} = 24$$

(v) $P(y > 0, x = 1) = P(y = 1, x = 1) + P(y = 2,$
$x = 1) + P(y = 3, x = 1)$

$P(y > 0, x = 1)$
$= P(y = 1, x = 1) + P(y = 2, x = 1)$
$+ P(y = 3, x = 1)$

$$= \frac{5}{100} + \frac{6}{100} + \frac{4}{100} = \cdot 15$$

இருசமவாய்ப்பு மாறிகளின் சார்பற்றதன்மை (Independence of two stochastic variates)

x, y இருசார்ந்த சமவாய்ப்பு மாறிகளாயின் அவற்றின் கூட்டுப்பரவல் $f(x, y) = g(x) f(y/x) = h(y) f(x/y)$ ஆகும்.

x, y என்ற இருசமவாய்ப்பு மாறிகள் சார்பற்றவையாயின், அவற்றின் நிபந்தனைக்குட்பட்ட பரவல்கள் முறையே x, y இவற்றின் விளிம்புப் பரவல்களாகின்றன. அதாவது x, y சார்பற்றவையாயின்,

$$f(y/x) = h(y)\,;\; f(x/y) = g(x)$$

$$\therefore\quad f(x, y) = g(x)\, h(y)$$

எனவே x, y இருசார்பற்ற மாறிகளாயின், அவற்றின் கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு, அவற்றின் விளிம்புப் பரவல்களின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமமாகும்.

எ.கா. x, y என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் கூட்டு நிகழ்தகவு சார்பு,

$$f(x, y) = \left\{\frac{1}{4}[1 + xy(x^2 - y^2)]\ |x| \le 1,\ y \le 1\right\}$$

$= 0$ மற்றெங்கிலும் எனில் x, y சார்பற்றவையா?

விளிம்புப்பரவல்

$$f_1(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}[1 + xy(x^2 - y^2)]\cdot dy$$

$$= \frac{1}{4}\left[y + \frac{x^3y^2}{2} - \frac{xy^4}{4}\right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{2}$$

$$f_2(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}[1 + xy(x^2 - y^2)]\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[x + \frac{x^4 y}{4} - \frac{x^3 y^3}{2}\right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \ f(x, y) \neq f_1(x) \cdot f_2(y) \quad \left[\because \ f_1(x) \cdot f_2(y) = \frac{1}{4}\right]$$

$\therefore$ x, y சார்பற்றவை அல்ல.

எ.கா. x_1, x_2 என்ற இரு சமவாய்ப்பு மாறிகளின் கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு

$$f(x_1, x_2) = \frac{2}{3}(x_1 + 2x_2) \quad [0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1$$

எனும்போது]

$= 0$ மற்றெங்கிலும், எனில்

$x_2 = \frac{1}{2}$ எனத் தரப்பட்டிருக்கும்போது, x_1, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ என்ற இடைவெளியில் ஒரு மதிப்பை ஏற்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

$$f_2(x_2) = \int_0^1 \frac{2}{3}(x_1 + 2x_2)\, dx_1 = \frac{1}{3}(1+4x_2) \quad 0 \quad x_2 > 1$$

எனும்போது

$= 0$ மற்றெங்கிலும் ;

$$\therefore \ f(x_1/x_2) = \frac{\frac{2}{3}(x_1 + 2x_2)}{\frac{1}{3}(1 + 4x_2)} = \frac{2x_1 + 4x_2}{1 + 4x_2} \quad 0 < x_1 < 1$$

எனும்போது

$= 0$ (மற்றெங்கிலும்)

x_2, $\frac{1}{2}$ என்ற மதிப்பை ஏற்கும்போது, x_1 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ என்ற இடைவெளியில் மதிப்பை ஏற்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x_1/x_2)\, dx,\ x_2 = \frac{1}{2} \text{ எனும்போது}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x_1 + 2}{1 + 2}\, dx_1 = \frac{5}{12}.$$

எ.கா. x, y எனும் இரு சமவாய்ப்பு மாறிகள் 1, 2 3 எனும் மதிப்புகளைப், பின்வரும் நிகழ்தகவுகளுடன் பெறுகின்றன. (i) $E(x+y)$, $E(xy)$, $V(x)$, $V(y)$, cov (x, y) இவற்றைக் காண்க. (ii) x, y இவை சார்பற்றவையா எனக் காட்டுக.

y \ x	1	2	3
1	0·1	0·1	0·1
2	0·1	0·2	0·1
3	0·1	0·1	0·1

$P(x=1) = \cdot 3,\ P(x=2) = \cdot 4,\ P(x=3) = \cdot 3,$

$P(y=1) = \cdot 3;\ P(y=2) = \cdot 4,\ P(y=3) = \cdot 3$

$\therefore\ E(x) = 1(\cdot 3)+2(\cdot 4)+3(\cdot 3) = \cdot 3+8+\cdot 9 = 2$

$E(y) = 1(\cdot 3)+2(4)+3(3) = 2$

$E(x+y) = E(x) + E(y) = 2 + 2 = 4$

$E(xy) = (1)(1)(\cdot 1) + (1)(2)(1)$

$+ (1)(3)(\cdot 1) + 2(1)(\cdot 1) + 2(2)(2) + 2(3)(1)$

$+ 3(1)(\cdot 1) + 3(2)(\cdot 1) + 3(3)(\cdot 1)$

$= 4\ 0$

$$E(xy) = E(x) \cdot E(y)$$

$\therefore$ x, y இவை சார்பற்றவை

$$V(\cdot) = E(x^2) - [E(\ )]^2$$

$$E(x^2) = 1 \cdot P(x^2=1) + 4\,P(x^2=4) + 9\,P(x^2=9)$$

$$= 1 \cdot P(x=1) + 4\,P(x=2) + 9\,P(x=3)$$

$$= \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 7 = 4\,6$$

$$\therefore\ V(x) = 4 \cdot 6 - 4 = \cdot 6$$

$$V(y) = E(y^2) - [E(y)]^2$$

$$= 1(\cdot 3) + 4(\cdot 4) + 9(\ 3)$$

$$= \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 2\,7$$

$$= 4 \cdot 6$$

$$\therefore\ V(y) = 4 \cdot 6 - 4 = \cdot 6$$

$$\text{cov}(x, y) = E(xy) - E(x)(E\,y) = 0$$

எ,கா. X, Y என்ற இரு சமவாய்ப்பு மாறிகளின் கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x, y) = k(x^2 + y^2)$

$$0 < x < 3,\ 1 < y < 6$$

$$= 0 \quad \text{மற்றெங்கிலும்}$$

எனத் தரப்பட்டுள்ளது. (1) k-யின் மதிப்பைக் காண்க. (2) $P(1 < x < 2,\ 2 < y < 4)$ காண்க. (3) $P(x + y > 5)$ காண்க.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(x^2 + y^2)\,dx\,dy = 1.$$

$$\int_{0}^{3} \int_{1}^{6} k(x^2 + y^2)\,dx\,dy = 1.$$

$$\int_{0}^{3} \int_{1}^{6} k\,x^2\,dx\,dy + \int_{5}^{3} \int_{1}^{6} k\,y^2\,dx\,dy.$$

$$\int_0^3 k\, x^2 (y)^6 \; dx + \int_1^6 k y^2 (x)^3{}_0 \; dy = 1$$

$$\int_0^3 5\, k\, x^2 \, dx + \int_1^6 3\, k\, y^2 \, dy = 1$$

$$5\, k \cdot \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^3 + 3k \left(\frac{y^3}{3}\right)_1^6 = 1$$

$$5\, k \cdot 9 + 3\,(72)\, k - k = 1$$

$$45\, k + 215\, k = 1$$

$$260\, k = 1 \qquad \therefore \; k = \frac{1}{260}$$

(2) $$\int_1^2 \int_2^4 \frac{1}{260} x^2 \, dx\, dy + \int_1^2 \int_2^4 \frac{1}{260}\, y^2 \, dx\, dy:$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{260}\, x^2 \cdot (y)^4{}_2 \, dx + \int_2^4 \frac{1}{260}\, y^2 \cdot (x)^2{}_1 \; dy.$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{130}\, X^2 \, dx + \int_2^4 \frac{1}{260}\, y^2 \, dy$$

$$= \left[\frac{1}{130} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_1^2 + \left[\frac{1}{260} \cdot \frac{7^3}{3}\right]_2^4$$

$$= \frac{8}{390} - \frac{1}{399} + \frac{64}{780} - \frac{8}{780} = \cdot \frac{1}{780} [16 - 2 + 64 - 8]$$

$$= \frac{70}{780} = \frac{7}{78}$$

(3) $x + y > 5$. $\therefore$ x, 0-க்கும் 3-க்கும் இடையில் இருக்கும் போது y 5-க்கும் 6-க்கும் இடையில் அமையும்.

$$\int_0^3 \int_5^6 \frac{1}{260}(x^2 + y^2)\, dx \cdot dy.$$

$$= \int_0^3 \frac{1}{260} x^2 (y)_5^6 \, dx + \frac{1}{260} \cdot \int_5^6 y^2 (x)_0^3 \, dy.$$

$$= \frac{1}{260}\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^3 + \frac{1}{260} \cdot 3 \cdot \left(\frac{y^3}{3}\right)_5^6$$

$$= \frac{27}{260\,3} + \frac{1}{260} \cdot 3\left(\frac{216}{3} - \frac{125}{3}\right). = \frac{9}{260} + \frac{91}{260}$$

$$= \frac{100}{260} = \frac{5}{13}$$

எ.கா. (x, y)-ன் கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு பின் வருமாறு:

$$f(x, y) = \frac{k}{(1 + x + y)^3}, \quad x > 0, \quad y > 0$$

$$= 0 \text{ மற்றெங்கிலும்.}$$

(a) k-ன் மதிப்பையும் x, y-க்கான விளிம்பு நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பையும் காண்க.

(b) $Y = y$ என் இருக்கும் போது x-க்கான நிபந்தனைக்கு உட்பட்ட நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை காண்க.

(c) $P(x < 5, \; 1 < y < 2)$-வையும் காண்க.

$f(x)$ என்ற நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பானல்,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1.$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{k}{(1+x+y)^3}\, dx\, dy = 1$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty k\,(1+x+y)^{-3}\, dx\, dy = 1$$

$$\int_0^\infty -\frac{1}{2} \cdot k\,(1+x+y)^{-2}\, dy = 1$$

$$\int_0^\infty \frac{k}{2}\,(1+y)^{-2}\, dy = 1$$

$$\left[\frac{k}{-2\,(1+y)}\right]_0^\infty = 1$$

$$\therefore\ k = 2$$

X-ன் விளிம்பு நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு,

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{2}{(1+x+y)^3}\, dy.$$

$$= 2 \int_0^\infty (1+x+y)^{-3}\, dy$$

$$= \frac{1}{(1+x)^2}\quad x > 0$$

$= 0$ மற்றெங்கிலும்.

y-ன் விளிம்பு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு,

$$h(y) = \int_0^{\infty} \frac{2}{(1 + x + y)^3}\, dx.$$

$$= \int_0^{\infty} 2(1 + x + y)^{-3}\, dx.$$

$$= \frac{1}{(1 + y)^2}\; y > 0.$$

$= 0$ மற்றெங்கிலும்.

$Y = y$ என இருக்கும்போது நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு,

$$f(x/Y = y) = \frac{f(x, y)}{h(y)}$$

$$= \frac{2(1 + y)^2}{(1 + x + y)^3}\; x < 0$$

$= 0$ மற்றெங்கிலும்.

$P(x < 5,\ 1 < y < 2)$

$$= \int_1^2 \int_0^5 \frac{2}{(1 + x + y)^3}\, dx\, dy.$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{-1}{(1 + x + y)^2}\right]_0^5 dy$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{1}{(1 + y)^2} = \frac{1}{(6 + y)^2}\right] dy$$

$$= \left[-\frac{1}{1+y} + \frac{1}{6+y}\right]_1^2 = \frac{25}{168}$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{25} = \frac{117}{1000}$$

(iii) $P\left(x \le \frac{1}{2} \Big/ \frac{1}{5} \le x \le \frac{2}{5}\right)$

$$= \frac{P\left(\frac{1}{5} \le x \le \frac{1}{2}\right)}{P\left(\frac{1}{5} \le x \le \frac{1}{5}\right)}$$

$$= \frac{\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} 3x^2\, dx}{\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{2}{5}} 3x^2\, dx} = \frac{[x^3]_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}}}{[x^3]_{\frac{1}{5}}^{\frac{2}{5}}} = \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{125}}{\frac{8}{125} - \frac{1}{125}}$$

$$= \frac{\frac{117}{1000}}{\frac{7}{125}} = \frac{117}{7 \times 8} = \frac{117}{56}$$

எ.கா. ஒரு நல்ல நாணயம் 4 முறைகள் வீசப்படுகிறது. X தலைகளின் எண்ணிக்கையும், Y தலைகள் தொடர்ந்து கிடைப்பதையும் குறிக்கிறது. (1) X, Y-க்கான கூட்டு நிகழ்தகவுப் பரவலைக் காண்க. (2) cov (XY) காண்க.

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	மொத்தம்
0	$\frac{1}{16}$	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$
1	0	$\frac{4}{16}$	0	0	0	$\frac{4}{16}$
2	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	0	0	$\frac{6}{16}$
3	0	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{4}{16}$
4	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
மொத்தம்	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

x, y-ன் இணைத்த பரவல்

$$f(0,0) = \frac{1}{16};\ f(0,1) = f(0,2) = f(0,3) = f(0,4) = 0$$

$$f(1,0) = f(1,2) = f(1,3) = f(1,4) = 0;\ f(1,1) = \frac{4}{16}$$

$$f(2,0) = f(2,3) = f(2,4) = 0;\ f(2,1) = f(2,2) = \frac{3}{16}$$

$$f(3,0) = f(3,1) = f(3,4) = 0;\ f(3,2) = f(3,3) = \frac{2}{16}$$

$$f(4,0) = f(4,1) = f(4,2) = f(4,3) = 0;\ f(4,4) = \frac{1}{16}$$

$$\text{cov}(x, y) = E(xy) - E(x) \cdot E(y)$$

$$E(xy) = 1\,(1)\left(\frac{4}{16}\right) + 2\,(1)\,\frac{3}{16} + 3\,(2)\,\frac{3}{16} + 3\,(2)\,\frac{2}{16}$$

$$+ 3\,(3)\,\frac{2}{16} + 4\,(4)\,\frac{1}{16}$$

$$= \frac{4}{16} + \frac{6}{16} + \frac{12}{16} + \frac{12}{16} + \frac{18}{16} + \frac{16}{16} + \frac{68}{16} = 4{\cdot}25$$

$$E(x) = 0\,\frac{1}{16} + 1\cdot\frac{4}{16} + 2\cdot\frac{6}{16} + 3\cdot\frac{4}{16} + 4\cdot\frac{1}{16}$$

$$= \frac{32}{16} = 2$$

$$E(y) = 0\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\frac{7}{16} + 2\cdot\frac{5}{16} + 3\cdot\frac{2}{16} + 4\cdot\frac{1}{16}$$

$$- \frac{27}{16} = 1\ 6875$$

$$\therefore \quad \text{cov}\,(xy) = 4.25 - 3{\cdot}375$$

$$\text{eov}\,(xy) = {\cdot}875.$$

எ.கா. தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $(P.\ d.\ f.)$

$$f(x) = 3x^2 \qquad 0 < x < 1$$

$$= 0 \text{ மற்றெங்கிலும்.}$$

கொடுக்கப்பட்ட சார்பு ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு என்பதை நிறுவிப் பின்வரும் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(i) $P\left(x \le \frac{1}{5}\right)$

(ii) $P\left(\frac{1}{5} \le x \le \frac{1}{2}\right)$

(iii) $P\left(x < \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{5} \leq x \leq \right)$

X-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $f(x) \geq 0$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{1} 3x^2\, dx$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சார்பு ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு ஆகும்.

(i) $P\left(x \leq \frac{1}{5}\right)$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{1}{5}} f(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{5}} 3x^2\, dx$$ [∵ மற்றெங்கிலும் சார்பின் மதிப்பு 0]

$$= \left[3\ \frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{5}}$$

$$= [x^3]_0^{\frac{1}{5}}$$

$$= \frac{1}{125}$$

(ii) $P\left(\frac{1}{5} \le x \le \frac{1}{2}\right)$

$$= \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$$

$$= \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} 3x^2\,dx$$

$$= [x^3]_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}}$$

எ.கா. x, y என்னும் இருமாறி பரவலின் கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x, y) = k < x(x - y) \quad 0 < x < 2;\ x < y < x.$$

$$= 0 \text{ மற்றெங்கிலும்.}$$

k-யின் மதிப்பையும் x-க்கான விளிம்பு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பையும் பெறுக. (x, y)-க்கான கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x, y)$ ஆதலால்,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx \cdot dy = 1$$

$$\int_{0}^{2}\left[\int_{-x}^{x} kx(x - y)\,dy\right] dx = 1$$

$$= k\int_{0}^{2} x \cdot \left[\frac{(x-y)^2}{-2}\right]_{-x}^{x} dx = 1$$

$$= k \int_0^2 2x^3 \, dx = 1$$

$$= k \left[\frac{x^4}{2}\right]_0^2 = 1$$

$$\therefore \quad k = \frac{1}{8}$$

x-ன் விளிம்பு நிகழ்தகவுச் சார்பு, $g(x) = \int_{-x}^{x} \frac{1}{8} x (x - y) \, dy$

$$= \frac{x}{8} \left[\frac{(x-4)^2}{2}\right]_{-x}^{x}$$

$$= \frac{x}{8} \cdot 4 \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{4} \qquad 0 < x < 2$$

எ.கா. X, $N(0, 1)$, Y, $N(0, 1)$ என்பவை சார்பற்ற சமவாய்ப்பு மாறிகள். $X + Y$, $X - Y$-ஐச் சார்ந்திராது என நிறுவுக.

தீர்வு :

X, Y சார்பற்ற திட்ட இயல்நிலை மாறிகளாதலால், அவற்றின் கூட்டுப்பரவல்

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}} \quad (-\infty < (x, y) < \infty)$$

$u = x + y$, $v = x - y$ என்க.

$$\therefore \quad x = \frac{1}{2}(u + v) \; ; \; y = \frac{1}{2}(u - v)$$

$$\text{ஜாகோபியன் } J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

எனவே, u, v-ன் கூட்டு நிகழ்தகவுப் பரவல்,

$$g(u, v) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(u^2 + v^2)} \mid J \mid$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 2\pi} e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{v^2}{2}}$$

$$= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{(2\sqrt{2})^2}} \right.$$

$$\left. \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}(\sqrt{2})^2} \right\}$$

$$= g_1(u) \cdot g_2(v), -\infty < u, v > \infty$$

$$g_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2(\sqrt{2})^2}}$$

$$g_2(v) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2(\sqrt{2})^2}}$$ என்பவை u, v இவற்றின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்புகளாகும்.

U, V-ன்கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு, அவற்றின் தனித்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்புகளின் பெருக்குத்தொகைக்குச் சமமாதலால்,

$U \sim N(0, 2)$, $V \sim N(0, 2)$ சார்பற்று பரவியுள்ளன.

எ.கா. பின்வரும் நிகழ்தகவுப் பரவலுக்கு $f(1, 1) = \frac{1}{8}$, $f(2, 1) = \frac{3}{8}$, $f(1, 2) = \frac{2}{8}$ $f(2, 2) = \frac{2}{8}$ மற்றெங்கிலும் $f(x, y) = 0$

(*a*) $F(0, 2)$; (*b*) $F(1, 3)$ (*c*) $F(3, 5)$ இவற்றைக் காண்க.

$$(a)\quad F(0,2) = \sum_{-\infty < x \leq 0} \; \sum_{-\infty < y \leq 2} f(x, y) = 0$$

$x = 1, 2,\ y = 1, 2$ இவற்றைத்தவிர மற்றெல்லாவற்றிற்கும் $F(x, y) = 0$.

$$(b)\quad F(1; 3) = \sum_{-\infty < x < 1} \; \sum_{-\infty < y \leq 3} f(x, y)$$

$$= f(1, 1) + f(1, 2) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$$

$$(c)\quad F(3, 5) = \sum_{-\infty < x \leq 3} \; \sum_{-\infty < y \leq 5} f(x, y)$$

$$= f(1, 1) + f(1, 2) + f(2, 1) + f(2, 2)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{2}{8}$$

$$= \frac{1 + 2 + 3 + 2}{8} = \frac{8}{8} = 1.$$

எ.கா. X, Y என்ற இருசார்பற்ற சமவாய்ப்பு மாறிகள்.

$f(x) = e^{-x},\quad x \geq 0,\quad g(y) = 3\, e^{-3y},\quad y \geq 0$ எனக் கொண்டுள்ளன.

$Z = \dfrac{X}{Y}$ ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பைக் காண்க.

$U = Y$ எனின், $X = YZ = UZ.$

$$Y = U.$$

$$\therefore\quad \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (z, u)} \right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = u$$

$$\therefore \quad k(z, u) = f(x)\, g(y) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(z, u)} \right| = e^{-uz} \cdot 3\, e^{-8w_x}\, w$$

$$\therefore \quad p(z) = 3 \int_0^{\infty} e^{-u(z+3)}\, u\, du, \; u = y > 0.$$

$$p(z) = 3 \int_0^{\infty} u\, d\left[\frac{-e^{-u(z+3)}}{z+3}\right]$$

$$= 3 \left\{ \frac{-u \cdot e^{-u(2+3)}}{z+3} + \int \frac{e^{-u(2+3)}}{z+3}\, du \right\}_0^{\infty}$$

$= \dfrac{-u \cdot e^{-u(2+3)}}{z+3}$ இரு எல்லைகளிலும் பூஜ்ய மாகிறது.

$$\therefore \quad p(z) = \frac{3}{z+3} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u(z+3)}}{z+3}\, du$$

$$= \frac{3}{z+3} \left\{ \frac{e^{-u(z+3}}{-(z+3)} \right\}_{u=0}^{\infty}$$

$$= \frac{3}{(z+3)^2} \quad z > 0$$

$$x > 0,\; y > 0 \quad \therefore \quad z = \frac{x}{y} > 0$$

எடுத்துக்காட்டு

x, y என்பன ஒவ்வொன்றும் $-1, 0, 1$ என்னும் மதிப்புகளை ஏற்று, கீழ்க்காணும் இணைந்த பரவலை அமைக்கும் இரு சார்பற் மாறிகள் என்க.

x \ y	−1	0	1	மொத்தம்
−1	0	·1	·1	·2
0	·2	·2	·2	·6
1	0	·1	·1	·2
மொத்தம்	·2	·4	·4	1 0

(i) x, y இவை வெவ்வேறு எதிர்பார்த்தல்களை உடையவை எனக்காட்டுக.

(ii) x, y சார்பற்றவை எனக்காட்டுக.

(iii) $V_{(x)}, V_{(y)}$ இவற்றைக் காண்க.

(iv) $y = 0$ எனக்கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. x ன் நிபந்தனைப் பரவல் யாது ? (v) $V(y/x = -1)$ ஐக் காண்க.

(i) $E(x) = \Sigma P_i x_j = -1(\cdot 2) + 0(\cdot 6) + 1(\cdot 2) = 0$

$E(y) = \Sigma P_j y_j = -1(\cdot 2) + 0(\cdot 4) + 1(\cdot 4) = 2$

$\therefore E(x) \neq E(y)$

(ii) $E(xy) = \Sigma P_{ij} x_i y_j$

$= (-1)(-1)(0) + 0(-1)(\cdot 1) + 1(-1)(\cdot 1)$

$+ 0(-1)(\cdot 2) + 0(0)(\cdot 2) + 0(1)(\cdot 2) + 1(-1)0$

$+ 1(0)(\cdot 1) + 1(1)(\cdot 1)$

$= -\cdot 1 + \cdot 1 = 0$

$\therefore E(x_J) = E(x) \cdot E(y)$. எனவே. x, y இவை சார்பற்றவை.

(iii) $E(x^2) = (-1)^2(\cdot 2) + 0(\cdot 6) + 1^2(\cdot 2) = \cdot 4$

$\therefore \quad V_{(x)} = E(x^2) - [E(x)]^2 = \cdot 4$

$E(y^2) = (-1)^2 (\cdot 2) + 0 (\cdot 4) + 1^2 (\cdot 4) = \cdot 2 + \cdot 4 = \cdot 6$

$V_{(y)} = \cdot 6 - \cdot 04 = \cdot 56$

(iv) $P \quad (x = -1/y = 0) = \dfrac{P(x = -1 \cap y = 0)}{P(y = 0)}$

$= \dfrac{\cdot 2}{\cdot 6} = \dfrac{1}{3}$

$P(x = 0/y = 0) = \dfrac{P(x = 0 \cap y = 0)}{P(y = 0)} = \dfrac{\cdot 2}{\cdot 6}$

$= \dfrac{1}{3}$

$P(x = 0/y = 0) = \dfrac{P(x = 1 \cap y = 0)}{P(y = 0)} = \dfrac{\cdot 2}{\cdot 6}$

$= \dfrac{1}{3}$

(v) $V(y/x = -1) = E(y/x = -1)^2 - \{E(y/x = -1)\}^2$

$E(y/x = -1) = \sum_y y\, P(x = -1) = (-1)\, 0 + 0\, (2) + 1\, (0) = 0$

$E(y/x = -1)^2 = \sum_y y^2\, P(x = -1) = 1\, (0) + 0\, (\cdot 2) + 1\, (0) = 0$

$\therefore \quad V(y/x = -1) = 0$

பயிற்சி

1. இரு நாணயங்களை ஒருங்கே இருமுறை வீசுகிறோம். x-ஒரு தலையும் கிடைக்காத வீச்சுகள், y-ஒரே ஒரு தலைமட்டும் கிடைக்கக் கூடிய வீச்சுகள் எனின், (அ) x, y-ன் கூட்டு நிகழ்தகவுப் பரவலைக் காண்க. (ஆ) x, y-ன் விளிம்புப் பரவல்களைக் காண்க. (இ) $E(y)$, $V(y)$, σ_y இவற்றைக் காண்க.

(அ)

y \ x	0	1	2
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0
2	$\frac{1}{16}$	0	0

(ஆ) $f(0) = \frac{9}{16}$, $(1) = \frac{3}{8}$, $f(2) = \frac{1}{16}$; $g(0) = \frac{1}{4}$,

$g(1) = \frac{1}{2}$, $g(2) = \frac{1}{4}$

(இ) $E(y) = 1$, $V(y) = \frac{1}{2}$, $\sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2. ஒரு பகடை இருமுறை வீசப்படுகிறது. புள்ளிமுகம் 1 வரும் முறைகள் x, புள்ளிமுகம் 2 வரும் முறைகள் y. [அ] y-ன் கூட்டு நிகழ்தகவுப் பட்டியலைத் தருக. [ஆ] x, y-ன் விளிம்புப் பரவல்களைக் காண்க.

(அ)

x \ y	0	1	2
0	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{4}{18}$	$\frac{1}{8}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

(ஆ) $f(0) = g(0) = \frac{25}{36}$; $f(1) = g(1) = \frac{5}{18}$;

$f(2) = g(2) = \frac{3}{16}$

3. ஒரு நாணயம் வீசப்படுகிறது. தலை வந்தால் ஒரு பகடை வீசப்படுகிறது. பூ வந்தால் நாணயம் மறுமுறை வீசப்படுகிறது. தலைக்கு எண் 1-ம், பூவுக்கு எண் 0-ம் தருக. x முதல் வீச்சில் வரும் எண்ணையும், y 2-வது வீச்சில் வரும் எண்ணையும் குறிக்கட்டும். [அ] x, y-ன் கூட்டு நிகழ்தகவுப் பரவலைக் காண்க.

[ஆ] x, y-ன் விளிம்புப் பரவல்களைக் காண்க.

(அ)

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	6	6
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0
1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

(ஆ) $f(1) = f(1) = \frac{1}{2}$,

$$g(0) = \frac{1}{4},\ (g)(1) = \frac{1}{3},\ g\ (2) = g\ (3) = g\ (4)$$

$$= g(5) = g(6) = \frac{1}{12}$$

4.

அ.

$x \backslash y$	1	2	3
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
2	$\frac{3}{8}$	0	0
3	0	$\frac{1}{8}$	0

மேற்கண்ட கூட்டு நிகழ்தகவுப் பரவலுக்கு விளிம்புப் பரவல்களைப் காண்க.

ஆ. $P[x<2) = \frac{1}{2}$ என நிறுவுக.

(இ) $G(y) = P[Y < y]$ என எல்லா y-க்கும் இருக்குமாறு $G(y)$ ஐக் காண்க.

[அ] $f(1) = \frac{1}{2}, f(2) = \frac{3}{8}, f(3) = \frac{1}{8}; g(1) = \frac{1}{2}$

$$g(2) = \frac{1}{4}, g(3) = \frac{1}{4}$$

[ஆ] $P(x < 2) = P(x = 1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$

[இ] $G(y) = 0 \quad y \leq -1; \; G(y) = \frac{1}{4} \quad -1 < y \leq 0;$

$$G(y) = \frac{1}{2} \qquad 0 \leq y < 1$$

$$G(y) = 1 \quad y \geq 1$$

5.

x \ y	−1	0	1
−1	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0

(i) x-ன் விளிம்புப் பரவலைக் காண்க.

(ii) $x=1$ ஆக இருக்கும்பொழுது y-ன் சார்ந்த நிகழ்தகவுச் சார்பைக் காண்க.

$$g(y/1) = P[Y = y/x = 1]$$

(i) $f(-1) = \frac{1}{4}; f(1) = \frac{3}{4}$

(ii) $g(-1/1) = \frac{2}{3}, g[0/1] = \frac{1}{3}\; g[1/1] = 0$

6. x எனும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி 1, 2, 3 எனும் மதிப்புகளை, $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ எனும் நிகழ்தகவுகளுடன் ஏற்கிறது. y, 1, 2 எனும் மதிப்புகளை $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ எனும் நிகழ்தகவுகளுடன் ஏற்கிறது. அவை,

சார்பற்றவையாயிருப்பின் ஒரு பட்டியலில் அவற்றின் கூட்டு நிகழ்தகவுச் சார்பைத் தருக. $g(y/x)$, $E(y/x)$ $E(y)$ காண்க.

y \ x	1	2	2
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
2	$\frac{3}{8}$	0	0
3	0	$\frac{1}{8}$	0

[விடை $= g(1/1) = g(2/1) = \frac{1}{4}$

$g\binom{3}{1} = \frac{1}{2}$ $\quad E(1/2) = 1$

$E(y/1) = \frac{9}{4}$ $\quad E(y/2) = 2$ $\quad E(y/3) = 2$

$E(y) = \frac{7}{4}$]

15. சிறப்புப் புள்ளியியல் பரவல்கள்

செவ்வகப் பரவல் (Rectangular Distribution) செவ்வகப் பரவல் தொடர் அலைவுப் பரவல்களில் மிக எளிதானது. x மாறியின் நிகழ்தகவுச் சார்பு, வரையறுக்கப்பட்டுள்ள $a \leq x \leq b$ எனும் இடைவெளி முழுவதும் மாறிலியாகவும், அதனை விடுத்து மற்றெங்கிலும் பூஜ்ஜியமாகவும் அமையுமெனில் அந்நிகழ்தகவுப் பரவலைச் செவ்வகப் பரவல் அல்லது சீரான பரவல் (Uniform Distribution) என்கிறோம்.

x அச்சின் மேல் $x = a$, $x = b$ எனும் இரு குத்தாயங்களுக்கு இடையே (ordinates) $Y = f(a)$ எனும் நிகழ்தகவு வரை ஒரு செவ்வகத்தை அமைப்பதால், இது செவ்வகப் பரவல் எனப் படுவது பொருத்தமானதே.

x எனும் மாறி (a, b) எனும் இடைவெளியில் செவ்வக மாறியானால்

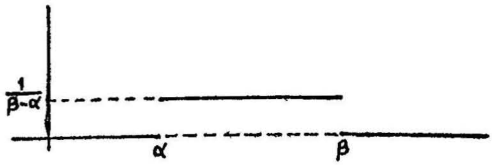
$$\int_a^b f(x)\, dx = 1. \quad f(x) \int_a^b dx = 1 \; [\because \; f(x) \text{ மாறிலி}].$$

$$f(x)(b-a) = 1.$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

எனவே செவ்வகப் பரவலின் நிகழ்தகவுச் சார்பு $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ $a \leq x \leq b$. இதன் பண்பலகுகள் இரண்டு. அவை a, b ஆகும்.

$a = 0$ ஆனல் ஒரு பண்பளவை கொண்ட செவ்வகப் பரவம் கிடைக்கிறது. செவ்வகப் பரவலின் படம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



படம் 15·1

செவ்வகப் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி பரவற்படி

$$\text{கூட்டுச்சராசரி} = \int_a^b x \frac{dx}{b-a} = \left[\frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b+a}{2}$$

$a = 0,\ b = 1$ எனில் கூட்டுச்சராசரி $= \frac{1}{2}$

பரவற் படி $= \mu_2' - (\mu_1')^2$

$$= \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\right)_a^b - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{b^2+a^2+ab}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

$a = 0;\ b = 1$ ஆனல் $\sigma^2 = \frac{1}{12}$

அளவுகளை ஒரு குறிப்பிட்ட அலகிற்குத் திருத்தமாக முழுமையாக்கும் போது ஏற்படும் பிழைகள் செவ்வகப் பரவலைத் தழுவுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக அன்றாட வெப்பநிலைகள் (temperature) பாகைகளின் பின்னமாயிருப்பின் அவை முழுமையாக்கப் படும் போது உண்மையான வெப்பநிலைக்கும், பதிவு செய்யப் பட்டுள்ள வெப்பநிலைக்கும் இடையே உள்ள வேறுபாடு—·5-க்கும் +.5-க்கும் இடையே உள்ள ஏதேனும் ஒரு எண்ணாக இருக்கும்.

இந்த இடைவெளி முழுவதும் இந்தப் பிழை சீராகப் பரவியுள்ளது.

செவ்வகப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை,

$$\mu' k = \int_a^b f(x) \cdot x^k \cdot dx.$$

$$= \int_a^b \frac{1}{b-a} x^k \cdot dx.$$

$$= \left[\frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_a^b = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b-a} \cdot \frac{1}{k+1}$$

$a = 0$, $b = 1$ ஆக இருக்கும் போது,

k-வது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை.

$$\mu' k = \int_0^1 x^k \cdot dx = \frac{1}{k+1}$$

விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பினைப் பயன் படுத்தினால்

$$M(\theta) = \int_0^1 e^{\theta x}\, dx = \frac{e^{\theta} - 1}{\theta}$$

$$= \frac{1}{\theta}\left[1 + \frac{\theta}{1!} + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} \cdots\cdots - 1\right]$$

$$= 1 + \frac{\theta}{2!} + \frac{\theta^2}{3!} + \cdots\cdots + \frac{\theta^k}{(k+1)!}$$

$\mu'\,k$ என்பது $M(\theta)$-ல் $\frac{\theta^k}{k+1}$ ன் குணகம்.

$$= \frac{1}{k+1}$$

அன்றாட வாழ்க்கையில் இப்பரவல் அதிகம் பயன்படுவதில்லை. அறிமுறையில் இது அதிகம் கையாளப் படுவதோடு, பொதுவான புள்ளியியல் கொள்கைகள் அல்லது வாய்ப்பாடுகளை எடுத்துக் காட்டி விளக்க உதவும் எளிய தொடர் நிலைப் பரவலாக உள்ளது.

கணக்கு

$dp = dx$ எனும் ஒரு செவ்வகப் பரவலுக்கு $0 \le x \le 1$, μ'_1 (ஆதியை ஒட்டி) $= \frac{1}{2}$, $\mu_2 = \frac{1}{12}$, சராசரி விலக்கம் $= \frac{1}{4}$ என நிறுவுக.

$$\mu'_1 = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\mu'_2 = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$\mu_2 = \mu'_2 - d^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$$

கூட்டுச்சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட சராசரி விலக்கம்

$$= \int_0^1 \left| x - \frac{1}{2} \right| dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{4}$$

செவ்வகப் பரவலின் பரவல் சார்பு

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx + \int_{a}^{x} f(x)\, dx$$

$$= 0 + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} \cdot dx = \frac{x-a}{b-a}$$

எனும் மாறி செவ்வகப் பரவலைத் தழுவினால்,

$$P(x \geq d) = \int_{d}^{\infty} f(x)\, dx$$

$$= \int_{d}^{b} f(x)\, dx = \int_{d}^{b} \frac{1}{b-a} dx$$

$$= \frac{b-d}{b-a}$$

எ.கா. x_1, x_2 என்பவை சார்பற்ற மாறிகள். அவற்றின் பொதுப்பரவல் $q^k p$ எனும் பெருக்குத் தொடர் பரவல். $x_1 + x_2$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளபோது, x_1-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட பரவல்

$$P\left\{x_1 = k \,/ x_1 + x_2 = n\right\} = \frac{1}{n+1} \quad (k = 0, 1, \dots n)$$

என்ற செவ்வகப் பரவல் எனக் காட்டுக.

$$P[x_1 = k] = q^k p$$

$$P[x_2 = k] = q^k p$$

$$P[x_1+x_2=n] = \sum_{r=0}^{n} P(x_1 = r, x_2 = n-r)$$

$$= \sum_{r=0}^{n} (q^r \cdot p \cdot q^{n-r} p)$$

$$= p^2 \sum_{r=0}^{n} (p^r q^{n-r} = p^2 q^n \sum 1$$

$$= (n+1) p^2 q^n$$

$$P[x_1 = k, x_1 + x_2 = n] = P[x_1 = k, x_2 = n-k]$$

$$= q^k p q^{n-k} p = p^2 q^n$$

$$P\left[x_1 = k \,/\, x_1 + x_2 = n\right] = \frac{p[x_1 = k, \; x_1 + x_2 = n]}{P[x_1 + x_2 = n]}$$

$$= \frac{p^2 q^n}{p^2 q^n (n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

எனவே இது ஒரு செவ்வகப் பரவலாகும்.

எ.கா. x எனும் தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி $a \le x \le b$ எனும் இடைவெளியில் பின்பற்றும் நிகழ்தகவுச் சார்பு $f(x)$, $x<a; x>b$ ஆக இருக்கும்போது $f(x) = 0$. $\int_a^b f(x)\, dx = 1$ எனில்,

$P = \int_a^x f(x)\, dx$ எனும் மாறி செவ்வகப் பரவலைத் தழுவுகிறது எனக் காட்டுக.

$$P = \int_{a}^{x} f(x)\, dx = P[x \leq x]$$

$$dp = f(x)\, dx$$

$u = F(x)$ என இருக்கட்டும்.

$$dp = f(x)\, dx = f(x) \frac{dx}{du} \cdot du = f(x) \frac{1}{f(x)} du$$

$$= du\ [0 \leq u \leq 1]$$

எனவே u, ஒரு அலகு இடைவெளி வீச்சைக் கொண்டதாய்ச் செவ்வகப் பரவலைத் தழுவுகிறது.

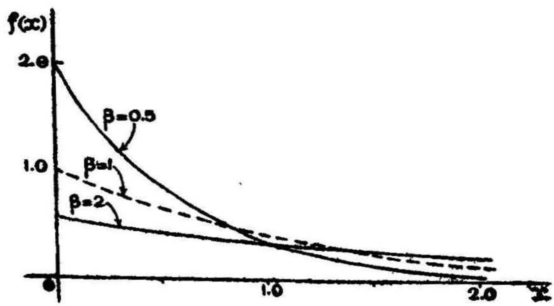
அடுக்குக் குறிப்பரவல்
(Exponential Distribution)

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}} \qquad 0 < x < \infty, \quad \beta > 0.$$

$$= 0. \quad \text{மற்றெங்கிலும்.}$$

என்பது அடுக்குக் குறிப்பரவலின் நிகழ்தகவுஅடர்த்திச் சார்பு. இதில் உள்ள ஒரே பண்பலகு β.

β-வின் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கு, அடுக்குக் குறிப்பரவலின் நிகழ்தகவு வரை வரையப்பட்டுள்ளது.



படம் 15·2

அடுக்குக் குறிப்பரவலின் கூட்டுச்சராசரி

$$\text{கூட்டுச்சராசரி } \bar{x} = E(x) = \int_0^\infty x.\frac{1}{\beta}.e^{-\frac{x}{\beta}}\,dx$$

$$= \left[-x.e^{-\frac{x}{\beta}}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\beta}}\,dx.$$

$$= -\left[e^{-\frac{x}{\beta}}.\ \beta\right]_0^\infty = \beta.$$

பரவற்படி.

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$E(x^2) = \int_0^\infty x^2.\frac{1}{\beta}.e^{-\frac{x}{\beta}}\,dx$$

$$\left[-x^2.e^{-\frac{x}{\beta}}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2\,x\,e^{\frac{x}{\beta}}\,dx.$$

$$= \left[-2x.\beta.e^{-\frac{x}{\beta}}\right] + \int_0^\infty 2\beta\,e^{-\frac{x}{\beta}}\,dx$$

$$= \left[-2\,\beta^2.\ e^{-\frac{x}{\beta}}\right]_0^\infty$$

$$= 2\,\beta^2.$$

$$\therefore\ V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2.$$

$$= 2\beta^2 - \beta^2 = \beta^2$$

பரவல் சார்பு $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{0}^{x} \frac{1}{\beta} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}\,dx.$

$$= 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}.$$

$$\therefore \quad 1 - F(x) = \int_{x}^{\infty} f(x)\,dx = e^{-\frac{x}{\beta}}$$

$$P(x \geq d) = \int_{d}^{\infty} f(x)\,dx = e^{-\frac{d}{\beta}}$$

கணக்கு

$dP = y_0\, e^{-\frac{x}{\sigma}}\, dx \; (0 \leq x \leq \infty)\; \sigma > 0$ எனும் அடுக்குக் குறிப் பரவலில் y_0 ஒரு மாறிலி.

1. கூட்டுச்சராசரி = திட்டவிலக்கம் = σ.

2. கால்மான விலக்கம் = $\frac{1}{2}[\sigma \log e^{3}]$ என நிறுவுக.

μ_r' கண்டறிந்து $\beta_1 = 4$; $\beta_2 = 9$ என நிறுவுக.

$y_0 \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x}{\sigma}}\, dx = 1$ எனும் சமன்பாட்டிலிருந்து y_0-ன் மதிப்பைப் பெறலாம்.

$$y_0 \left(\frac{e^{-\frac{x}{\sigma}}}{-\frac{1}{\sigma}} \right)_0^{\infty} = y_0 \left[-\sigma\, e^{-\frac{x}{\sigma}} \right]_0^{\infty} = 1$$

$$y_0 = \frac{1}{\sigma}$$

$$\mu_r' = \int_0^\infty x^r e^{-\frac{x}{\sigma}}\, dx = r!\,\sigma^r$$

$$\mu_1' = \sigma;\quad \mu_2' = 2\sigma^2;\ \mu_3' = 6\sigma^3;\ \mu_4' = 24\,\sigma^4$$

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2 = \sigma^2$$

$$\mu_3 = 2\sigma^3$$

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = 4;\ \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{9\sigma^4}{\sigma^4} = 9$$

$$\int_0^{Q_1} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}}\, dx = \frac{1}{4}$$

$$1 - e^{-\frac{Q_1}{\sigma}}\, dx = \frac{1}{4}$$

$$e^{-\frac{Q_1}{\sigma}} = \frac{3}{4} \qquad (1)$$

இதுபோன்றே $e^{-\frac{Q_3}{\sigma}} = \frac{1}{4}$ (2)

$$\left[\int_0^{Q_3} \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{x}{\sigma}}\, dx = \frac{3}{4}\right]$$

$$\frac{(1)}{(2)} = e^{\frac{Q_3 - Q_1}{\sigma}} = 3;\quad Q_3 - Q_1 = \sigma \log e^3$$

$$\therefore \text{ கால்மான விலக்கம் } = \frac{\sigma \log e^3}{2}$$

கணக்கு

1. ஒரு வியாபாரியின் விற்பனை வரிக்கணக்குகள் $\theta = 4$ எனும் பண்பளவையுடன் அடுக்குக் குறிப்பரவலைச் சார்ந்துள்ளன. அவனது விற்பனை 10,000 ரூபாயைவிட அதிகமாக இருப்பதற்குரிய

நிகழ்தகவு என்ன ? [விற்பனையின் மீது வரி .5% ஆக விதிக்கப்படுகிறது]

பண்பளவை θ ஆக உள்ள அடுக்குக் குறிப்பரவலின் நிகழ்தகவு

$$\text{அடர்த்திசார்பு } f(x) = \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}$$

விற்பனை வரி ›, அடுக்குக் குறிப்பரவலை $\theta = 4$ எனும் பண்பளவையுடன் சார்ந்துள்ளது.

$$\text{எனவே } f(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{x}{4}}$$

விற்பனை 100 ரூ. அதிமானால் வரி 5 ரூ. அதிகமாகும்,

விற்பனை 10,000 ரூ. அதிகமானால் வரி ரூ. 500 அதிகமாகும்.

$$P(x \geq 500) = \int_{500}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{x}{4}} dx$$

$$\left[-\frac{1}{4} \cdot \frac{e^{-\frac{x}{4}}}{\frac{1}{4}} \right] = \left(-e^{-\frac{x}{4}} \right)_{500}^{\infty}$$

$$= e^{-\frac{500}{4}} - e^{-\frac{\infty}{4}}$$

$$= e^{-125} - 0 = \frac{1}{e^{125}}$$

2. ஒரு நகரத்தில் 10,000 காலன்களுக்கு மேல் தினசரி செலவாகும் பால், $\theta = 1000$ எனும் பண்பளவையுடன் அடுக்குக் குறிப்பரவலைச் சார்ந்துள்ளது. நகரத்தில் 15,000 காலன்கள் பால் சேமித்து வைக்கப்பட்டுள்ளது ஏதேனும் 2 நாட்களைத் தேர்ந்தெடுத்தால், அந்த இரண்டு நாட்களிலும் கையிருப்புப் பால் பற்றாக் குறையாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

m என்பது ஒவ்வொரு நாளும் நகரத்தில் செலவாகும் பால்.

$$x = m - 10{,}000,\ f(x) = \left(\frac{1}{1000}\right) e^{-\frac{x}{1000}}\ (0 < x < \infty)$$

அடுக்குக் குறிப்பரவலைத் தழுவுகிறது.

தேவைப்படும் பால் கையிருப்பைவிட அதிகமாய் இருந்தால் பற்றுக்குறை ஏற்படுகிறது.

அதாவது $x > 15{,}000 - 10{,}000 = 5{,}000$ எனும்போது, பற்றுக்குறை ஏற்படுகிறது.

ஒரு குறிப்பிட்ட தினத்தன்று கையிருப்பு பற்றுக்குறையாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு

$$= P(x > 5000) = \int_{5,000}^{\infty} \frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}} dx = e^{-5}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{எனவே தேவையான நிகழ்தகவு} \\ \text{(இருநாட்களுக்கும்)}\end{array}\right\} = (e^{-5})^2 = e^{-10}.$$

3. மழைக்காலத்தில் ஒரு இடத்தில் பெய்யும் மழை $\theta = 2$ என்னும் பண்பளவையுடன் அடுக்குக் குறிப்பரவலைச் சார்ந்துள்ளது. (நேரம் நிமிடங்களில் கணக்கிடப்படுகிறது).

(i) 3 நிமிடங்களுக்கு மேலாக மழை நீடிப்பதற்குரிய நிகழ்தகவென்ன ? (ii) ஏற்கெனவே 2 நிமிடங்கள் மழை பெய்திருந்தால், இன்னும் ஒரு நிமிடத்திற்காவது மழை நீடிப்பதற்குரிய நிகழ்தகவென்ன ?

$$\text{(i)}\quad P[x > 3] = \int_{3}^{\infty} f(x)\, dx$$

$$= \int_{3}^{\infty} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \int_{3}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \left[-e^{-\frac{x}{3}}\right]_{3}^{\infty} = e^{-1\cdot5}$$

(ii) $P[x > 3/x > 2]$ என்பது ஏற்கெனவே மழை 2 நிமிடங்களுக்குப் பெய்திருந்தபோது, இன்னும் ஒரு நிமிடம் நீடிப்பதற்கான நிகழ்தகவு.

$$P[x > 3/x > 2] = \frac{P[x > 3 \cap x > 2]}{P[x > 2]} = \frac{P[x > 3]}{P[x > 2]}$$

$$= \frac{e^{-1.5}}{e^{-1}} = e^{-.5}$$

$$\left(\because \; P(x > 2) = \int_2^\infty \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx = e^{-1} \right)$$

4. பல பெரும் தொழிற்சாலைகளின் ரூ. 4 லட்சத்திற்கு மேற்பட்ட வருமானம், $\theta = 2$ இலட்சங்களைப் பண்பளவையாகக் கொண்டு அடுக்குக் குறிப்பரவலைச் சார்ந்துள்ள ஒரு ராண்டம் மாறியாகக் கருதப்படுகிறது. இத்தகைய 6 தொழிற்சாலைகளில் நான்கு தொழிற்சாலைகளில் 5 லட்ச ரூபாய்க்கு மேல் வருமானம் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

ஒரு தொழிற்சாலையின் வருமானம் 5 லட்சத்திற்கு மேல், அதாவது, 4 லட்சத்திற்குமேல், 1 லட்சத்திற்கும் அதிகமாக உள்ள வருமானத்தினைப் பெற நிகழ்தகவு,

$$p[x > 1] = \int_1^\infty \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx = \left[-e^{-\frac{x}{2}} \right]_1^\infty$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

எனவே ஒரு தொழிற்சாலையின் வருமானம் 5 லட்சத்திற்கும் குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e} - 1}{\sqrt{e}}$.

எனவே 6 தொழிற்சாலைகளில், நான்கில் வருமானம் 5 லட்சத்திற்கும் மேல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= 6c_4 \left(\frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt{e}}\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^4$$

$$= 15 \frac{(\sqrt{e}-1)^2}{e} \cdot \frac{1}{e^2}$$

$$= 15 \frac{(\sqrt{e}-1)^2}{e^3}$$

5. x எனும் சமவாய்ப்பு மாறி அடுக்குக் குறிப்பரவலைத் தழுவுகிறது. அதற்கிணைந்த தரப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலை மாறி

$$y\text{-க்கு, } f(y) = \left.\begin{array}{l} e^{-y-1} \\ = 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} y > -1 \\ \text{மற்றெங்கிலும்} \end{array}$$

என்ற நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு உள்ளதென்று நிறுவுக.

$$y = \frac{x-m}{\sigma} = \frac{x-\beta}{\beta}$$ [β அடுக்குக் குறிப்பரவலின் கூட்டுச்சராசரி, திட்டவிலக்கமானால்]

$$x = y\beta + \beta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\beta}$$

$$\therefore \quad f(y) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{(y\beta+\beta)}{\beta}} \quad (y > -1)$$

$$= e^{-y-1} \; (y > -1)$$

$$= 0 \text{ (மற்றெங்கிலும்)}$$

காமாபரவல் (Gamna distribution)

X எனும் தொடர் மாறி. $p(X = x) = \dfrac{e^{-x}\, x^{n-1}}{\Gamma\ (n)}\ n>0,$

$$0 < x < \infty$$

$$= 0 \text{ மற்றெங்கிலும்}$$

என்ற நிகழ்தகவு விதியைச் சார்ந்து பரவி இருந்தால், அது n-ஐப் பண்பளவவயாக உடைய ஒரு காமா மாறி எனவும், அதன் பரவல் காமா பரவல் என்றும் கூறப்படுகிறது.

$$\int_0^{\infty} p(x)\, dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n)} = 1$$

காமா பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_x(\theta) = E[e^{\theta x}] = \int_0^{\infty} e^{\theta x}.p(x)dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{\infty} e^{\theta x} e^{-x} x^{n-1} dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} e^{-(1-\theta)x}\, x^{-n-1} dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \cdot \frac{\Gamma(n)}{(1-\theta)^n}$$

$$\therefore\quad M_x(\theta) = (1-\theta)^{-n}$$

காமா பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்

$$\mu'_1 = \left(\frac{d\,M}{d\,\theta}\right)_{\theta=0} = -n\,(1-\theta)^{-n-1}(-1)$$

$$= n$$

$$\mu'_2 = \left(\frac{d^2\,M}{d\,\theta^2}\right)_{\theta=0} = +\,n\,(n+1)\,(1-\theta)^{-n-2} = n\,(n+1)$$

$$\mu_2 = (n^2+n) - n^2 = n$$

$$\mu'_3 = n\,(n+1)\,(n+2)\,(n-\theta)^{-n-3} = n\,(n+1)\,(n+2)$$

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3C_1\,\mu'_2\,d + 3C_2\,\mu'_1\,d - d^3$$

$$= n\,(n+1)\,(n+2) - 3n\,(n+1)\cdot n + 2n^3$$

$$= 2n$$

இவ்வாறே $\mu_4 4 = 6n + 3n^2$ என நிறுவலாம்.

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{4n^2}{n^3} = \frac{4}{n}\ ;\ \mu_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 3 + \frac{6}{n}$$

பாய்ஸான் பரவலைப் போலவே காமா பரவலின் கூட்டுச் சராசரியும், பரவற்படியும் ஒரே மதிப்புடையவை.

n முடி விலியை அணுகும்போது, $\beta_1 \to 0$, $\beta_2 \to 73$ எனவே காமா பரவல் n-ன் பெரிய மதிப்புகளுக்கு, இயல்நிலைப் பரவலை அணுகுகிறது.

காமா மாறியின் கூட்டல் பண்பு

சார்பற்ற காமா மாறிகளின் கூட்டுத்தொகையும் ஒரு காமா மாறியே. $X_1, X_2, \ldots\ldots X_k$ என்பவை முறையே $n\ , n\ , \ldots\ldots n_k$-ஐ பண்பளவைகளாகக் கொண்டு காமா பரவலைச் சார்ந்துள்ளன. $X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_k$, $n_1 + r_2 + \ldots\ldots + n_k$-ஐப் பண்பளவையாகக் கொண்ட ஒரு காமா மாறி.

நிறுவுதல் :

X_i, n_i-ஐப் பண்பளவையாகக் கொண்ட ஒரு காமா மாறி.

எனவே $M_{X_i}(\theta) = (1-\theta)^{-n_i}$

$$M_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(\theta) = M_{X_1}(\theta)\,M_{X_2}(\theta)\cdots M_{X_n}(\theta)$$

[$X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ சார்பற்றவை]

$$= (1-\theta)^{-n_1} (1-\theta)^{-n_2} \dots (1-\theta)^{-n_k}$$

$$= (1-\theta)^{-(n_1+n_2+\dots+n_k)}$$

இது $n_1 + n_2 + \dots\dots n_k$-ஐப் பண்பளவையாகக் கொண்ட ஒரு காமா மாறி. எனவே விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்புகளின் மாற்றற்றத்தன்மை தேற்றத்தின்படி, $X_1 + X_2 + \dots\dots X_n$ காமா பரவலைச் சார்ந்துள்ளது.

முதலாம் வகை β பரவல்

$$P\,[X = n] = \frac{1}{\beta\,(m, n)}\, x^{m-1}\, (1-x)^{n-1},\ m, n > 0,\ 0<x<1$$

என்பதை நிகழ்தகவு விதியாகக் கொண்டுள்ள மாறி ஒரு $\beta_1\,(m, n)$ மாறி அல்லது முதலாம் வகை β மாறி எனப்படுகிறது. இதன் பண்பளவைகள் m, n

முதலாம்வகை β பரவலின் கூட்டுச்சராசரி

$$\mu_1' = \int_0^1 x\, p\,(x)\, dx$$

$$\frac{1}{\beta\,(m, n)} = \int_0^1 x \cdot x^{m-1}\, (1-x)^{n-1}\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta\,(m, n)} \int_0^1 x^m\, (1-x)^{n-1}\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta\,(m, n)}\, \beta\,(m+1, n)$$

$$= \frac{1}{\beta\,(m, n)}\, \beta\,(m+1, n)$$

$$= \frac{\Gamma\,(m+n)}{\Gamma\,(m)\,\Gamma\,(n)} \cdot \frac{\Gamma\,(m+1)\,\Gamma\,(n)}{\Gamma\,(m+1+n)}$$

$$= \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \cdot \frac{m\Gamma(m)\Gamma(n)}{(m+n)\Gamma(m+n)} = \frac{m}{m+n}$$

$$\mu_r' = \int_0^1 x^r p(x)\, dx = \frac{1}{\beta(m, n)} \int_0^1 x^{m+r-1}(1-n)^{n-1}\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta(m, n)} \beta(m+r, n)$$

$$= \frac{\Gamma(m+r)\Gamma(n)\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+r+n)\Gamma(m)\Gamma(n)}$$

$$= \frac{\Gamma(m+r)\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+r+n)\Gamma(m)}$$

எனவே $\mu_2' = \frac{\Gamma(m+2)\Gamma(n+n)}{\Gamma(m+n+2)\Gamma(m)}$

$$= \frac{m(m+1)\Gamma(m)\Gamma(m+n)}{(m+n+1)(m+n)\Gamma(m+n)\Gamma(m)}$$

$$= \frac{m(m+1)}{(m+n)(m+n+1)}$$

பரவற்படி $\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2$

$$= \frac{m(1+m)}{(m+n)(m+n+1)} - \left(\frac{m}{m+n}\right)^2$$

$$= \frac{mn}{(m+n)^2(m+n+1)}$$

இரண்டாம் வகை β பரவல்

$$P(X = x) = p(x) = \frac{1}{\beta(m, n)} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\, m, n > 0,$$

$0 < x < \infty$ என்பது m, n-ஐப் பண்பளவைகளாகக் கொண்ட இரண்டாம் வகை β மாறி $\beta_2(m, n)$ ஆகும். இதன் பரவல் இரண்டாம் வகை β பரவல் எனப்படுகிறது.

$$\mu_r' = \int_0^\infty x^r p(x)\, dx = \frac{1}{\beta(m, n)} \int_0^\infty \frac{x^{m+r-1}}{(1+x)^{m+n}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta(m, n)} \int_0^\infty \frac{x^{m+r-1}}{(1+x)^{m+r+n-r}}\, du.$$

$$= \frac{1}{\beta(m, n)}\, \beta(m+r,\, n-r)$$

$$\therefore \quad \mu_r' = \frac{\Gamma(m+r)\,\Gamma(n-r)}{\Gamma(m+n)} \cdot \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}$$

$$= \frac{\Gamma(m+r)\,\Gamma(n-r)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}$$

$$\mu_1' = \frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n-1)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}$$

$$= \frac{m\,\Gamma(m)\,\Gamma(n-1)}{\Gamma(m)\,(n-1)\,\Gamma(n-1)} = \frac{m}{n-1}$$

$$\mu_2' = \frac{\Gamma(m+2)\,\Gamma(n-2)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}$$

$$= \frac{(m+1)\,m\,\Gamma(m)\,\Gamma(n-2)}{\Gamma(m)\,(n-1)\,(n-2)\,\Gamma(n-2)}$$

$$= \frac{m\,(m+1)}{(n-1)\,(n-2)}$$

$$\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = \frac{m\,(m+1)}{(n-1)\,(n-2)} - \left(\frac{m}{n-1}\right)^2$$

$$= \frac{m\,(m+n-1)}{(n-1)^2\,(n-2)}$$

எ.கா. x, y என்பன முறையே l, m ஐ பண்பளவைகளாகக் கொண்ட இரு சார்பற்ற காமா மாறிகளானால், $\frac{x}{y}$ என்பது l-ஐயும் m-ஐயும் பண்பளவைகளாகக் கொண்ட இரண்டாம் வகை β மாறி என நிறுவுக.

காமா மாறியின் $dP = \frac{e^{-x}\, x^{l-1}}{\Gamma(l)}\, dx \quad 0 < x < \infty$ என நாம் அறிவோம்.

x, y மாறிகள் சார்பற்றவை ஆதலால், x, y-ன் சேர்ந்த நிகழ்தகவு,

$$dP = \frac{e^{-(x+y)}\, x^{l-1}\, y^{m-1}}{\Gamma(l)\, \Gamma(m)}\, dy\, dx$$

$$0 < x, y < \infty$$

இங்கு l, m என்பன முறையே x, y-ன் பண்பளவைகளாகும்.

$x = z\sin^2\theta \quad y = z\cos^2\theta$ எனப்பிரதியிட,

$$z = x+y \text{ and } \tan^2\theta = \frac{x}{y}$$

$$dy \cdot dx = \frac{\partial(y, x)}{\partial(z, \theta)} \cdot dz \cdot d\theta$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \end{vmatrix} dz\, d\theta = 2z\sin\theta\cos\theta\, dz\, d\theta$$

இங்கு $0 < x, yz < \infty, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$\theta, d\theta$ என்ற இடைவெளியிலும் z, dz என்ற இடைவெளியிலும் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$dp = \frac{e^{-z}(z\sin^2\theta)^{l-1}(z\cos^2\theta)^{m-1}}{\Gamma(l) \cdot \Gamma(m)}\, 2z\sin\theta\cos\theta) \cdot dz \cdot d\theta$$

$$= \left\{\frac{e^{-z}\, z^{l+m-1}}{\Gamma(l+m)}\, dz\right\}$$

$$\times \left\{\frac{2\sin^{2l-1}\theta\cos^{2m-1}\theta}{\beta(l, m)}\, d\theta\right\}$$

இதிலிருந்து l, m ஐ பண்பளவைகளாகக் கொண்ட இரு சார்பற்ற காமா மாறிகளின் கூட்டுத் தொகை, $l+m$ ஐ பண்பளவையாகக் கொண்ட காமா பரவலைத் தழுவுகிறது என அறியலாம்.

$z = x + y$ என்ற மாறியின் பரவல், $dp_1 = \frac{e^{-z}\, z^{l+m-1}}{\Gamma(l+m)} dz$

இதிலிருந்து $(l+m)$ ஐ பண்பளவையாகக் கொண்ட காமா மாறி z என அறியலாம்.

θ-ன் பரவல், $dp_3 = \frac{2 \sin^{2l-1}\theta \sin^{2m-1}\theta}{\beta(l, m)} d\theta.\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}$

$T = \frac{x}{y} = \tan^2\theta$ எனப்பிரதியிட $\tan\theta = \sqrt{T}$

$\therefore\ \sin\theta = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{1+T}}\quad \cos = \frac{1}{\sqrt{1+T}}\ d\theta$

$$= \frac{1}{2\sqrt{T}} \frac{(1 = T)}{1} dT$$

$$\therefore\ dp_2 = \frac{T^{l-1}}{\beta(l, m)(1+T)^{l+m}} dT\ 0, <T<\infty, l, m>0$$

இதிலிருந்து $T \frac{x}{y}$ ஒரு இரண்டாம் வகை β மாறி என அறியலாம்.

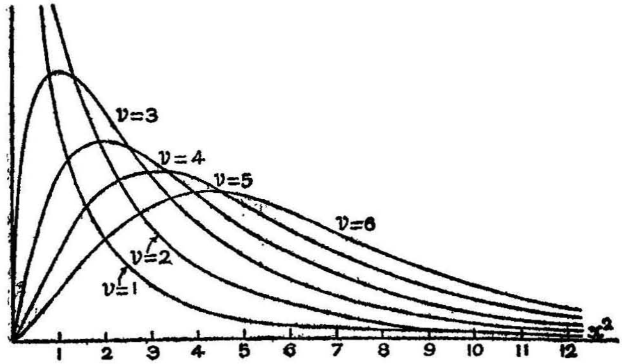
கை வர்க்கப் பரவல் χ^2 (distribution)

தரப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலை மாறியின் வர்க்கம் ஒரு சமன்பாட்டுப்படியையுடைய கை வர்க்க மாறியாகும். எனவே x என்பது $N(m, \sigma)$ ஆனால், $z = \frac{x-m}{\sigma}$ என்பது $N(0, 1)$

$z^2 = \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2$ என்பது ஒரு சமன்பாட்டுப்படியை உடைய கை வர்க்க மாறி. பொதுவாக, $x_i\ (i = 1, 2 \ldots n)$ என்பவை n சார்பற்ற இயல்நிலை மாறிகளாகவும், அவற்றின் கூட்டிடைகள் m_i ஆகவும் பரவற்படிகள் $\sigma_i^2\ (i = 1, 2 \ldots n)$ ஆகவும் இருந்தால்,

$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - m_i}{\sigma_i}\right)^2$ என்பது n சமன்பாட்டுப்படிகளை உடைய ஒரு கை வர்க்க மாறி.

சார்பற்ற மாறிகளின் எண்ணிக்கையே, சமன்பாட்டுப்படி (degrees of freedom) அல்லது கட்டின்மைக்கூறு எனப்படுகிறது.



படம் 15.4

கட்டின்மைக் கூறு $\gamma = 1, 2, 3. 4, 5. 6$ என்பவற்றுக்கான கை வர்க்கப் பரவலின் வகைகளைப் படத்தில் காணலாம்.

கை வர்க்கப்பரவலின் நிகழ்தகவுச் சார்பு காணுதல்

$X_i = 1, 2 \dots n$) என்பவை சார்பற்ற இயல்நிலை மாறிகள் $N(m_i, \sigma_i)$ ஆகும்.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - m_i}{\sigma_i}\right)^2$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - m_i}{\sigma_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$$

$$z_i = \frac{X_i - m_i}{\sigma}$$

அதாவது n சமன்பாட்டுப் படிகளை உடைய x^2 மாறி, n சார்பற்ற, தரப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலை மாறிகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகையாகும்.

x_i-கள் சார்பற்றவையாதலால், z_i-களும் சார்பற்றவை.

எனவே $Mx^2(t) = Mz_1^2 + [z_2^2 + \dots + z_n^2(t)$

$$= Mz_1^2(t) \cdot Mz_2^2(t) \dots Mz_n^2(t)$$

$$= [Mz_i^2(t)]^n$$

(∵ எல்லா x_i களும் ஒரே பரவலைச் சார்ந்தவை)

$$Mz_i^2(t) = E(e^{tz_i^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz_i^2} f(x_i)\, dx_i$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz_i^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i - m_i)^2}{2\sigma^2}} dx_i$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz_i^2} . e^{-\frac{z_i^2}{2}} \sigma \,.\, dz_i$$

$$\left[z_i = \frac{x_i - m_i}{\sigma} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{1-2t}{2}\right) z_i^2} . dz_i$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{\left(\frac{1-2t}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = (1-2t)^{\frac{1}{2}}$$

எனவே $Mx^2(t) = \left[(1-2t)^{-\frac{1}{2}} \right]^n$

$$= (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$$

$(1-2t)^{-\frac{n}{2}}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ $\beta = \frac{n}{2}$ என்பவற்றை பண்பளவைக் களாகக் கொண்ட ஒரு காமா மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு.

எனவே விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு களின் மாற்றற்ற தன்மை தேற்றத்தின் மூலம்,

$\chi^2 = \Sigma\left(\frac{X_i - m_i}{\sigma_i}\right)^2$ என்பதுபண்பளவைகள் $\frac{1}{2}, \frac{n}{2}$ கொண்ட ஒரு காமா மாறி,

$$\text{எனவே } f(x^2 = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x^2}{2}}(\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}$$

$$0 < \chi^2 < \infty$$

$$= 0 \text{ மற்றெங்கிலும்}$$

இது n சமன்பாட்டுப் படிகளை உடைய கைவர்க்கப் பரவலின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகும்.

குறிப்பு : (1) $\frac{\chi^2}{2} = x$ எனக்கொள்வோம்.

எனவே $d\chi^2 = 2\,dx$

x-ன் நிகழ்தகவு வகையீட்டுச் சார்பு,

$$d(o(x)) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot e^{-x}(2x)^{\frac{n}{2}-1}\, 2.\, dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-x}(x)^{\frac{n}{2}-1} \cdot dx \qquad 0 \leq x \leq \infty$$

இது $\frac{n}{2}$ வை பண்பளவையாகக் கொண்ட ஒரு காமா மாறி. எனவே χ^2 என்பது n சமன்பாட்டுப்படிகளை உடைய கை வர்க்க மாறியானல், $\frac{\chi^2}{2}$ என்பது, $\frac{n}{2}$ என்பதைப் பண்பளவையாகக் கொண்ட ஒரு காமா மாறி.

குறிப்பு: (2) நிகழ்தகவுச்சார்பு $p(x^2)$ல் முழுமைத்தொகுதியின் பண்பளவை காணப்படாததால் x^2 சோதனை சிலபோது பண் பளவை இல்லாத சோதனையாகவும், கருதப்படுகிறது. இது முற்றிலும், கட்டின்மைக் கூறு n ஐப் பொறுத்தே அமைவதால் இது மிகவும் பயனுள்ள பரவலாகும்.

x^2 பரவலின் விலக்கப்பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு.

$$M_{x^2}(t) = E(e^{tx^2}) = \int_0^\infty e^{tx^2} p(x^2)\, dx^2$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty e^{tx^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2)^{\frac{n}{2}-1} \cdot dx^2$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{1-2t}{2}\right)x^2} (x^2)^{\frac{n}{2}-1} \cdot dx^2$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\left(\frac{1-2t}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$$

எனவே n சமன்பாட்டுப்படிகள் உடைய கைவர்க்க மாறியின் விலக்கப்பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு $(1-2t)^{-\frac{n}{2}}$.

x^2 பரவலின் விலக்கப்பெருக்குத் தொகைகள்

$$M(t) = (1-2t)^{-\frac{n}{2}} = 1 + \frac{n}{2} \cdot 2t + \frac{n(n+2)}{2!}\left(\frac{2t}{2}\right)^2$$

$$+ \frac{n(n+2)(n+4)}{3!}\left(\frac{2t}{2}\right)^3 + \frac{n(n+2)(n+4)(n+6)}{4!}\left(\frac{2t}{2}\right)^4 + \dots\dots +$$

$$\mu_1' = \left(\frac{dM}{dt}\right)_{t=0} = n.$$

$$\mu_2' = \left(\frac{d^2 M}{dt^2}\right)_{t=0} = n\,(n+2).$$

$$\mu_3' = \left(\frac{d^3 M}{dt^3}\right)_{t=0} = n\,(n+2)\,)(n+4).$$

$$\mu_4' = n\,(n+2)\,(n+4)\,(n+6).$$

$$\mu_1' = d = n.$$

$$\mu_2 = \mu_2' - d^2 = n\,(n+2) - n^2 = 2n.$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\,\mu_2'\,d + 2d^3 = n\,(n+2)\,(n+4) - 3\,(n+2n) + 2n^3$$

$$= 8n.$$

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\,\mu_3'\,d + 6\,\mu_2'\,d^2 - 3d^4$$

$$= n\,(n+2)\,(n+4)\,(n+6) - 4n\,(n+2)\,(n+4)\,n + 6n\,(n+2)\,n^2 - 3n^4$$

$$= 12n^2 + 48n.$$

χ^2 பரவலின் பண்புகள்

1. முகடு

$$y = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{\chi^2}{2}} \cdot (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}$$ என்பது கைவர்க்க

மாறியின் நிகழ்தகவுப் பரவல்.

$$\frac{dy}{d\chi^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{d(\chi^2)^2} < 0$$

இவற்றின் தீர்வு முகடைத்தரும்.

$$\frac{dy}{d\chi^2} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left[e^{-\frac{\chi^2}{2}} \cdot -\frac{1}{2}\,(\chi^2)^{\frac{n}{2}-1} + e^{-\frac{\chi^2}{2}} \left(\frac{n}{2}-1\right)(\chi^2)^{\frac{n}{2}-2} \right]$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{\chi^2}{2}} \cdot (\chi^2)^{\frac{n}{2}-2}$$

$$\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)-\frac{\chi^2}{2}\right]$$

ஆனால் $e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{n}{2}-2} \neq 0$

எனவே, $\left(\frac{n}{2}-1\right)-\frac{\chi^2}{2}=0.$

$$\frac{\chi^2}{2}=\frac{n-2}{2}$$

$\chi^1 = n - !$ இப்புள்ளியில் $\frac{d^2 y}{d(\chi^2)^2} < 0$

$\therefore$ கைவர்க்கப் பரவலின் முகடு $= n-2$

2. கூட்டிடை

$$\bar{x} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty \chi^2 \cdot e^{-\frac{\chi^2}{2}} \cdot (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1} \cdot d\chi^2$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty e^{-u} (2u)^{\frac{n}{2}} \cdot 2\, du \quad [\lambda^2 = 2u]$$

$$= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{n}{2}} \cdot du = \frac{2\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = n.$$

3. பரவற்படி

பூஜ்ஜியத்தை மூலமாகக்கொண்டால்,

$$\mu_2' = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty (x^2)^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (x^2)^{\frac{n}{2}-1} \cdot d(x^2)$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty e^{-u} (2u)^{\frac{n}{2}+1} \cdot 2\, du. \quad [\chi^2 = 2u]$$

$$= \frac{4}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty e^{-u} (n)^{\left(\frac{n}{2}+2\right)-1} \cdot du$$

$$= \frac{4\Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{4\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$= \frac{4\left(\frac{n}{2}+1\right)\cdot\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$\mu_2' = \frac{4\left(\frac{n}{2}+1\right)\cdot\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{4n(n+2)}{4}$$

$$= n(n+2).$$

$$\mu_2' = n(n+2)$$

$$(\mu_1')^2 = n^2$$

$$\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2$$

$$= (n)(n+2) - n^2$$

$$= 2n$$

கோட்டளவை

$$\text{பியர்ஸன் கோட்ட அளவை} = \frac{\text{கூட்டிடை — முகடு}}{\text{திட்டவிலக்கம்}}$$

$$= \frac{n-(n-2)}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{2}{n}}$$

எனவே கைவர்க்கப்பரவல் நேர்க்கோட்டம் உடையது· n அதிகமாக, அதிகமாக கோட்ட அளவை பூஜ்யத்தை அணுகுகிறது·

தட்டையளவை

கைவர்க்கப்பரவலின் விலக்கப்பெருக்குத் தொகைகள்·

$\mu_1' = n$; $\mu_2 = 2n$; $\mu_3 = 8n$, $\mu_4 = 12n^2 = 48n$ என நாம் அறிவோம்.

$$\text{எனவே } \beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{8}{n}$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4^2}{\mu_2^3} = \frac{12n^2 + 48n}{4n^2}$$

$$\beta_2 = 3 + \frac{12}{n}$$

எனவே n முடிவிலியை அணுகும்போது β_1, 0 வையும், β_2 3 ஐயும் அணுகுகிறது.

எனவே சமன்பாட்டுப்படிகள் அதிகமானுல், கைவர்க்கப் பரவல் இயல் நிலைப்பரவலை அணுகுகிறது பொதுவாக $n > 30$ ஆக இருக்கும்போது X^2 பரவலுக்குப் பதிலாக இயல்நிலைப் பரவலையே தோராயமாகக் கொள்ளலாம். எனவே கைவர்க்கப் பரவல் பரப்புப் பட்டியலில் $n = 30$ வரைதான் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

கைவர்க்க மாறிகளின் கூட்டல் பண்பு

சார்பற்றகைவர்க்க மாறிகளின் கூட்டுத்கொகையும், X^2 ஒரு கைவர்க்க மாறியாகும்.

X_i^2 $(i = 1, 2 \ldots\ldots k)$ என்பவை k சார்பற்ற X^2 மாறிகள். அவற்றின் சமன்பாட்டுப்படிகள் n_i $(i = 1, 2 \ldots\ldots k)$. ஆனுல்,

$\sum_{i=1}^{k} X_i^2$ என்பது $\sum_{i=1}^{k} n_i$ சமன் பாட்டுப்படிகளை உடைய ஒரு கைவர்க்க மாறியாகும்.

நிறுவுதல்

$$M_{x_i^2}(t) = (1-2t)^{-\frac{n_i}{2}},\ i = 1, 2, \ldots\ldots k$$

$$M_{\Sigma x_i^2}(t) = M_{x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots x_k^2}(t)$$

$$= M_{x_1^2}(t)\, M_{x_2^2}(t) \ldots\ldots M_{x_k^2}(t)$$

($\because$ x_i^2 கள் சார்பற்றவை).

$$= (1-2t)^{-\frac{n_1}{2}}(1-2t)^{-\frac{n_2}{2}} \ldots\ldots (1-2t)^{-\frac{n_k}{2}}$$

$$= (1-2t)^{-\frac{(n_1 + n_2 + \ldots\ldots n_k)}{2}}$$

இது $(n_1 + n_2 \ldots\ldots n_k)$ சமன்பாட்டுப்படிகளாக உடைய ஒரு X^2 மாறியின் விலக்கப்பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு.

எனவே விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பின் மாற்றற்ற தன்மை தேற்றத்தின் படி $\sum_{i=1}^{k} X^2$ என்பது $\sum_{i=1} n$ ஐ சமன்பாட்டுப்படிகளாக உடைய கைவர்க்க மாறியாகும்.

தேற்றம்

χ_1^2, χ_2^2 என்பவை இரு சார்பற்ற X^2 மாறிகள். அவை n_1, n_2 சமன்பாட்டுப்படிகளை உடையவை. எனின் $\frac{X_1^2}{X_2^2}$ என்பது ஒரு $\beta_2\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)$ மாறி என நிறுவுக.

நிறுவுதல்

χ_1^2, χ_2^2 என்பவை இருசார்பற்ற கைவர்க்க மாறிகளாதலால், அவற்றின் கூட்டு நிகழ்தகவு வகையீட்டுச் சார்பு கூட்டு நிகழ்தகவுதேற்றம் மூலம் கீழ்க்கண்டவாறு கிடைக்கின்றது

$$dp(x_1^2, x_2^2) = \left[\frac{1}{2^{\frac{n_1}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)} e^{-\frac{x_1^2}{2}} (\chi_1^2)^{\frac{n_1}{2}-1} dx_1^2\right]$$

$$\times \left[\frac{1}{2^{\frac{n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \times e^{-\frac{x_2^2}{2}} (\chi_2^2)^{\frac{n_2}{2}-1} dx_2^2\right]$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{(x_1^2+x_2^2)}{2}}$$

$(x_1^2)^{\frac{n_1}{2}-1} (x_2^2)^{\frac{n_2}{2}-1} dx_1^2 . dx_2^2 \; 0 \leq x_1^2, x_2^2 \leq \infty$ கீழ்க்கண்ட மாற்றத்தை ஏற்படுத்துவோம்.

$$u = \frac{x_1^2}{x_2^2} \; ; \; v = x_2^2$$

$$x_1^2 = uv; \; x_2^2 = v.$$

எனவே மாற்றத்தின் ஜாக்கோபியின் J, கீழ்க்கண்ட அணி கோவையின் மூலம் கிடைக்கிறது.

$$J = \frac{\partial(x_1^2 \, x_2^2)}{\partial(u, v)} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1^2}{\partial u} & \frac{\partial x_1^2}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2^2}{\partial u} & \frac{\partial x_2^2}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = v.$$

u, v எனும் சமவாய்ப்பு மாறிகளின் கூட்டுப் பரவல்

$$dH(u, v) = \frac{1d}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} e^{-\frac{(1+u)v}{2}} (uv)^{\frac{n_1}{2}-1}$$

$$\times (v)^{\frac{n}{2}-1} v, du \, . \, dv$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\, e^{-\frac{(1+\ )u}{2}}\, u^{\frac{n_1}{2}-1}$$

$$u^{\frac{n_1+n_2}{2}-1}\,.\,du\,.\,dv$$

$$0 \leq u,\ v \leq \infty$$

0 விலிருந்து ∞ வரை உள்ள இடைவெளியில் v ஐப்பொறுத்துத் தொகைப் படுத்தினல், u யினுடைய விளிம்புப் பரவல்,

$$dH_1(u) = \int_0^\infty d\,H(u, v)$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\, u^{\frac{n_1}{2}-1}\, du$$

$$\times \int_0^\infty e^{-\frac{(1+u)\,v}{2}}\, v^{\frac{n_1+n_2}{2}-1}\, dv$$

$$= \frac{u^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\left(\frac{1+u}{2}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}\, du$$

$$= \frac{1}{\beta\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \cdot \frac{u^{\frac{n}{2}-1}}{(1+u)^{\frac{n+n_2}{2}}}\, du \qquad 0 \leq u \leq \infty$$

எனவே $V = \dfrac{x_1^2}{x_2^2}$ என்பது $\beta_2\left(\dfrac{n_1}{2}, \dfrac{n_2}{2}\right)$ மாறியாகும்.

தேற்றம்

x_1^2, x_2^2 என்பவை n_1, n_2 சமன்பாட்டுப் படிகளை உடைய சார்பற்ற கை வர்க்க மாறிகள் ஆனால்,

1. $u = \dfrac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}$ என்பது $\beta_1 \left(\dfrac{n_1}{2}, \dfrac{n_2}{2}\right)$ மாறியாகவும்,

2. $v = x_1^2 + x_2^2$ என்பது $n_1 + n_2$ சமன்பாட்டுப்படிகளை உடைய கை வர்க்க மாறியாகவும் சார்பற்ற முறையில் பரவியுள்ளன. (independently distributed).

நிறுவுதல்

$$dp\,(x_1^2, x_2^2) = \left[\frac{1}{2^{\frac{n_1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\, e^{-\frac{x_1}{2}}\,(x_1^2)^{\frac{n_1}{2}-1}\, dx_1^2\right]$$

$$\times \left[\frac{1}{2^{\frac{n_1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\, e^{-\frac{x_2^2}{2}}\,(x_2^2)^{\frac{n_2}{2}-1}\, dx_2^2\right]$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\, e^{-\frac{(x_1^2+x_2^2)}{2}}$$

$$\cdot (x_1^2)^{\frac{n_1}{2}-1}\,(x_2^2)^{\frac{n_2}{2}-1}\, dx_1^2 \cdot dx_2^2$$

$$0 \le x_1^2, x_2^2 \le \infty$$

கீழ்க்கண்ட மாற்றத்தை ஏற்படுத்துவோம்.

$$u = \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}; \quad v = x_1^2 + x_1^2$$

$$uv = x_1^2,\ x_2^2, = -x_1^2 = (1-u)\,v$$

x_1^2, x_2^2 இவையிரண்டும் 0-விலிருந்து ∞ வரை பரவியுள்ளதால் u-வின் மதிப்புகள் 0-விலிருந்து 1 வரையும், v-யின் மதிப்புகள் 0-விலிருந்து ∞ வரையும் பரவியுள்ளன.

மாற்றத்தின் ஜாகோபியன் $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1^2}{\partial u} & \frac{\partial x_1^2}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2^2}{\partial u} & \frac{\partial x_2^2}{\partial v} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} v & u \\ -v & 1-u \end{vmatrix} = v$$

$$\therefore \quad d_1 + (u, v) = \frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}} \Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot$$

$$e^{-\frac{v}{2}} \cdot (uv)^{\frac{n_1}{2}-1} \times [(1-u)\,v]^{\frac{n_2}{2}-1} \times |J|\, du \cdot dv$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}} \Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}$$

$$\times u^{\frac{n_1}{2}-1} (1-u)^{\frac{u_2}{2}-1} \times e^{-\frac{v}{2}} \cdot v^{\frac{n_1+n_2}{2}-1} du \cdot dv$$

$$= \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot u^{\frac{n_1}{2}-1} \right.$$

$$\left. \cdot (1-u)^{\frac{n_2}{2}-1} du \cdot \right] \times \left[\frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}} \Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)} \cdot \right.$$

$$\left. \times e^{-\frac{v}{2}} \cdot v^{\frac{n_1+n_2}{2}-1} \cdot dv \right]$$

u, ı-யின் கூட்டு நிகழ்தகவு வகையீட்டுச் சார்பு, அவற்றின் தனித்தனி வகையீட்டுச் சார்புகளின் பெருக்குத் தொகையாக இருப்பதால், u, v சார்பற்ற முறையில் பரவியுள்ளன. அவற்றின் நிகழ்தகவு வகையீட்டுச் சார்புகள் முறையே,

$$dH_1(u) = \frac{1}{\beta\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \cdot n^{\frac{n_1}{2}-1} (1-u)^{\frac{n_2}{2}-1} \cdot du$$

$$0 \leq u \leq 1$$

மேலும், $$dH_2(v) = \frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}} \Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{V}{2}}$$

$$\cdot v^{\frac{n_1+r_2}{2}} \cdot du \quad 0 \leq v \leq 1.$$

u என்பது $\beta_1\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)$ மாறியாகவும், v என்பது $(n_1 + n_2)$ சமன்பாட்டுப்பபடியை உடைய x^2 மாறியாகவும் உள்ளது.

தேற்றம்

n-ன் மதிப்பு அதிகமாக, அதிகமாக கைவர்க்கப் பரவல் இயல்நிலைப் பரவலை அணுகுகிறது.

$$u = \frac{x-a}{h} \text{ எனின்,}$$

$$M_u(t) = e^{-\frac{at}{h}} \cdot M_a\left(\frac{t}{h}\right)$$

$$M_{\frac{x^2-n}{\sqrt{2n}}}(t) = e^{-\frac{nt}{\sqrt{2n}}} \left(1 - \frac{2t}{\sqrt{2n}}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

$$\log M(t) = \frac{-nt}{\sqrt{2n}} - \frac{n}{2}\log\left[1 - \frac{2t}{\sqrt{2n}}\right]$$

$$= -\frac{nt}{\sqrt{2n}} + \frac{n}{2}\left[\frac{2t}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{2}\left(\frac{2t}{\sqrt{2n}}\right)^2 + \cdots\cdots\right]$$

$$\log_e M(t) = \frac{1}{2}t^2 + 0\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots\cdots$$

$n \to \infty$ எனும் போது, $\log_e M(t) \to \frac{1}{2}t^2$

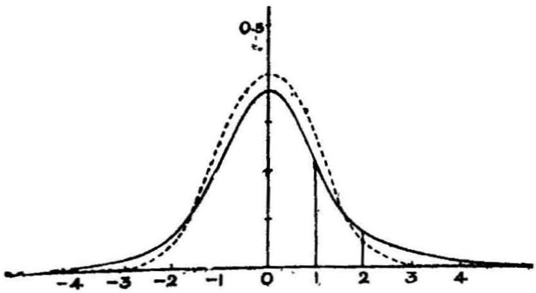
எனவே, n முடிவிலியை அணுகும்போது, கைவர்க்க மாறி இயல்நிலைப் பரவலை அணுகுகிறது.

$\therefore \quad M(t) \to \frac{1}{2} t^2$. எனவே n முடிவிலியை அணுகும்போது, கைவர்க்க மாறி இயல்நிலைப் பரவலை அணுகுகிறது.

ஸ்டூடன்டின் ' ' பரவல் (Student's 't' distribution)

$x_1, x_2, \ldots$ ஒரு கூறின் n உறுப்புகள் ஆயின் $\bar{x} = \frac{\Sigma x_r}{n}$.

கூறின் அளவு பெரியதாக இருந்தால் கூறின் கூட்டுச்சராசரி ஆகிய $\bar{x}$ ஐ முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச்சராசரி m-ன் மிகச் சிறந்த மதிப்பீடாகக் கொள்ளலாம். இது போலவே கூறின் திட்டவிலக்கமாகிய s-ஐ முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கத்தின் மிகச் சிறந்த மதிப்பீடாகக் கொள்ளலாம்.



படம் 15.4

ஆனால் கூறின் அளவு சிறியதாக இருந்தால் $m = \bar{x}$ என்று மட்டுமே எடுத்துக் கொள்ளலாம். முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் $\sigma = s$ எனக் கொள்ள இயலாது.

பெஸ்ஸலின் திருத்தம்

கூறு சிறியதாக இருந்தால்

$$s^2 = \frac{1}{n} \Sigma (x_r - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{n} [\Sigma x_r^2 - 2\bar{x} \Sigma x_r + n \bar{x}^2]$$

$$= \frac{\Sigma x_r^2}{n} - 2\bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{x}^2$$

$$= \frac{\Sigma x_r^2}{n} - \bar{x}^2 \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \Sigma (x_r - m)^2 = \frac{1}{n} \Sigma x_r^2 - 2m\bar{x} + m^2 \qquad \ldots\ldots (2)$$

(1), (2) இவற்றிலிருந்து,

$$\sigma^2 - s^2 = m^2 - 2m\bar{x} + \bar{x}^2$$
$$= (\bar{x} - m)^2 \qquad \ldots\ldots \quad (3)$$

கூட்டுச்சராசரியின் திட்டப்பிழை $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ · n அளவுகள் கொண்ட கூறுகளின் எண் N ஆனால்,

முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச்சராசரி m-லிருந்து எடுக்கப்பட்ட, கூறுகளின் கூட்டுச்சராசரியின் திட்டவிலக்கம்

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

எனவே $\frac{\Sigma (\bar{x} - m)^2}{N} = \frac{\sigma^2}{n}$

எனவே $(\bar{x} - m)^2$-ன் சராசரி மதிப்பு $\left(\frac{\sigma^2}{n}\right)$ · இம் மதிப்பை (3)-ல் பிரதியிட,

$$\sigma^2 - s^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\sigma^2 \left(\frac{n-1}{n}\right) = s^2$$

$$\sigma^2 = \frac{n s^2}{n-1} = \frac{\Sigma (x_r - \bar{x})^2}{n-1}$$

எனவே முழுமைத் தொகுதியின் பரவற்படியின் மதிப்பீட்டைப் பெறுவதற்கு வகுக்கும் எண் n என எடுத்துக் கொள்ளாமல், $(n-1)$ என எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

கூறின் பரவற்படியைவிட முழுமைத் தொகுதியின் பரவற்படி ஓரளவு அதிகமாய் இருக்கிறது. இவ்வேறுபாடு கூறின் ஒருபுறச் சாய்வு (Sampling bias) என்று கூறப்படுகிறது. இத்திருத்தம் 'பெஸ்ஸலின் திருத்தம்' எனக் கூறப்படுகிறது. கூறின் பரவற்படிக்கு கட்டின்மைக் கூறுகள் $(n-1)$ என இருக்க வேண்டும். இத்திருத்தம் கூறின் அளவு 50-க்குக் குறைந்திருக்கும் போது பயன்படுகிறது. $\bar{x} = \frac{\Sigma x_r}{n}$ எனப் பயன்படுத்துவதால், ஒரு கட்டின்மை கூறு குறைந்து, $(n-1)$ கட்டின்மைக் கூறுகளாகிறது. எனவே $\sigma = s\sqrt{\frac{n}{n-1}}$

ஸ்டூடண்டின் 't' பரவல் (Student's 't' Distribution)

$t = \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ பெருங்கூறுகளின் இயல்நிலைப் பரவலைத் தழுவுகிறது. ஆனால் இதில் முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் σ-விற்கு பதிலாக, கூறிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட அதன் மதிப்பீடாகிய $s\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ -ஐ பிரதியிட்டால் கிடைக்கும்.

$$t = \frac{\bar{x} - m}{s \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{x} - m}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}}$$

n சிறியதாக இருக்கும்போது இயல்நிலைப் பரவலைத் தழுவுவது இல்லை. முதன்முதலில் ஸ்டூடண்ட் (student) என்ற புனைப் பெயரில், *W.S.* காஸெட் (*W.S.* Gosset) என்பவர் இதன் பரவல்,

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}\, \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}}, \quad \infty - \leq t \leq \infty$$

எனக் கண்டறிந்தார்.

t பரவலின் நிகழ்தகவுச் சார்பைப் பெறுதல்

முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி, திட்டவிலக்கம் முறையே m, σ எனவும் அதிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட n அளவுடைய கூறின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$, திட்டவிலக்கம் s எனவும் கொள்வோம்.

$$t = \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$t^2 = \frac{n(\bar{x} - m)^2}{\sigma^2} = \frac{n(\bar{x} - m)^2}{\frac{ns^2}{n-1}}$$

$$\text{அல்லது } \frac{t^2}{(n-1)} = \frac{(\bar{x} - m)^2}{\frac{\sigma^2}{n}} \cdot \frac{1}{\frac{ns^2}{\sigma^2}} = \frac{(\bar{x} - m)^2 \Big/ \left(\frac{\sigma^2}{n}\right)}{\frac{ns^2}{\sigma^2}}$$

∴ x_i, $[i=1, 2......n]$ என்பது, கூட்டுச் சராசரி m ஆகவும், பரவற்படி σ^2 ஆகவும் உடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறு ஆதலால்

$$\bar{x} \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\bar{x}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

எனவே $\dfrac{(\bar{x}-n)^2}{\frac{\sigma^2}{n}}$,ஒரு கட்டின்மைக் கூறுக்கொண்ட χ^2 மாறியாகும். இது திட்ட இயல்மாறியின் வர்க்கமாக இருப்பதால்]

மேலும் $\frac{\nu s^2}{\sigma^2}$, $(n-1)$ கட்டின்மைக் கூறுகளை உடைய ஒரு χ^2 மாறியாகும். $\bar{x}$-ம், s^2-ம் சார்பற்றுப் பரவியிருப்பதால், $\frac{t^2}{n-1}$, இரண்டு சார்பற்ற χ^2 மாறிகளின் விகிதம் ஆகும். அவற்றின் கட்டின்மைக் கூறுகள் முறையே 1, $(n-1)$ ஆகும்.

எனவே $\frac{t^2}{n-1}$ ஒரு $\beta_2\left[\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right]$ மாறி ஆகும். இதன் பரவல்,

$$dP = \frac{\left(\frac{t^2}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}-1}}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)\left(1+\frac{t^2}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}} d\left(\frac{t^2}{\gamma}\right) \qquad 0 \leq t^2 \leq \infty$$

[இங்கு $\gamma = (n-1)$]

$$= \frac{\frac{1}{\gamma} 2t\, dt}{\left(\frac{t^2}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)\left(1+\frac{t^2}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}}$$

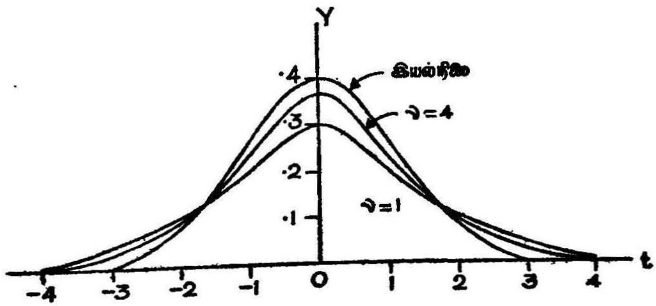
$$\therefore \quad dP(t) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}\,\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)\left(1 + \frac{t^2}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}}\, dt,$$

$$-\infty \leq t \leq \infty$$

தொகை, $-\infty$ யிலிருந்து $+\infty$ வரை ஒன்று ஆக இருப்பதால் மேற்கண்ட தொடர்பில் 2 இருப்பதில்லை. இந்நிகழ்தகவுச் சார்பே, $\gamma = (n-1)$ கட்டின்மைக் கூறுகள் கொண்ட ஸ்டூடன்ட் t பரவலாகும்.

பின்வரும் படத்தில் $\gamma = 4$ உடைய t பரவலின் நிகழ்வெண் வரையும் (புள்ளியிடப்பட்ட வரை) $m = 0$, $\sigma = 1$ ஆக உடைய இயல்நிலை நிகழ்வெண்வரையும் வரையப்பட்டுள்ளன.

γ-ன் பெரிய மதிப்புகளுக்கு t-ன் நிகழ்வெண்வரை இயல்நிலை வரைக்கு மிக அண்மையில் செல்கிறது. ஆயின் γ-ன் சிறிய மதிப்புகளுக்கு, t-வரை இயல்நிலை வரையிலிருந்து அதிக தூரம் விலகிச் செல்கிறது. எனவே கூட்டுச்சராசரியிலிருந்து அதிக விலக்கம் ஏற்பட நிகழ்தகவு, t வரையில் இயல்நிலைப் பரவலைவிட அதிகமாக உள்ளது.



படம் 15·5

t வரையின் பண்புகள்

t-ஐ x அச்சிலும் $f(t)$-யை y அச்சிலும் குறித்தால் $f(t)$ வரையின் சமன்பாடு.

$$y = \frac{1}{\sqrt{\gamma}\,\beta\left(\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{\gamma}\right)^{\gamma + \frac{1}{2}}}$$

1. $x = 0$ ஆக இருக்கும் போது $\left(1+\frac{x^2}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}$ மீச்சிறு மதிப்பை அடைவதால் y மீப்பெரு மதிப்பை அடைகிறது. $t = 0$ என்பதே t வரையின் முகடாகும்.

2. y அச்சைப் பொறுத்து t வரை சமச்சீராக உள்ளதால் t பரவலின் கூட்டுச்சராசரியே முகடாகும்.

3. x அச்சு t வரையின் எட்டாப்புள்ளி தொடுவரையாக இருக்கும். $\gamma \to \infty$ என்னும்போது பரவல் இயல்நிலைப் பரவலை அணுகுகிறது.

$t = 0$ என்னும் கோட்டிற்கு இருபுறமும் $f(t)$ சமச்சீராக உள்ளதால் எல்லா ஒற்றைப்படை விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளும் 0 ஆகும்.

$$\mu_{2k+1} = 0 \; (k = 1, 2 \;\ldots\ldots)$$

$$\mu_{2k} = \mu'_{2k}$$

$$\mu_{2k}' = \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k} f(t)\, dt$$

[$t = 0$ பரவலின் கூட்டுச்சராசரி ஆகும்.]

$$\frac{2}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)\sqrt{\gamma}} \int_0^{\infty} \frac{t^{2k}}{\left(1+\frac{t^2}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}}\, dt$$

$$1 + \frac{t^2}{\gamma} = \frac{1}{y}\,; \qquad t^2 = \gamma\left(\frac{1}{y} - 1\right) = \gamma\left(\frac{1-y}{y}\right)$$

$$2t\, dt = -\frac{\gamma}{y^2}\, dy$$

$$t = 0,\; y = 1\,;\; t = \infty,\; y = 0.$$

$$\mu'_{2k} = \frac{2}{\sqrt{\gamma}\,\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)} \int_0^1 \frac{t^{2k}}{\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}} \cdot \frac{\gamma}{2t\, y^2}\, dy$$

$$= \frac{\sqrt{\gamma}}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)} \int_0^1 (t^2)^{\frac{2k-1}{2}} y^{\frac{\gamma+1}{2}-2}\, dy$$

$$\frac{\sqrt{\gamma}}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)} \int_0^1 \left[\frac{\gamma(1-y)}{y}\right]^{k-\frac{1}{2}} y^{\frac{\gamma+1}{2}-2}\, dy.$$

$$\frac{\gamma^k}{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)} \beta\left[\frac{\gamma}{2} - k, k + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \gamma^k \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2} k + \right)\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2} - k + k + \frac{1}{2}\right)}\right]$$

$$= \gamma^k \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2} - k\right)\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}$$

$$\mu'_{2k} = \gamma^k \frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)\left(\frac{\gamma}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{\gamma}{2}-k\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}-k\right)}$$

$$\therefore \quad \mu_{2k} = \gamma^k \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots\cdots 3\cdot 1)}{(\gamma-2)(\gamma-4)(\gamma-2k)}$$

$$\mu_2 = \frac{\gamma'}{\gamma-2} = \frac{\gamma}{\gamma-2}$$

$$\mu_4 = \frac{\gamma^2 \cdot 3\cdot 1}{(\gamma-2)(\gamma-4)}$$

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = 0; \ \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{3\gamma^2}{(\gamma-2)(\gamma-4)} \ \frac{(\gamma-2)^2}{\gamma^2}$$

$$= \frac{3(\gamma-2)}{(\gamma-4)}$$

$\gamma \to \infty, \quad \beta_2 \to 3.$

எனவே கட்டின்மைக் கூறுகள் அதிகமாக,அதிகமாக t பரவல் இயல் நிலைப்பரவலை அணுகுகிறது.

தேற்றம்

X, கூட்டுச்சராசரி 0-ஆகவும், பரவற்படி 1 ஆகவும் உடைய ஒரு திட்ட இயல்நிலை மாறி (Standard normal variate) y, n கட்டின்மைக் கூறுகளை உடைய ஒரு χ^2 கை வர்க்க மாறி $t = \dfrac{x}{\sqrt{\dfrac{y}{n}}}$ ன் பரவலைக் காண்க.

x ஒரு திட்ட இயல் மாறி எனவே

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

y. n கட்டின்மைக் கூறுகள் கொண்ட ஒரு χ^2 மாறியாகும்.

$$\text{எனவே } f(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}$$

$$\therefore f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot y^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{y}{2}}$$

$$t = \frac{x}{\sqrt{\frac{y}{n}}} \text{ என இருக்கட்டும்.}$$

$u = y$

$$\therefore \quad \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\frac{y}{n}}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{y}{n}} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \sqrt{\frac{y}{n}}$$

$$f(t, u) = f(n, y) \; |J|$$

$$\therefore \quad f(t, u) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi n}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} y^{\frac{n}{2} - 1 + \frac{1}{2}}$$

$$\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot e^{-\frac{y}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} y^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{y}{2}\left(1 + \frac{x^2}{y}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} u^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{u}{2}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)}$$

$$-\infty < t < \infty \quad u > 0$$

$= 0$ மற்றெங்கிலும்

$$z = \frac{u}{2}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)$$

$$dz = \frac{du}{2}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)$$

$$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} \; \frac{z^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} (2)^{\frac{n-1}{2}}}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}} \; \frac{e^{-z}\, dz \times 2}{\left(1+\frac{t^2}{2}\right)}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} \times 2^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} \; \frac{1\; z^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} e^{-z}}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left[1+\frac{t^2}{n}\right]^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^{\infty} z^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}-1} e^{-z}\, dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}} \quad \text{......}(-\infty < t < \infty)$$

$$= 0 \quad \text{......}$$ (மற்றெங்கிலும்)

இது ஸ்டூடென்டின் t பரவலாகும்.

எ.கா. 25 ஐக் கூட்டுச்சராசரியாகக் கொண்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து, 5 அளவுள்ள ஒரு சம வாய்ப்புக்கூறு எடுக்கப்படுகிறது. பரவற்படி 16 ஆக இருக்கும்போது, கூறின் கூட்டுச் சராசரி 30-க்கு மேல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

$\bar{x}$, 25-ஐக் கூட்டுச்சராசரியாகக் கொண்டு, இயல்நிலைப் பரவலைத் தழுவுகிறது. எனவே, $\bar{x}-25$ என்பது கூட்டுச்சராசரி

0 ஆக உடைய இயல்நிலை மாறியாகும். s^2 5—1=4 கட்டின்மை கூறுகளைக் கொண்ட X^2 மாறியாகும்.

எனவே, $\left[\frac{\bar{x}-25}{s}\right]\sqrt{5-1}$ ஒரு t-மாறியாகும்.

$$t > t = \frac{(30-25)}{4}\sqrt{4}$$

$$t > 2{\cdot}5$$

$$P[t > 2{\cdot}5] = \int_{2\cdot5}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{4+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi.4}\ \Gamma\left(\frac{4}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{2}\right)^{-\frac{5}{2}} dt$$

$$= \int_{2\cdot5}^{\infty} \frac{\Gamma(2{\cdot}5)}{2\sqrt{\pi}\ \Gamma(2)}\left(1+\frac{t^2}{4}\right)^{-\frac{5}{2}} dt$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}} \int_{2\cdot5}^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{4}\right)^{-\frac{5}{2}} dt = \frac{3}{8}\left[\frac{-2t^3}{3\left(1+\frac{t^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}\right]_{2.5}^{\infty}$$

$$= \frac{3}{8}\left[\frac{2\times6{\cdot}25\times2{\cdot}5}{12\times3\left(1+\frac{6\cdot25}{4}\right)^3}\right] = \frac{3}{8}\left[\frac{31{\cdot}25}{36[2{\cdot}56]^3}\right]$$

$$= 0{\cdot}02$$

F-பரவல்

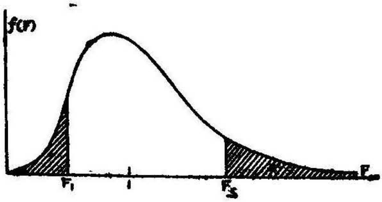
X_1^2, X_2^2 என்பவை முறையே n_1, n_2-ஐச் சமன்பாட்டுப் படிகளாக கொண்ட இரு சார்பற்ற கைவர்க்க மாறிகள் எனின்,

$$F = \frac{X_1^2}{n_1} \bigg/ \frac{X_2^2}{n_2} \cdot (n_1 > n_1)$$ · என வரையறுக்கப்படுகிறது.

இது ஸ்நெக்டாரின் (Snecder) F பரவல் n_1, n_2 சமன்பாட்டுப் படிகளுடன் தழுவுகிறது. அதன் நிகழ்தகவுச் சார்பு,

$$dP(F) = \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}}{\beta\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \times \frac{F^{\frac{r_1}{2}-1}}{\left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right)} F^{\frac{n_1+n_2}{2}}$$ என்பதன்

மூலம் தரப்படுகிறது, $(0 \le F \le \infty)$



படம் 15·6

நிறுவுதல்

$$F = \frac{x_1^2}{n_1} \bigg/ \frac{x_2^2}{n_2}$$

$$\therefore \frac{n_1}{n_2} F = \frac{x_1^2}{x_2^2}$$

இது n_1 n_2 சமன்பாட்டு படிகளைக் கொண்ட இரு கைவர்க்க மாறிகளின் விகிதமாகும். எனவே இது ஒரு $\beta_2 \left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)$ மாறியாகும். எனவே இதன் நிகழ்தகவுச் சார்பு

$$= \frac{1}{\beta\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right) F^{\frac{n_1}{2}-1}}{\left(1 + \frac{n_1}{n_2} F\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} \cdot d\left(\frac{n_1}{n_2} F\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} F^{\frac{n_1}{2}-1}}{\beta\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)\left(1 + \frac{n_1}{n_2} F\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} dt \quad 0 \le F \le \infty$$

இயல்நிலைத் தொகுதிகளிலிருந்து n_1, n_2 அளவுடைய சார்பற்ற இரு கூறுகள் எடுக்கப்பட்டால் அவற்றின் கூறு பரவற்படி S_1^2, S_2^2 ஆனால், $\frac{n_1 S_1^2}{n_1 - 1} \Big/ \frac{n_2 S_2^2}{n_2 - 1} = F\ (n_1 - 1,\ n_2 - 2)$.

அதாவது $\frac{n_1 S_1^2/n_1 - 1}{n_2 S_2^2/n_2 - 1}$, F பரவலை $(n_1 - 1)$, $(n_2 - 1)$ சமன்பாட்டுப்படிகளுடன் தழுவுகிறது.

நிறுவுதல்

$X_1, X_2 \ldots\ldots X_{n_1}$, $Y_1, Y_2 \ldots Y_{n_2}$ என்பவை இரு கூறுகளானால் $\frac{n_1 S_1^2}{\sigma^2} = \frac{\Sigma (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \chi^2\ n_{1-1}$

$$\frac{n_2 S_2^2}{\sigma^2} = \frac{\Sigma (Y_i - \bar{Y})^2}{\sigma^2} = \chi^2\ n_{2-1}.$$

ஒரு இயல்நிலைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படும் n அளவுள்ள ஒரு கூறின் பரவற்படி S^2 ஆகவும், முழுமைத் தொகுதியின் பரவற்படி σ^2 ஆகவும் இருக்கும் போது, $\frac{n S^2}{\sigma^2}$ என்பது χ^2 பரவலை $(n - 1)$ சமன்பாட்டுப் படிகளுடன் தழுவுகிறது.

அதேபோல், $\frac{n_2 S_2^2}{\sigma^2} = \frac{\Sigma (Y_i - \bar{Y})^2}{\sigma^2} = \chi^2_{n_2 - 1}$

$$\text{எனவே}\quad \frac{\frac{n_1 S_1^2}{\sigma^2} \Big/ n_1 - 1}{\frac{n_2 S_2^2}{\sigma^2} \Big/ n_2 - 1} = F\,[(n_1 - 1),\ (n_2 - 1)]$$

[இரு கைவர்க்கங்களும் சார்பற்றவை] இப்பரவலைப் பரவற்படி விகிதப் பரவல் (Variance ratio distribution) என்றும் கூறுவதுண்டு.

F பரவலின் மாறிலிகள்

ஆதியை மூலமாகக் கொண்டு,

$$\mu'_k = F(F^k) = \int_0^{\infty} F^k\, p(F)\, dF$$

$$= \frac{\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^{\frac{\gamma_1}{2}}}{\beta\left(\frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_2}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{F^k\, F^{\frac{\gamma_1}{2}-1}}{\left(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}F\right)^{\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}}}\, dF$$

$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} F = y \quad \therefore\ dF = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\, dy$

$$\mu_k' = \frac{\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^{\frac{\gamma_1}{2}}}{\beta\left(\frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_2}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}y\right)^{k+\frac{\gamma_1}{2}-1}}{(1+y)^{\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}}} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) dy$$

$$= \frac{\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^k}{\beta\left(\frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_2}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{y^{k+\frac{\gamma_1}{2}-1}}{(1+y)^{\frac{\gamma_1}{2}+k+\frac{\gamma_2}{2}-k}}\, dy$$

$$= \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^k \frac{1}{\beta\left(\frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_2}{2}\right)} \beta\left(k+\frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_2}{2}-k\right)$$

$$\left[k < \frac{\gamma_2}{2}\right]$$

$$= \left[\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} = \beta(m, n)\ m > 0,\ n > 0\right]$$

கூட்டுச் சராசரி

$= \mu_1'$ (ஆதியை மூலமாகக் கொண்டு)

$$= \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot \frac{\Gamma\left[1+\left(\frac{\gamma_1}{2}\right)\right]\Gamma\left[\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)-1\right]}{\Gamma\left(\frac{\gamma_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)}$$

$$= \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot \frac{\left(\frac{\gamma_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_1}{2}\right)\Gamma\left[\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)-1\right]}{\Gamma\left(\frac{\gamma_1}{2}\right)\left[\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)-1\right]\Gamma\left[\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)-1\right]}$$

$$[\because \quad \Gamma_r = (r-1)\,\Gamma\,(r-1)]$$

$$= \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 2}$$

∴ F பரவலின் கூட்டுச் சராசரி γ_1-ஐப் பொறுத்து அமைவதில்லை.

$$\mu_2' = \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^2 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_1}{2}\right)\left[\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)-2\right]}{\Gamma\left(\frac{\gamma_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)}$$

$$= \left(\frac{\gamma_2}{\lambda_1}\right)^2\left[\left(\frac{\gamma_1}{2}\right)+1\right]\left(\frac{\gamma_1}{2}\right)$$

[$\Gamma_r = (r - 1\ \Gamma\ r)$ — என்பதை பயன்படுத்தி]

$$= \frac{\gamma_2^2(\gamma_1 + 2)}{\gamma_1(\gamma_2 - 2)(\gamma_2 - 4)}$$

$$\therefore \quad \mu_2 = \mu_2' - \mu_2'^2$$

$$= \frac{\gamma_5^2(\gamma_1 + 2)}{\gamma_1(\gamma_3 - 2)(\gamma_2 - 4)} - \frac{\gamma_2^2}{(\gamma_2 - 2)^2}$$

$$= \frac{2\gamma_2^2}{\gamma_2 - 2}\left[\frac{\gamma_1 + 2}{\gamma_1(\gamma_2 - 4)} - \frac{1}{\gamma_2 - 2}\right]$$

$$= \frac{2\gamma_2^3(\gamma_2 + \gamma_1 - 2)}{\gamma_1(\gamma_2 - 2)^2(\gamma_2 - 4)}$$

இதுபோலவே $r = 3, 4$ என μ_r'-ல் பிரதியிட, μ_3', μ_4' என்ற விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகளையும், மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளையும் பின்வரும் தொடர்பைப் பயன்படுத்திப் பெறலாம்.

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\,\mu_2'\,\mu_1' + 2\,\mu'^3$$
$$\mu_4 = \mu_4' - 4\,\mu_3'\,\mu_1' + 6\,\mu_2'\,\mu_1'^2 - 3\,\mu_1'^4$$

F பரவலின் முகடு

$$\log p(F) = C + \left(\frac{\gamma_1}{2} - 1\right)\log F - \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right)$$

$$\log\left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} F\right)$$

'C' என்பது F-ன் சார்பற்ற மாறிலி ஆகும்.

$$\frac{\partial}{\partial F}[\log p(F)] = \left(\frac{\gamma_1}{2}-1\right)\cdot\frac{1}{F} - \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\gamma}{\gamma_2}F\right)}\cdot\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

$p'(F) = \frac{\partial}{\partial F}p(F) = 0$ ஆதலால்,

$$\frac{\gamma_1 - 2}{F} - \frac{\gamma_1(\gamma_1+\gamma_2)}{2(\gamma_2+\gamma_1 F)} = 0.$$

$$F = \frac{\gamma_2(\gamma_1 - 2)}{\gamma(\gamma_2 + 2)}$$

இந்தப் புள்ளியில் $p''(F) < 0$. எனவே முகடு $= \frac{\gamma_2(\gamma_1-2)}{\gamma_1(\gamma_2+2)}$

குறிப்பு 1. $F > 0$ ஆதலால், $\gamma_1 > 2$ ஆக இருக்கும்போது தான் முகடை வரையறுக்க இயலும்.

குறிப்பு 2. முகடு $= \frac{\gamma_2}{\gamma_2+2}\cdot\frac{\gamma_1-2}{\gamma_1}$

எனவே F பரவலின் முகடு ஒன்றைவிடக் குறைவாக உள்ளது.

x-ன் பரவல் n கட்டின்மைக் கூறுகள் கொண்ட t பரவலாக இருந்தால்

$x^2, 1, n$ இவற்றைக் கட்டின்மைக் கூறுகளாகக் கொண்ட F பரவலில் அமையும் எனக்காட்டுக.

$$f(x) = \frac{2\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\;\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad x > 0$$

$$y = x^2$$
$$dy = 2x\,dx$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

எனவே $f(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$= \frac{2\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2\sqrt{n}} \times y^{-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{y}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}-1}$$

$$\times \left(1+\frac{1}{n}\cdot y\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

இது 1, n கட்டின்மை கூறுகளையுடைய F பரவலாகும்.

எதிர்மறை ஈருறுப்புப் பரவல் (Negative Binomial Distribution)

பாய்ஸான் பரவலில் கூட்டுச்சராசரி, பரவற்படிக்குச் சமம். ஈருறுப்பு பரவலில் கூட்டுச்சராசரி, பரவற்படியைவிட அதிகமாக இருக்கும். எப்போதாவது ஒரு சில பரவல்களில், பரவற்படி, கூட்டுச்சராசரியைவிடப் பெரியதாக இருக்கும் பூச்சிகளின் மரணங்கள், பூச்சிக் கடிகளின் எண்ணிக்கை போன்றவை எதிர்மறை ஈருறுப்புப் பரவலைத்தழுவுகின்றன. இதன் பரவற்படி, கூட்டுசராசரியைவிடப் பெரியது. இதனை ஈருறுப்பு பரவலின் மற்றொரு வடிவமாகக் கொள்ளலாம். தொடர்ந்துவரும் n முயற்சி

களில் (i) முயற்சிகள் சார்பற்றவை, (ii) ஒரு முயற்சியில் வெற்றியின் நிகழ்தகவு ', சோதனைக்குச் சோதனை மாருமல் உள்ளது. $f(x, r, p)$ என்பது, $x+r$ முயற்சிகளில் r ஆவது வெற்றிக்குமுன் x தோல்விகள் ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் குறிக்கிறது. எனவே, கடைசிமுயற்சி வெற்றியாக அமைய வேண்டும். இதற்கான நிகழ்தகவு p. மீதியுள்ள $x+r-1$ முயற்சிகளில் நமக்கு $r-1$ வெற்றிகள் கிடைக்கும். இதன் நிகழ்தகவு $x+r-1\ C_{r-1}\ p^{r-1}\ q^x$. எனவே கூட்டு நிகழ்தகவுத் தேற்றத்தின்படி இவ்விரு நிகழ்தகவுகளைப் பெருக்கிஞல்

$$x+r-1\ C_{r-1}\ p^{r-1}\ q^x \times p = x+r-1\ C_{r-1}\ p^r\ q^x = f(x; r, p)$$

வரையறை

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X, எதிர்மறை ஈருறுப்புப் பரவலைச் சார்ந்திருக்கவேண்டுமாஞல் அதன் நிகழ்தகவுப் பரவல்

$$P(X = x) = f(x; r; p) = x+r-1\ C_{r-1}\ p^r\ q^x \quad [x = 0, 1, 2, \ldots\ldots]$$

$$= 0 \text{ மற்றெங்கும்}$$

மேலும்,

$$x+r-1\ C_{r-1} = x+r-1\ C_x$$

$$= \frac{(x+r-1)(x+r-2)\ldots(r+1)\,r}{x!}$$

$$= \frac{(-1)^x(-r)(-r-1)\ldots(-r-x+2)(-r-x+1)}{x!}$$

$$= (-1)^x\ -r\ C_x$$

$$\therefore\ f(x; r, p) = (-1)^x\ -r\ C_x \cdot p^r\ q^x$$

$$= (-q)^x\ -r\ C_x\ p^r$$

$$= -r\ C_x\ p^r\ (-q)^x\ ;\ x = 0, 1, 2\ \ldots\ldots$$

இது $p^r\ (1-q)^{-r}$ என்பதன் விரிவில் காணப்படும் $(x+1)$ ஆவது உறுப்பாகும். (எதிர்மறைப்படியுடன் கூடிய ஈருறுப்புப் தேற்றம்). எனவே இப்பரவல் எதிர்மறை ஈருறுப்புப் பரவல் எனப்படும். மேலும்,

$$\sum_{0}^{\infty} f(x; r, p) = p^r \sum_{0}^{\infty} -r\, C_x (-q)^x.$$

$$= p^r (1-q)^{-r}.$$

$$= 1$$

$f(x; r, p)$ எதிர்மறை ஈருறுப்புப் பரவலின் நிகழ்தகவுச் சார்பையும், இச்சார்பைச் சார்ந்துள்ள தனித்த மாறி எதிர்மறை ஈருறுப்பு மாறி எனவும் கூறப்படுகிறது.

$p = \frac{1}{Q}$, $q = \frac{P}{Q}$ என்க.

எனவே $Q - P = 1 \left[\because\ p + q = \frac{P+1}{Q} = 1 \right]$

$$\therefore\ f(x; r, p) = x + r - 1\, C_{r-1}\, Q^{-r} \left(\frac{P}{Q}\right)^x$$

$$= -r\, C_x\, Q^{-r} \left(-\frac{P}{Q}\right)^x$$

இது $(Q - P)^{-r}$-ன் விரிவில் பொது உறுப்பாகும்.

எதிர்மறை ஈருறுப்புப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்

$$\mu_1' = E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x.\ x + r - 1\, c_{r-1}.\ p^r q^x$$

$$= p^r \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x(x+r-1)(x+r-2, \ldots (r+1)}{x!} q^x.$$

$$= r p^r q \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(x+r-1)(x+r-2) \ldots (r+1)}{(x-1)!} q^{x-1}$$

$y = x - 1$ எனப்பிரதியிட

$$= r\,p^r q \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(y+r)(y+r-1)\ldots(r+1)}{y\,!}\, q^y$$

$$= r\,p^r q\,(1-q)^{-(r+1)} \frac{rp}{q}$$

$$\therefore\ \mu_2' = E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot {}^{x+r-1}C_{r-1}\, p^r\, q^x \cdot$$ இதைச் சுருக்கினால்,

$$\mu_2' = \frac{r(r+1)\,q^2}{p^2}$$

$$\therefore\ \sigma^2 = \mu_2 = \mu_2' - (\mu_1)^2$$

$$= E(X^2) - E(X)^2$$

$$= E\{X(X-1)\} + E(X) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{r(r+1)\,q^2}{p^2} + \frac{rq}{p} - \frac{r^2q^2}{p}$$

$$= \frac{rq\,(p+q)}{p^2} = \frac{rq}{p^2}$$

இதுபோலவே $\mu_3 = \dfrac{rq\,(1+q)}{p^3}$

$$\mu_4 = \frac{rq\,(1+4q+q^2) + 3r^2\,q^2}{p^4}$$

எனவே $\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = \dfrac{(1+q)}{\sqrt{rq}}$

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{(1+4q+q^2)}{rq}$$

$\therefore$ எதிர்மறை ஈருறுப்புப் பரவல் நேர்க்கோட்டமுடையது ; குறைத்தட்டை உடையது.

எதிர்மறை ஈருறுப்பு பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு :

$$M_x(\theta) = E(e^{\theta x}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{\theta x} f(x;\ r, p)$$

$$= \sum_{0}^{\infty} {}^{x+r-1}C_{r-1}.\ \ Q^{-r}\left(\frac{P e^{\theta}}{Q}\right)^{x}$$

$$= \sum_{0}^{\infty} {}^{-r}C_x\, Q^{-r}\left(-\frac{P e^{\theta}}{Q}\right)^{x}$$

$$= (Q - P e^{\theta})^{-r}$$

$$\mu_1' = \left[\frac{d}{d\theta} M_x(\theta)\right]_{\theta=0}$$

$$= [-r(-P e^{\theta})(Q - P e^{\theta})^{-r-1}]_{\theta=0} = rp$$

கூட்டுச் சராசரி $= rp$

$$\mu_2' = \left[\frac{d^2}{d\theta^2} M_x(\theta)\right]_{t=0}$$

$$= r P e^{\theta} (Q - P e^{\theta})^{-r-1}$$

$$+(-r1)\, r P e^{\theta}\ (Q - P e^{\theta})^{-r-2}(-P e^{\theta})]_{\theta=0}$$

$$= rp + r(r+1)\, p^2$$

$$\therefore\ \mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = (r+1)\, P^2 + rP^2 - r^2 P^2 = rPQ$$

$Q > 1,\ rP < rPQ$ $\therefore$ கூட்டுச்சராசரி $<$ பரவற்படி. இது இப்பரவலின் தனித்தன்மை ஆகும்.

எதிர்மறை ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லை பாய்ஸான் பரவல் என நிறுவுதல்

$P \to 0,\ r \to \infty,\ rP = m$ (முடிவுள்ளதாக) இருக்கும்போது எதிர் மறை ஈருறுப்புப் பரவல் பாய்ஸான் பரவலைத் தழுவுகின்றது.

$$f(x\,;\,r, P) = \lim\,(x + r - 1\,C_{r-1}).\quad Q^{-r}\left(\frac{P}{Q}\right)^{x}$$

$$= \lim\,(x = r - 1\,C_{x}).\quad Q^{-r}\left(\frac{P}{Q}\right)^{x}$$

$$= \lim \frac{(x+r-1)\,(x+r-2)\ldots(r+1)^{r}}{x\,!}\,(1 + P)^{-r}$$

$$\left(\frac{P}{1+P}\right)^{x}$$

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{x\,!}\left(1 + \frac{x-1}{r}\right)\left(1 + \frac{x-2}{r}\right)$$

$$\ldots\ldots\left(1 + \frac{1}{r}\right)\cdot 1\cdot r^{x} \times \left(1 + \frac{\lambda}{r}\right)^{-r}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^{x}$$

$$= \frac{1}{x\,!}\,\underset{r\to\infty}{Lt}\, r^{x}\left[\left\{1 + \frac{\lambda}{r}\right\}^{+r}\right]^{-1}\left(1 + \frac{r}{\lambda}\right)^{-x}$$

$$= \frac{1}{x\,!}\,\underset{r\to\infty}{Lt}\left[\left\{1 + \frac{\lambda}{r}\right\}^{r}\right]^{-1}$$

$$\underset{r\to\infty}{Lt}\left[r^{x}\left\{1 + \frac{r}{\lambda}\right\}^{-x}\right]$$

$$= \frac{1}{x\,!}\,(e^{+\lambda})^{-1}\,\underset{r\to\infty}{Lt}\left(\frac{r}{1 + \left(\frac{r}{\lambda}\right)}\right)^{x}$$

$$= \frac{1}{x\,!}\,e^{-\lambda}\,\underset{r\to\infty}{Lt}\,\lambda^{x}\left(\frac{r}{\lambda + r}\right)^{z}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x}}{x\,!}\cdot\underset{r\to\infty}{Lt}\left(1 + \frac{\lambda}{r}\right)^{-x}.$$

$$= \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!} \cdot 1$$

$$= \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda}{x!}$$

$$= P(x, \lambda)$$

இது λ-ஐ பண்பளவையாகக் கொண்ட பாய்ஸான் பரவலின் நிகழ்தகவுச் சார்பாகும்.

பெருக்குப் பரவல் (Geometric Distribution)

வெற்றியின் நிகழ்தகவு p முயற்சிக்கு முயற்சி மாறுபடாமல் இருக்கும் வரையில், தொடர்ந்து n சார்பற்ற முயற்சிகளை எடுத்துக் கொள்க. முதல் வெற்றிக்கு முன், x தோல்விகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $q^x p \cdot X$ எனும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி,

$$P(X = x) = q^x p, \ x = 0, 1, \ldots \ldots 0 < p \leq 1$$
$$= 0 \ (\text{மற்றெங்கும்})$$

என்ற நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைக் கொண்டு, குறை குறி அல்லாத மதிப்புகளை ஏற்குமாயின், அது பெருக்குப் பரவலைச் சார்ந்துள்ளது எனக் கூறுகிறோம்.

$x = 0, 1, 2, \ldots \ldots$ என்ற மதிப்புகளுக்கான பல்வேறு நிகழ்தகவுகள், பெருக்குத் தொடரின் பல்வேறு உறுப்புகளாக இருப்பதால், இதனைப் பெருக்குப் பரவல் என்கிறோம்.

$$\sum_{x=0}^{\infty} (pq^x = p(1 + q + q^2 + \ldots \ldots)$$

$$= \frac{p}{1-q} = 1$$

பெருக்குப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்

$$\mu'_1 = E(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot p(X=x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \, pq^x$$

$$= pq \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot q^{x-1} = pq\,(1-q)^{-2} = \frac{q}{p}$$

$$V(X^{2}) = E(X^{2}) - [E(X)]^{2} = E[X(X-1)]$$
$$+ E(X) - [E(X)]^{2}$$

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=1}^{\infty} x(x-1)\,p(X=n) = \sum_{2}^{\infty} x(x-1)q^{x}p$$

$$= 2pq^{2} \sum_{x=2}^{\infty} \left[\frac{x(x-1)}{2\cdot 1} q^{x-2} \right]$$

$$= 2pq^{2}(1-q)^{-3} = \frac{2pq^{2}}{p^{3}}$$

$$= 2\frac{q^{2}}{p^{2}}$$

$$\therefore \quad V(X) = \frac{2q^{2}}{p^{2}} + \frac{q}{p} - \frac{q^{2}}{p^{2}}$$

$$= \frac{q^{2}}{p^{2}} + \frac{q}{p}$$

$$= \frac{q(q+p)}{p^{2}}$$

$$= \frac{q}{p^{2}}$$

பெருக்குப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_{x}(\theta) = E(e^{\theta x}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{\theta x} \cdot q^{x}p = p\sum_{x=0}^{\infty} (e^{\theta} q)^{x}$$
$$= p(1 - q\,e^{\theta})^{-1}$$

$$= \frac{p}{1-qe^{\theta}}$$

$$\mu'_1 = \left[\frac{d}{d\theta} M(\theta)\right]_{\theta=0} = \left[\frac{d}{d\theta} p\,(1-qe^{\theta})^{-1}\right]_{\theta=0}$$

$$= [pq\,e^{\theta}(1-q\,e^{\theta})^{-2}]_{\theta=0} = pq\,(1-q)^{-2} = \frac{p}{q}$$

$$\mu'_2 = \left[\frac{d^2}{d\theta^2} M_x(\theta)\right]_{\theta=0} = \frac{q}{p} + \frac{2q^2}{p^2}$$

$$\mu'_3 = \mu'_2 (\mu'_1)^2$$

$$= \frac{q}{p} + \frac{2q^2}{p^2} - \frac{q^2}{p^2}$$

$$= \frac{q}{p} + \frac{q^2}{p^2} = \frac{q(q+p)}{p^2}$$

$$= \frac{q}{p^2}$$

இப்பரவலின் கூட்டுச்சராசரி $= \frac{q}{p}$, பரவற்படி $= \frac{q}{p^2}$

அதிபெருக்குப் பரவல் (Hypecgeometric Distribution)

ஒரு பாத்திரத்தில் $p+q=1$ எனுமாறு Np கறுப்பு பந்துகளும் Nq வெள்ளைப் பந்துகளுமாக N பந்துகள் உள்ளன என்க. n பந்துகள் எடுக்கப்பட்டால் (திருப்பிப் போடாமல்) அதில் x பந்துகள் கருப்பாயிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு,

$$f(x) = \frac{Np\,Cx\;Nq\,Cn-x}{NCn}$$

Np கறுப்புப் பந்துகளில் x கறுப்புப் பந்துகள் $Np\,Cx$ வகைகளில் தேர்ந்தெடுக்கப்படலாம். Nq வெள்ளைப் பந்துகளில் $(n-x)$ வெள்ளைப் பந்துகள் $Nq\;Cn-x$ வகைகளில் தேர்ந்தெடுக்கப் படலாம். அவ்வாறு தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிபந்தனைகள் $0 \leq x \leq Np; 0 \leq n-x \leq Nq \cdot f(x)$ ஒரு அதிபெருக்குப் பரவலின் சார்பைக் குறிக்கிறது என்பதை அறியலாம்.

$$\because \sum_{x=0}^{Np} f(x) = 1$$

$$\because \sum_{x=0}^{Np} Np\, Cx \,.\, Nq\, Cn{-}x / N\, Cn = 1$$

ஏனெனில் $\sum_{x=0}^{Np} Np\, Cx\, Nq\, C_{n-x} = (Np+Nq)\, Cn = N\, Cn$

இதை நிறுவப் பின்வரும் சமன்பாட்டில் இரு பக்கமும் உள்ள x^n-ன் குணகங்களைச் சமப்படுத்துகிறோம்.

$$(1+x)^{Np}(1+x) = \{1+Np\, C_1 x + \ldots + Np\, Cn\, x^n + \ldots\} \times \{1 + Nq\, C_1 n + Nq\, C_2\, x + \ldots\}$$

$\therefore$ $f(x)$ என்பது ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைக் குறிக்கும்.

இப்பொழுது, ஒவ்வொரு பந்தும் எடுக்கப்பட்டபின் திருப்பிப் போடப்படுகிறது என்க. அப்பொழுது பந்துகளின் விகிதம் பந்துகளை எடுப்பதனுல் மாறவில்லை. அதே விடையை $N \to \infty$ எனச் செய்வதன்மூலம் பெறலாம். இவ்வாறு, அதிபெருக்குப் பரவலின் எல்லையைப் பெறுகிறோம்.

$$\underset{n\to\infty}{Lt} \frac{Np\, Cx\, Nq\, Cn{-}x}{N\, Cn}$$

$$= \underset{n\to\infty}{Lt} \frac{(Np)!}{(Np-x)!\, x!} \cdot \frac{Nq!}{(n-x)!\,(Nq-n+x)!} \cdot \frac{n!\,(N-n)!}{N!}$$

$$= \underset{n\to\infty}{Lt} \frac{n!}{x!\,(n-x)!} \cdot \frac{Np\,(Np-1)\,(Np-2)}{N\cdot(N-1)\,(N-2)}$$

$$\frac{\ldots (Np-x+1) \times Np\,(Nq-1) \quad (Nq-n+x+1)}{\ldots (N-n+1)}$$

$$= \underset{n \to \infty}{Lt} \; n\,Cx \; \frac{\left\{ p\left(p-\frac{1}{N}\right)\left(p-\frac{2}{N}\right) \cdots \left(p-\frac{x-1}{N}\right) q\left(q-\frac{1}{N}\right) \cdots \left(q-\frac{n-x+1}{N}\right) \right\}}{\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right) \cdots \left(1-\frac{n-1}{N}\right)}$$

$$= n\,Cx\, p^{x}\, q^{n-x}$$

இது ஈருறுப்புப் பரவலின் அலைவெண்ணைக் குறிக்கும். பந்துகள் திருப்பிப் போடப்பட்டு எடுக்கப்பட்டால் ஈருப்புப் பரவல் கிடைக்கும். p, q என்பன முறையே ஒரு சோதனையில் கறுப்புப் பந்தும் வெள்ளை பந்தும் எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவுகள். (இங்கு p, q மாருமலிருக்கும்).

$p_1, p_2 \ldots p_r$ என்ற விகிதங்களில் $p_1 + p_2 + \ldots + p_r = 1$ என இருக்குமாறு r பந்துகள் இருப்பின், அதிலிருந்து முதல் நிறத்தில் x_1 பந்துகளும் இரண்டாம் நிறத்தில் x_2 பந்துகளும் ... திருப்பிப் போடாமல் எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$f(x_1, x_2 \ldots x_r) = \frac{Np_1\,Cx_1\; Np_2\,Cx_2 \ldots Np_r\,Cx_r}{N\,Cn}$$

$x_1 + x_2 + \ldots + x_r = n \quad x_1 \leq Np_1, x_2 \leq Np_2 \ldots x_r \leq Np_r$ பந்துகள் திருப்பிப் போடப்பட்டால், அப்பரவல் பல மாறிப் பரவலாகும்.

$$f(x_1, x_2 \ldots x_r) = \frac{n!}{x_1!\, x_2! \ldots x_r!}\; p_1^{\,x_1}\, p_2^{\,x_2} \ldots p_r^{\,x_r}$$

அதிபெருக்குப் பரவலின் கூட்டுச்சராசரி, பரவற்படி

$$\mu_1' = \sum_{x=0}^{n} \{ x \cdot Np\,C_x\; Nq\,C_{n-x} / NC_n \}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \{ x \cdot Np\,C_x\; Nq\,C_{n-x} / NC_n \}$$

$$= Np\, \{ (Np + Nq - 1)\, C_{n-1} / NC_n \}$$

$$= Np \cdot (N-1)\, C_{n-1} / NC_n \qquad \therefore \quad p + q = 1$$

$$= pn$$

$$\mu_2' = \sum_{x=0}^{n} x^2 f(x) = \sum_{x=0}^{n} \{ x(x-1) + x \} f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\, j(x) + \mu_1'$$

$$\therefore \quad \mu_2' - \mu_1'$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{Np\, C_x \cdot Nq\, C_{n-x}}{NC_n}$$

$$= \sum_{x=2}^{n} \frac{x(x-1)\, Np\, C_x \cdot Nq\, C_{n-x}}{NC_n}$$

$$= \sum_{x=2}^{n} \frac{(Np)(Np-1)(Np-2)\, C_{x-2}\; Nq\, C_{n-x}}{NC_n}$$

$$= \frac{(Np)(Np-1)}{NC_n} (Np + Nq - 2)\, C_{n-2}$$

$$= \frac{Np \cdot (Np-1) \cdot (N-2)\, C_{n-2}}{NC_n}$$

$$= \frac{np\,(n-1)(Np-1)}{N-1}$$

$$\mu_2' = \frac{up\,(n-1)(Fp-1)}{n-1} + np$$

$$= \frac{np\,(n-1)(Np-1) + np\,(N-1)}{N-1}$$

$$= np \left\{ \frac{n\,Np - n - Np + N}{N-1} \right\}$$

$$\mu_2 = \mu'_2 - \mu^2$$

$$= np \left\{ \frac{n Np - n - Nb + N}{N - 1} \right\} - n^2 p^2$$

$$= \frac{n (N - n) p q}{N - 1}$$

$\underset{N \to \infty}{Lt}$ எனும் போது நாம் ஈருறுப்புப் பரவலில் பரவற்படி npq-வைப் பெறுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு

ஒரு பாத்திரம் 8 கறுப்புப் பந்துகளையும் 5 வெள்ளைப் பந்துகளையும் கொண்டுள்ளது. அப்பந்துகளிலிருந்து 6 பந்துகள் எடுக்கப்பட்டால், அப்பந்துகளில் வரும் கறுப்புப் பந்துகளின் எண்ணிக்கைக்கான அலைவெண் சார்பைக் காண்க. (*i*) பந்துகள் திருப்பிப் போடப்பட்டால், (*ii*) பந்துகள் திருப்பிப் போடப்படாமல் இருந்தால்,

முதலில் எடுக்கப்பட்ட பந்துகள் திருப்பிப்போடப்பட்டால், எடுக்கப்பட்ட x பந்துகள் கறுப்பாய் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$f(x) = \frac{6!}{x!\,(6-x)!} \left(\frac{8}{13}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{13}\right)^{6-x}$$

பந்துகள் திருப்பிப் போடப்பட்டால், அதன் அடர்த்திச் சார்பு அதிபெருக்குப் பரவலைப் பின்பற்றும். x கறுப்புப் பந்துகள் எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$8c_x \; 5c_{6-x} \; 13c_6$$

எ.கா. A, B என்ற இரு ரகங்களில் ஒரு அங்காடி பொருட்களைத் தயாரிக்கிறது. ரகம் A-யை, பொருட்களை வாங்குவோர் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0 6, ரகம் B-யைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0·4 அங்காடி பொருட்களில் 5A, 5E-க்களைக் கொண்டுள்ளது. ஐந்தாவது A விற்கப்படும் போது, ரகம் B-யில் 3 பொருட்கள் இருப்பில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவென்ன?

தீர்வு

ரகம் A-யை விற்பது வெற்றியெனின்,

$\theta = 0{\cdot}60$ என எதிர்மறை ஈருறுப்புப் பரவலில் பிரதியிட்டால், 7-வது முயற்சியில் 5-வது வெற்றி கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$f(7;\ 5;\ 0{\cdot}6) = 7 - 1c_{5-1}\ (0{\cdot}6)^5\ (0{\cdot}4)^2$$

$$= 6c_4\ (0{\cdot}6)^5\ (0{\cdot}4)^2$$

$$= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4}\ (0{\cdot}6)^5\ (0{\cdot}4)^2$$

$$= 0{\cdot}187.$$

எ.கா. ஒரு சோதனையில், பழுதாகும் வரை ஒரு ஸ்பிரிங்கு (spring) அழுத்தப்படுகிறது. ஒவ்வொரு முறை அழுத்தும் போதும், அது பழுதாவதற்கான நிகழ்தகவு 0·001 என இருக்கும் போது, (சார்பற்ற வகையில்) 1000 முறைகள் அழுத்தப்பட்ட பிறகு ஸ்பிரிங்கு வீணுவதற்கான நிகழ்தகவென்ன ?

$p = {\cdot}001.$

முதல் வெற்றிக்கு முன்பு, x தோல்விகள் எனின், நிகழ்தகவு

$= q^x\, p\,{\cdot}$

$= (0{\cdot}999)^x\ ({\cdot}001)$

$x \geq 100$ ஆக இருக்கும் படியாக, வாய்ப்பினைக் காண வேண்டும்.

$$f(x \geq 1000) = 0{\cdot}001 \times (0{\cdot}999)^{999} + 0{\cdot}001 \times (0{\cdot}999)^{1000} + \cdots\cdots$$

$$= 0{\cdot}001 \times (0{\cdot}999)^{999}\ [1 + 0{\cdot}999 + (0{\cdot}999)^2 + \cdots\cdots]$$

$$= 0{\cdot}001 \times (0.999)^{999}\ \frac{1}{1 - 0{\cdot}999}$$

$$= (0{\cdot}999)^{999}$$

$$= {\cdot}39$$

பிற்சேர்க்கை

(APPENDIX)

துவக்க நிகழ்தகவு வெளி (Elemetary Probability Space)

ஒரு குறிப்பிட்ட சூழ்நிலையை பாகுபடுத்தி ஆராய முற்படும் போது ஒரு கணித மாதிரியை நம் கண்முன் கொண்டு வருவது மிகவும் பயன்தரவல்லது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பகடையை உருட்டும் போது நமக்கு 1, 2, 3, 4, 5, 6 இவற்றில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி முகம் கிடைக்க வாய்ப்பு உள்ளதால் 6 விளைவுகள் ஏற்படுகின்றன. இதற்கேற்ப ஒவ்வொன்றிற்கும் நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$ ஆக உடைய 6 துவக்க நிகழ்ச்சிகள் அடங்கிய ஒரு கணித மாதிரியை ஏற்படுத்தினால் எளிதாக இருக்கும். நாம் எடுத்துக் கொள்ளும் ஒரு சோதனை சமவாய்ப்புடைய, ஒன்றை ஒன்று தவிர்க்கும், N தீர்வாய்வான நிகழ்ச்சிகளை உடையதாக இருந்தால் இதற்குரிய கணித மாதிரி $\frac{1}{N}$-ஐ ஒவ்வொன்றிற்கும் நிகழ்தகவாக உடைய N துவக்க நிகழ்ச்சிகள் அடங்கிய ஒரு கணமாகும். $\frac{1}{N}$ எனும் விகிதம், ஒரு குறிப்பிட்டவிளைவு ஒரு பரிசோதனையின் முடிவாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு. இதற்கு மாறாக, ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சிக்குப் பதிலாக சில குறிப்பிட்ட விளைவுகள் அடங்கிய தொகுதியில் ஏதேனும் ஒன்று கிடைக்க வேண்டுமென நாம் விரும்பலாம். இத்தகைய சிறு தொகுதி நிகழ்ச்சி எனப்படும். அதன் நிகழ்தகவு அந்த தொகுதியிலுள்ள எல்லா துவக்க நிகழ்ச்சிகளின் நிமழ்தகவுகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமம். நிகழ்ச்சி நடப்பதற்கு தொகுதியிலுள்ள எல்லாத் துவக்க நிகழ்ச்சிகளும் சாதகமாக உள்ளன. எனவே, சோதனையின் விளைவு, தொகுதியில் ஏதேனும் ஒரு துவக்க நிகழ்ச்சியில் முடிந்தாலும் நிகழ்ச்சி நடைபெறுகிறது என்கிறோம்.

நிகழ்தகவு வெளி என்பது ஒரு கணித மாதிரி இது ஒரு சோதனை நடத்தப்படும் சூழ்நிலையை ஆராய்வதற்கு உதவுகிறது. சோதனையின் முடிவு சமவாய்ப்புடைய பல்வேறு நிகழ்ச்சிகளில் ஏதேனும் ஒன்ருக இருக்கும். இத்தகைய தனித்தனி விளைவுகள் நிகழ்தகவு வெளியில் துவக்க நிகழ்ச்சிகளாகும். எடுத்துக்காட்டாக 10,000 பொருள்களில் ஏதேனும் ஒன்றை சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுப்பதை ஒரு சோதனையாகக் கொண்டால், இந்த கணித மாதிரியில் $\frac{1}{10\,000}$ துவக்க்க நிகழ்ச்சிகள் உள்ளன. ஒவ்வொன்றிற்கும் நிகழ்தகவு ஒரு பழுதடைந்த பொருளை எடுக்கும் நிகழ்ச்சி A எனக் கொள்வோம். பழுதடைந்த எல்லா பொருள்களுக்குரிய துவக்க நிகழ்ச்சிகள் -ல் உள்ளன. இந்த நிகழ்தகவு அவற்றின் நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாகும். அதாவது மொத்த பொருள்களில் பழுதடைந்த பொருள்களின் எண்ணிக்கை m ஆனுல் A-ல் m துவக்க நிகழ்ச்சிகள் உள்ளன. எனவே அதன் நிகழ்தகவு $= \frac{m}{10{,}000}$: இந்த துவக்க நிகழ்ச்சிகளும் A என்ற நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமாக உள்ளன. பழுதடையாத பொருட்களின் தொகுதிக்குரிய துவக்க நிகழ்ச்சிகள் $10000 - m$ ஆகும். அதன் நிகழ்தகவு $\frac{10000 - m}{10000} = 1 - \frac{m}{10000}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

1. ஒரு பகடையை வீசுமுன் விளையக்கூடிய 6 துவக்கத்திற்குரிய நிகழ்ச்சிகளைப் பற்றி ஒரு கணித மாதிரியை உருவாக்குவோம். 2, 4, 6 துவக்க நிகழ்ச்சிளாக உடைய நிகழ்ச்சியை இரட்டைப்படை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி எனலாம். ஒவ்வொன்றிற்கும் $\frac{1}{6}$ நிகழ்தகவுடைய 3 துவக்க நிகழ்ச்சிகள் இதற்குச் சாதகமானவை. எனவே இந்நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ என்கிரேம்.

2. நன்கு கலக்கப்பட்ட ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டை எடுக்கிரேம். இதற்குரிய கணித மாதிரியில் ஒவ்வொன்றும் நிகழ்தகவு $\frac{1}{52}$ ஆகவுடைய 52 துவக்கத்திற்குரிய நிகழ்ச்சிகள் உள்ளன. ராஜா சீட்டை எடுப்பது நமது நிகழ்ச்சியானுல் இதற்கு நான்கு நிகழ்ச்சிகள் சாதகமாக உள்ளன.

இந்நிகழ்தகவு மாதிரியை உருவாக்கும்போது கீழ்க்கண்ட தற்கோள்களை எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

(i) 52 சீட்டுகளில் ஒன்று கட்டாயம் எடுக்கப்படும்

(ii) ஒவ்வொரு சீட்டிற்கும் எடுக்கப்படும் வாய்ப்பு சமமாக இருக்கும்.

(iii) ஒரே ஒரு சீட்டுதான் எடுக்கப்படும்.

எனவே துவக்க நிகழ்ச்சிகள், தீர்வாய்வான, சமவாய்ப்புடைய ஒன்றையொன்று தவிர்க்கும் விளைவுகளின் தொகுதியாகும்.

எ.கா. ஒரு ஜோடி பகடையை வீசும்போது கிடைக்கக்கூடிய விளைவுகளைக் கணித மாதிரியாக அமைக்கவும். ஒவ்வொன்றுக்கும் $\frac{1}{36}$ நிகழ்தகவுடைய 36 துவக்க நிகழ்ச்சிகள் அடங்கியது இதற்குரிய கணித மாதிரி. இரு பகடைகளை வீசும்போது 8 அல்லது 11 கிடைப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

8 கிடைப்பதற்குப் பகடையில் காணும் எண்கள் கீழ்க்கண்டவாறு இருக்கலாம்.

$$\left.\begin{matrix} 4, 4 \\ 3, 5 \\ 5, 3 \\ 2, 6 \\ 6, 2 \end{matrix}\right\} 5.$$

$$\text{எனவே நிகழ்தகவு} = \frac{\text{சாதகமான வழிகள்}}{\text{தீர்வாய்வான வழிகள்}} = \frac{5}{36}$$

11 கிடைப்பதற்குரிய நிகழ்ச்சிகள் (5, 6) (6, 5)

$$\therefore \text{ நிகழ்தகவு} = \frac{2}{3618} = \frac{1}{18}$$

எனவே 8 அல்லது 11 கிடைக்க நிகழ்தகவு

$$= \frac{5}{36} + \frac{2}{36} = \frac{7}{36}$$

இரு பகடைகளில் ஒன்று சிவப்பு, மற்றொன்று வெள்ளையாக இருக்கும்போது சிவப்புப் பகடையிலுள்ள எண் வெள்ளைப் பகடையிலுள்ள எண்ணைவிட சிறியதாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

வெள்ளை பகடையில் காணப்படும் எண்	சிவப்பு பகடையில் காணப்படும் எண்
1	
2	1.
3	1, 2.
4	1, 2, 3.
5	1, 2, 3, 4
6	1, 2, 3 4, 5

இந்நிகழ்ச்சிக்கு 15 துவக்க நிகழ்ச்சிகள் உள்ளன. எனவே நிகழ்தகவு $= \frac{15}{36}$.

பொது நிகழ்தகவு வெளி (Generalised Probability Space): துவக்க நிகழ்தகவு வெளியில் ஒரே நிகழ்தகவுடைய ஒரு வரையுற்ற எண்ணிக்கையுடைய துவக்க நிகழ்ச்சிகள்தான் இருக்கும். ஆனால் அறிவியல் வளர்ச்சியடைந்துள்ள தற்கால நிகழ்தகவுக் கொள்கைகளில் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுடைய நிகழ்ச்சிகள்தாம் இருக்கவேண்டுமென்றும் அவை எல்லாவற்றிற்கும் சமவாய்ப்பு இருக்கவேண்டுமென்றும், அவசியமில்லை. ஒரு நிகழ்ச்சிகளின் தொகுதி எண்ணிக்கைக்குட்பட்ட வரையுற்ற கணமாக இருக்க வேண்டுமானால் அதில் ஒரு வரையுற்ற எண்ணிக்கையுடைய முழு எண்களைத்தான் பயன்படுத்தமுடியும். அதற்குமாறாக, எல்லா நேர்முழு எண்களையும் பயன்படுத்தினால் அது ஒரு முடிவுற்ற, ஆனால் எண்ணிக்கைக்குட்பட்ட கணமாகும். அதாவது n ஒரு நேர் முழு எண்ணாக இருந்தால் $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n$ எண்ணிக்கைக் குட்பட்ட முடிவுள்ள கணமாகும். அதற்குமாறாக $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ என்பது எண்ணிக்கைக்குட்பட்ட ஒரு முடிவற்ற கணமாகும்.

வரையறை

எனவே ஒரு நிகழ்தகவு வெளி துவக்க நிகழ்ச்சிகளின் வரையுற்ற அல்லது வரையற்ற, S எனும் ஒரு கணத்தையும் நிகழ்ச்சி குவியல் F-யும் உடையதாக உள்ளது. ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியும் அதற்குச் சாதகமாகவுள்ள பல்வேறு துவக்க நிகழ்ச்சிகளைக் கொண்டுள்ள ஒரு கணமாகும். நிகழ்ச்சி குடும்பம் S கீழ்க்காணும் வெளிப்படை உண்மைகளை நிறைவு செய்கின்றது.

F-லுள்ள ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சிக்கும் உதாரணமாக A) $P(A)$ வரையறுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

F-ன் வெளிப்படை உண்மைகள்

(1) 0, S என்பவை நிகழ்ச்சிகள். (2) 0 என்பது இயலா நிகழ்ச்சி. இதற்கு ஒரு துவக்க நிகழ்ச்சியும் சாதகமாக இல்லை.

(3) S என்பது உறுதியான நிகழ்ச்சி இதற்கு எல்லா துவக்க நிகழ்ச்சிகளும் சாதகமாக உள்ளன.

(1) 0-வும் S-ம் நிகழ்ச்சி குடும்பத்தைச் சேர்ந்தவை.

(2) எண்ணிக்கைக்குட்பட்ட நிகழ்ச்சிகளின் கணத்தின் வெட்டு ஒரு நிகழ்ச்சியாகும். அதாவது கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரையுற்ற அல்லது வரையற்ற எண்ணிக்கைக்குட்பட்ட நிகழ்ச்சி களின் தொகுக்குச் சாதகமாக உள்ள துவக்க நிகழ்ச்சிகளின் கணம் ஒரு நிகழ்ச்சியாகும்.

(3) எண்ணிக்கைக்குட்பட்ட நிகழ்ச்சிகளின் தொகுதியின் சேர்க்கையும் ஒரு நிகழ்ச்சி ஆகும். அதாவது ஒரு கொடுக்கப் பட்டுள்ள எண்ணிக்கைக்குட்பட்ட நிகழ்ச்சிகளின் கணத்தில் ஏதேனும் ஒன்றிற்குச் சாதகமாகவுள்ள துவக்க நிகழ்ச்சிகளின் தொகுதியும் ஒரு நிகழ்ச்சியாகும்.

(4) A ஒரு நிகழ்ச்சியானல் $\bar{A}$-ம் ஒரு நிகழ்ச்சியாகும் அதாவது கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்ச்சிக்குச்சாதகமில்லாத துவக்க நிகழ்ச்சி களின் தொகுதியும் ஒரு நிகழ்ச்சியாகும்.

***P*-ன் தற்கோள்கள்**

1. ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சி A-க்கும் $P(A)$ என்ற அளவு ஒரு மெய்யெண் வரையறுக்கப்படுகிறது.

2. $P(A) \geq 0$

3. $P(S) = 1$.

4. ஒன்றையொன்று தவிர்க்கும் நிகழ்ச்சிகள் அடங்கிய ஒரு முடிவுற்ற கணத்தின் சேர்க்கையின் நிகழ்தகவு தனித்தனி நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத்தொகையாகும்,

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

5 A, B நிகழ்ச்சிகளினுல் $A < B$.

$$P(B - A) = P \subset B - P(A) \quad [B = A \cup B - A]$$

6. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

7. $P\ 0) = 0$.

8. $0 \leq P(A)$

9. $A < B$, $P(\,\imath) \leq P(B)$.

Bibliography

1. The Elements of Probability Theory and Some of Its Applications By—*Harald Cramer.*

2. Introduction to the Theory of Statistics—By *Mood and Graybill.*

3. Theory and Problems of Statistics by Murray – *R. Spiegel.*

4. Introduction to Mathematical Statistics—*P.G. Hoe'.*

5. Introduction to Probability and Random Variables. *G. P. Wadsv rth & J G. Bryan.*

6. An introduction to Mathematical Statistics – by *H. Brunk.*

7. Introduction to Mathematical Statistics—*R. Hogg & A. Craig.*

8. Probability *Uspensky*

9. Sampling Techniques *Cochran*

10. Mathematics of Statistics Vol. I—*J. K. Kenney.*

11. Statistics—by *L.H C. Tippett.*

12. Introduction to Statistical Mathematics—*A. M. Mathai.*

13. Mathematical Statistics - *Gupta* and *Kapoor.*

14. Mathematical Statistics—*Kapoor* and *Saxena.*

15. Statistics - Theory and Practice – *Ghosh* and *Chaudiri.*

கலைச்சொல் அகராதி

A

Abciss — கிடை அச்சுத்தூரம்
Absolute — தனி
Absolute value — தனிமதிப்பு
Absolute deviation — தனிவிலக்கம்
Absolutely convergent services — அறபொருங்குத் தொடர்,
Accu]rate — மிகச்சரியான, துல்லியமான
Addition theorem of Probability — நிகழ்தகவின் கூட்டுநியதி
Aggregate — மொத்தம், திரள்
Agriculturial Statistics — வேளாண்மைப் புள்ளியியல்
Algebraic expression — இயற்கணிதக் கோவை
Ambiguous case — ஈரடிவகை
Analysis — பகுப்பாய்வு
Analysis of Variance — பரவற்படி ஆய்வு
Analysis of time series — காலத் தொடர் வரிசையின் பகுப்பாய்வு
Aposteriori Probability — காரிய காரண நிகழ்தகவு
Apriori Probability — காரண காரிய நிகழ்தகவு
Association or complete — முழுத் தொடர்பு
,, Negative — எதிர்த் தொடர்பு
,, Partial — பகுதித் தொடர்பு
Aasociative law — சேர்ப்பு விதி
Assumption — தற்கோள்
Asymmetrical — சமச்சீரில்லாத
,, distribution — சீரில்லாப் பரவல்
Attribute — பண்பு,
Attribute independent — சாராப்பண்பு, தொடர்பில்லாப் பண்பு

Attribute positive	—	நிறைபண்பு
,, negative	—	குறைப்பண்பு
Average	—	சராசரி
,, deviation	—	சராசரி விலக்கம்
,, moving	—	இயங்கு சராசரி
Axiom	—	வெளிப்படை உண்மை
Axis	—	அச்சு
Axes of coordinates	—	கிடைநிலை அச்சுக்கள்

B

Bar diagram	—	பட்டை விளக்கப்படம்
, compound	—	கூட்டுப்பட்டை விளக்கப்படம்
,, component	—	பல் அங்கப்பட்டை விளக்கப் படம்
,, percentage	—	சதவீதப்பட்டை விளக்கப்படம்
Base ,, chain	—	தொடராண்டு அடிப்படை
,, ,, changing	—	மாறு அடிந்படை
,, ,, fixed	—	நிலை அடிப்படை
,, ,, angle	—	அடிக்கோணம்
,, ,, year	—	அடிப்படை ஆண்டு
,, ,, of a logarithm	—	மடக்கை அடி
Bell shaped	—	மணிவடிவமான
Best fit	—	மிகப்பொருத்தமான, உத்தமப் பொருத்தமான
Biased	—	ஒருதலைச் சார்புடைய
Bimodal	—	இருமுகட்டு
Bionomial	—	ஈருறுப்பு
,, distribution	—	,, பரவல்
Birth rate	—	பிறப்பு வீதம்
Bivariate	—	இருமாறி
Blank table	—	வெற்றுப்பட்டியல்
Blocks	—	நிலத் தொகுதிகள்
Boundary	—	எல்லை
Business cycle	—	தொழிற் சுழற்சி

C

Calculate	—	கணக்கிடுக

Calculation	—	கணிப்பு
Calculus differential	—	வகைநுண் கணிதம்
,, integral	—	தொகைநுண் கணிதம்
Case	—	வகை
Cause and effect relationship	—	காரண விளைவுத் தொடர்பு
Census	—	மக்கள் கணிப்பு முழுக் கணிப்பு
,, methods	—	மக்கள் கணிப்பு முறை, முழுக்கணிப்பு முறை
Central tendency	—	மையப்போக்கு
Chain base method	—	சங்கிலி அடிப்படை முறை
,, index number	—	சங்கிலி குறியீட்டெண்
,, relatives	—	சங்கிலிச் சார்புகள்
Chance	—	வாய்ப்பு
Chart	—	வரைபடம்
,, control	—	கட்டுப்பாட்டு விளக்கப்படம்
,, range	—	வீச்சு விளக்கப்படம்
,, statistical	—	புள்ளி விளக்கப்படம்
Chi-square	—	கைவர்க்கம்
Chi-square test	—	கைவர்க்கச் சோதனை
Class	—	பிரிவு
,, intervel	—	பிரிவு இடைவெளி
,, limit	—	பிரிவு எல்லை
,, frequency	—	பிரிவு நிகழ்வெண்
Classfication	—	பாகுபாடு
,, one way	—	ஒருவழிப் பாகுபாடு
,, manifold	—	பல்வழிப் பாகுபாடு
Class midvalue	—	பிரிவின் நடுமதிப்பு, பிரிவுமைய மதிப்பு
Clockwise	—	வலஞ்சுழியாக
Closeness of fit	—	பொருத்தமுடைய
Coefficient of contingency	—	நேர்வு-சார்புக் கெழு
,, ,, correlation	—	ஒட்டுறவுக் கெழு
,, ,, dispersion	—	சிதறல் கெழு
,, ,, regression	—	மாறிகளின் தொடர்புக் கெழு
,, ,, skewness	—	கோட்டக் கெழு
,, ,, variation	—	மாறுபாட்டுக் கெழு
Coincide	—	பொருந்துதல், ஒன்றுபடுதல்
Colligation	—	இணைப்பு
Column	—	நெட்டுப்பிரிவு, நிரல்

Comparison — ஒப்பிடுதல்
Compound event — கூட்டு நிகழ்ச்சி
Compound probability — கூட்டு நிகழ்தகவு
Complement — நிரப்பி, நிரப்புவது
Complement of a set — ஒரு கணத்தின் நிரப்பி
Complementary — நிரப்புகின்றன
Component — கூறு, பிரிவு
Condensation — ஒடுக்கல்
Condition — நிபந்தனை
Confidence limits — நம்பிக்கை எல்லைகள்
Congruent — சர்வசமம்
Consecutive number — அடுத்துவரும் எண்கள்
Consistency — பொருத்தமுடைய, இசைவு
Consistent estimate — பொருத்தமுடைய மதிப்பீடு
Constraint — கட்டுப்பாடு
Consumer — துய்ப்போர், நுகர்வோர்
Continuous — தொடர்ச்சியான
Continuous variable — தொடர் மாறி
Continuous frequency distribution — தொடர் மாறிப்பரவல்
Continuum — தொடரகம்
Contrary — எதிரிடை
Correlation — உடன்தொடர்பு, ஒட்டுறவு
,, coefficient — ஒட்டுறவுக் கெழு
,, positive — நேரிடை ஒட்டுறவு
,, negative — எதிரிடை ஒட்டுறவு
,, analysis of the variance — மாறிகளின் ஒட்டுறவுப் பகுப்பாய்வு
,, partial — பகுதியிடை உறவு
,, rank — வரிசை இடைஉறவு, தர ஒட்டுறவு
,, spwious — போலி ஒட்டுறவு
Cost price — கொள்விலை
Cost of living index number — வாழ்க்கைத் தரக்குறியீட்டெண்
Countable set — எண்ணிடத்தக்க கணம்
Covariation — உடன்மாறுபாடு
Covarlance — இணைபரவற்படி
Critical — தீர்வுக்கட்டமான
Critical region — தீர்வுக்கட்ட பகுதி

Cumulative	— திரள், குவிப்பு
Cumulative distribution	— குவிவு பரவல்
,, frequency	— வளர் நிகழ்வெண், குவிவு நிகழ்வெண்
,, ,, curve	— குவிவு நிகழ்வெண்வரை, வளர் நிகழ்வெண் வரை
,, polygon	— வளர் நிகழ்வெண் பலகோணம்
,, frequency of the greater than type	— மேலின வளர் நிகழ்வெண்
,, frequency of the less than typs	— கீழின வளர் நிகழ்வெண்
Curve	— வரை, வளைகோடு
,, fitting	— வளைகோட்டைப் பொருத்துதல்
Curvilinear correlation of variables	— வளைகோட்டு மாறிகள் தொடர்பு
Cyclical	— சுழல்
,, fluctuation	— சுழல் ஏற்ற இறக்கம்
,, variation	— சுழல் மாற்றம்

D

Data	— விவரங்கள்
,, observational	— கண்டறிந்த விவரங்கள்
,, primary	— முதல்நிலை விவரங்கள்
,, reduction of statistical	— புள்ளிவிவரச் சுருக்கம்
,, secondary	— இரண்டாம் நிலை விவரங்கள்
,, statistical	— புள்ளி விவரங்கள்
Death rate	— இறப்பு வீதம்
,, ,, central	— மைய இறப்பு வீதம்
Debit	— பற்று, செலவு
Decile	— பத்துமானம்
Declining trend	— இறங்கும் போக்கு
Decrease	— குறைதல்
Defect	— குறை
Defective	— குறைபாடுள்ள
Define	— வரையறு
Definite	— வரையறுத்த, குறிப்பிட்ட
Definition	— வரையறை
Degrees of freedom	— கட்டின்மைக் கூறுகள், சமன்பாட்டுப்படி

Density	— அடர்த்தி, செறிவு
,, frequency	— நிகழ்வெண் அடர்த்தி
,, Probability	— நிகழ்தகவு அடர்த்தி
,, function	— நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு
Dependent	— சார்ந்த
,, variable	— சார்ந்த மாறி
,, event	— சார்ந்த நிகழ்ச்சி
Descending order	— இறங்கு வரிசை
Design	— திட்ட அமைப்பு, உருவ அமைப்பு
,, of experiments	— சோதனைத் திட்ட அமைப்பு
Deviation	— விலக்கம்
,, mean	— கூட்டுச்சராசரி விலக்கம்
,, quartile	— கால் மான விலக்கம்
,, root mean squared	— மூலச்சராசரி வர்க்கம்
,, standard	— திட்டவிலக்கம், தரவிலக்கம்
Diagram	— விளக்கப்படம்
,, pie	— வட்ட விளக்கப்படம்
,, line	— நேர் கோட்டுப் படம்
,, scatter	— சிதறல் விளக்கப் படம்
Die	— பகடை
Difference	— வேறுபாடு
Divided difference	— வகுத்த வேறுபாடு
Backward difference	— பின்முக வேறுபாடு
Digit	— இலக்கம்
Discount	— தள்ளுபடி
Discretle	— தனித்தனி
,, variables	— தனித்த மாறிகள்
Dispersion	— பரவுகை, சிதறல்
,, measure of	— பரவுகை அளவைகள், சிதறல் அளவை
,, cofficient of	— பரவுகைக் கெழு, சிதறல் கெழு
,, ,, of quartile	— கால்மான பரவுகைக் கெழு
Distribution	— பரவல்
Distribution binomial	— ஈருறுப்பு பரவல்
,, bivariate	— இருமாறிப் பரவல்
,, continuous	— தொடர் பரவல்
,, cumulative	— குவிவுப் பரவல்
,, discrete	— தொடர்பற்ற பரவல்
,, exponential	— அடுக்குக் குறி பரவல்

Distribution frequency	—	நிகழ்வெண் பரவல்
,, 'F'	—	'F பரவல்
,, gamma	—	காம்மா பரவல்
,, 'J'	—	'J' வடிவப் பரவல்
,, multinomial	—	பல்லுறுப்புப் பரவல்
,, normal	—	இயல் நிலைப் பரவல்
,, Poisson	—	பாய்ஸான் பரவல்
,, rectangular	—	செவ்வகப் பரவல்
,, sampling	—	கூறு பரவல்
,, student 't'	—	ஸ்டூடன்ட் 't' பரவல்
,, skewness	—	சீரில்லா அல்லது கோட்ட முடைய பரவல்
,, 'U' shaped	—	'U' வடிவப் பரவல்
,, χ^2	—	கைவர்க்கப் பரவல்

E

Empirical	—	அனுபவ
,, relation	—	அனுபவத் தொடர்பு
,, formula	—	அனுபவ வாய்பாடு
Ends	—	முனைகள்
Enquiry	—	விவரம் கேட்பது, கணக்கெடுப்பது
Enumerator	—	கணிப்பாளர்
Equal	—	சமம்
Equally likely	—	சரிசம வாய்ப்புள்ள
Equation	—	சமன்பாடு
,, normal	—	மீச்சிறுபடி வழிச்சமன்பாடு, இயல் சமன்பாடு
,, reciprocal	—	தலை கீழ்ச்சமன்பாடு
Error	—	பிழை
,, absolute	—	தனிப்பிழை
,, experimental	—	செய்முறைப் பிழை
,, function	—	பிழைச் சார்பு
,, normal curve	—	இயல்நிலைப் பிழை வரை
Error probable	—	நிகழத்தக்க பிழை
,, relative	—	சார்பிழை
,, sampling	—	கூறு பண்புகளின் பிழை
,, standard	—	திட்டப் பிழை
stimate	—	மதிப்பீடு

Interval estimate — இடைவெளி மதிப்பீடு
Point estimate — புள்ளி மதிப்பீடு
Even chance — சரிபாதி வாய்ப்பு
Even function — இரட்டைச் சார்பு
Even number — இரட்டைப் படை எண்
Event — நிகழ்ச்சி
,, compound — கூட்டு நிகழ்ச்சி
,, conditional — நிபந்தனை நிகழ்ச்சி
,, dependent — சார்ந்த நிகழ்ச்சி
,, favourable — சாதகமான நிகழ்ச்சி, இயல வேண்டிய நிகழ்ச்சி
,, Independent — சார்பற்ற நிகழ்ச்சி
,, mutually enclusive — ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சி

F

Factor — காரணி
Factorial moments — காரணீய விலக்கப்பெருக்குத் தொகைகள்
'F' test — F சோதனை
Fallacy — போலி
Field enquiry survey — கள விசாரணை கணக்கெடுப்பு
Finite — வரையுற்ற, முடிவுடைய
Fit — பொருத்துதல்
Fluctuations — மாறுபாடுகள்
Forecast — முன் கணிப்பு
Frequency — நிகழ்வெண், அலைவெண்
,, distribution — நிகழ்வெண் பரவல்
,, table — நிகழ்வெண் பட்டியல்
,, function — நிகழ்வெண் சார்பு

G

Gamma function — காமா சார்பு
Generalisation — பொதுவுரை, பொது விதி
Graph — வரைபடம்
Greater than ogive — மேலின ஓகைவ், வளர் நிகழ்வெண் வரை
Gross income — மொத்த வருமானம்

Groups	—	தொகுதிகள்
Geometric mean	—	பெருக்குச் சராசரி

H

Harmonic mean	—	இசைச் சராசரி
Histogram	—	செவ்வகப்படம்
Homogeneous	—	ஒரு படித்தான
Hypothesis	—	எடுகோள்
Hypothes is testing of	—	எடுகோள் சோதனை
Hypothes is mull	—	இல எனும் எடுகோள்

I

Identical	—	சர்வசமம், ஒத்த
Illustration	—	எடுத்துக்காட்டு
Inconsistent	—	இசைவில்லாத, பொருந்தாத
Individual	—	தனித்த
Independent	—	சார்பற்ற
Independent event	—	சார்பற்ற நிகழ்ச்சி
,, variable	—	சார்பற்ற மாறி
Induction Method	—	தொகுத்தறிமுறை
Infinity	—	முடிவிலி
Iniflexion	—	வளைவுமாற்றம்
Interpolation	—	இடைச் செருகல்
Interval	—	இடைவெளி
Invariance	—	மாற்றமின்மை
Inverse Correlation	—	எதிர்மறை ஒட்டுறவு
Investigate	—	ஆராய்தல்
Item	—	உறுப்பு, இனம்
Infinite population	—	வரம்பற்ற முழுமைத்தொகுதி
Inverse series	—	முடிவிலாத் தொடர்
Infinitesinmal	—	கழிநுண், அஃகெண்
Inverse ratio	—	தலைகீழ் விகிதம்
Integer	—	முழு எண்
Irregular fluctuations	--	ஒழுங்கற்ற ஏற்றத்தாழ்வுகள்

J

‘ J ’ shaped curve	-	‘J’ வடிவவரை

K

Kurlosis — தட்டை அளவை
lepto kurtic — குறைத்தட்டை
platy kurtic — மிகைத்தட்டை

L

Large samples — பெருங்கூறுகள்
Large samples enquiries — பெருங்கூருய்வுகள்
Law — விதி
Law associative — தொகுப்பு விதி
Law of errors — பிழைகளின் விதிகள்
Law of Inertia of large numbers — பேரினங்களின் மாருப் பொதுமை
Law of statistical regularity — புள்ளி விவர ஒழுங்கு நியதி
Life Table — ஆயுட் பட்டியல்
Like — ஒத்த
Limit Lower — கீழ் எல்லை
,, Upper — மேல் எல்லை
Line diagram — நேர்கோட்டு விளக்கப்படம்
Logarithmic chart — மடக்கைப்படம்
semi logarithmic chart — ஒரு பக்க லாகிருதத்தாள்
doubly logarithmic chart — இருபக்க லாகிருதத்தாள்

M

Marginal Probability — விளிம்பு நிகழ்தகவு, ஓரத்தை ஒட்டிய நிகழ்தகவு.
Maximum — உச்ச, உத்தமம், மீப்பெரு.
Mean — சராசரி
Measure — அளவு
,, of dispersion — சிதறல் அளவை, பரவுகை அளவை
,, of skewness — கோட்டளவை
,, of Fertility — உற்பத்தியளவுகள்
,, contral tendency — மைய போக்களவைகள் இடைநிலை
,, class — இடைநிலைப் பிரிவு
Medium life time — நடு ஆயுட் காலம்
Method of least squares — மீச்சிறுபடி முறை

Mid value of a class	-	பிரிவின் நடு மதிப்பு, பிரிவின் மைய மதிப்பு
Minimum	—	மீச்சிறு, சிறுமம், குறைந்தபட்ச
Minor	—	சிறிய
Mode	—	முகடு
Modal class	—	முகட்டுப் பிரிவு
Mortality rate	—	இறப்பு வீதம்
Morbidity statistics	—	நோய் விவரங்கள்
Moving average	—	நகரும் சராசரி
,, total	—	நகரும் மொத்தம்
Multi Modal	—	பல் முகட்டு
Multivariate	—	பல் மாறி
,, distribution	—	,, பரவல்
Mutually exclusive events	—	ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை பெற்ற நிகழ்ச்சிகள்
Moment		விலக்கப் பெருக்குத்தொகை
	—	,, ,,
,, generating function	—	உருவாக்கும் சார்பு

N

National Income	—	நாட்டு வருமானம்
,, Sample Survey	—	தேசீய மாதிரி அளவெடுப்பு
Negative number	—	எதிர், குறை
,, association of	—	எதிர் (அ) குறை எண்
attribution	—	பண்புகளின் எதிர் தொடர்பு
Net Income	—	நிகர வருமானம்
Normal distribuiton	—	இயல்நிலைப் பரவல்
,, population	—	இயல் நிலைமுழுமைத் தொகுதி
,, probability curve	—	இயல்நிலை நிகழ்தகவு வரை
,, equations	—	மீச்சிறுபடி வழிச் சமன்பாடுகள்
Number	—	எண்
,, odd	—	ஒற்றைப்படை எண்
,, even	—	இரட்டைப்படை எண்
,, commensurable	—	பொது அளவுள்ள எண்
,, incommensurable	—	பொது அளவற்ற எண்
Numerical	—	எண்ணுக்குரிய

O

Observation	—	கண்டறிதல், கணிப்பு
Observed data	—	கண்டறிந்த விவரம்

Odds against — பாதக விகிதம்
Odds in favour — சாதக விகிதம்
Ogive — ஓகைவ், வளர் நிகழ்வெண் வரை
Ogive less than — கீழின ஓகைவ்
,, greater than — மேலின ஓகைவ்
One tailed test — ஒருபக்க சோதனை, ஒரு முனை சோதனை
Open set — திறந்த கணம்
Ordinate — நிலைக்கோடு
Origin — மூலப் புள்ளி
Oscillation — அலைவு

P

Pair — சோடி
Paired association — இணைத் தொடர்பு
Pairwise — இணை இணையாக
Parabola — பரவளையம்
Parallel — இணை
Parametes — முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவை
Pearsan's coefficient of Skewness — பியர்சனின் கோட்டக்கெழு
Percent — விழுக்காடு சதவீதம்
Percentage error — சதவீதப் பிழை
,, Bar diagram — சதவீதப்பட்டை விளக்கப் படம்
Percentile — நூற்றுமானம்
Period — காலம்
Population — முழுமைத் தொகுதி
,, estimate — முழுமைத் தொகுதி மதிப்பீடு
,, real — மக்கள் மதிப்பீடு தற்கால இணைத் தொகுதி
Positively skewed — நேர்க்கோட்டம்
Posterior probability — பின் நிகழ்தகவு
Price relative — விலை விகிதம்
Primary — முதல்
Prior probability — முன் நிகழ்தகவு
Probable error — நிகழத்தக்க பிழை, நண்பாதி இடைவெளி

Probability — நிகழ்தகவு
,, addition law of — கூட்டு நிகழ்தகவு விதி
,, density நிகழ்தகவு அடர்த்தி
,, function — நிகழ்தகவு சார்பு
,, mathematical — கணக்கியல் நிகழ்தகவு
,, multiplication — பெருக்கு ,,
,, statistical — புள்ளியியல் ,,
Procedure — செய்முறை
Profit — இலாபம்
Proof — நிறுவல், நிறுவுதல்
Psychological statisties உளப் புள்ளியியல்

Q

Qualitative data — பண்பின் விவரங்கள்
Quality control — தரக்கட்டுப்பாடு
Quantitative data — அளவின் விவரங்கள்
Quartile — கால்மானம்
Quartile measure of skewness — கால்மானக் கோட்டளவை
Quartile lower — முதற் கால்மானம்
,, upper — மூன்றுங் கால்மானம்
,, deviation — கால்மான விலக்கம்
Quartile range — கால்மான வீச்சு
Quantity index — அளவு குறியீட்டெண்
Questionnaire — வினாத் தொகுதி, கேள்விப் பட்டி

R

Random — சமவாய்ப்புள்ள
Randomisation — சரிசமவாய்ப்பு முறைமை
Random sample — சமவாய்ப்புக் கூறு
Range — வீச்சு
Rank correlation — வரிசைத் தொடர்பு, தரத் தொடர்பு
Rate — வீதம்
Raw data — சீர்படா விவரங்கள்
Reasoning — ஆய்வு
Regression — மாறிகளின் தொடர்பு
,, coefficient — மாறிகளின் தொடர்புக்கெழு
,, equations — தொடர்பு சமன்பாடுகள்
,, estimate — மாறிகளின் தொடர்பு மதிப்பீடு

Regular sample method — முறையுடை மாதிரி முறை
Relation — தொடர்பு
Relative — சார்கின்ற
,, density — சார்பு அடர்த்தி
Representation — குறிப்பு, வகைக் குறி
Representation symbolic — குறியீட்டு விளக்கம்
Representative Sampling — வகைப்படுத்திய பண்புக்கூற்று முறை
Residue — எச்சம்
Root mean squarred deviation — வர்க்க மூலங்களின் சராசரி வர்க்க விலக்கம்

S

Sale price — விற்பனை விலை
Sample — கூறு
,, sample — பெருங்கூறு
,, optimum — உத்தமக் கூறு
,, double — சிறு கூறு
Sampling average — கூறுகளின் சராசரி
,, distribution — கூறு பரவல்
,, double — இருபடி மாதிரி முறை
,, error — கூறு பண்புகளின் பிழை
,, fluctuations — கூறு தேர்வின் ஏற்றத் தாழ்வுகள்
,, methods — கூறெடுத்தலின் முறைகள்
Sample multi-stage — பல்நிலைக் கூறு
,, purposive — நோக்குடைக் கூறு
,, quota — அளவுடைக் கூறு
,, representative — பிரதிநிதித்துவக் கூறு
Scale — அளவுத் திட்டம்
Scatter diagram — சிதறல் விளக்கப் படம்
Secondary data — இரண்டாம் நிலை விவரங்கள்
Significance — முக்கியத்துவம்
,, test of — முக்கியத்துவ சோதனை
Similar — வடிவொத்த
Simplification — சுருக்கல்
Sketch — வரைபடம்
Skew — சமச்சீரற்ற, கோட்டமுடைய
Skewed distribution — சீரில்லா (அ) கோட்டமுடைய பரவல்

Skewness — கோட்டம்
Skewness coefficient of — கோட்டக்கெழு
,, measure of — கோட்டளவை
Standard — திட்டமான
,, deviation — திட்ட விலக்கம்
,, error — திட்டப் பிழை
Statistic — புள்ளியியல் அளவை
Statistics — புள்ளி விவரங்கள்
— புள்ளியியல்
,, — புள்ளி விவரவியல்
,, official — அரசாங்கப் புள்ளி விவரம்
Statistics bureau புள்ளி விவரச் செயலகம்
,, investigator — புள்ளி விவர ஆய்வாளர்
,, diagram — புள்ளி விவர விளக்கப்படம்
Statistical methods — புள்ளியியல் முறைகள்
,, research — புள்ளி விவர ஆய்வு
Stratified randam sample — படுகை சம வாய்ப்புக்கூறு
Supplementary — மிகை நிரப்பி
Symmetrical — சமச்சீரான

T

Tabulation — பட்டியல் அமைத்தல்
Tally Mark — கணிப்புக்குறி
Tendency — இயல்பு
Test — சோதனை
,, significance — முக்கியத்துவ சோதனை
,, students 'T' — ஸ்டூடண்டின் '*T*' சோதனை
Theory — கொள்கை
Tolerance limits — பொறுமை எல்லைகள்
Total deviation — மொத்த விலக்கம்
Trend — போக்கு
,, secular — நீள் காலப்போக்கு
Trend value — போக்கு மதிப்பு
Trial — முயற்சி
True class interval — உண்மையான பிரிவு இடைவெளி

U

Umbiased — பிறழ்ச்சியற்ற
Uniform — ஒரே சீரான

Union — சேர்க்கை
Union of sets — கணங்களின் ஒன்றியம், கணங்களின் சேர்க்கை
Unit — அலகு
Universal sets — அகில கணம்
Unknown — தெரியாத
Unlimited — எல்லையற்ற
Upper confidence limit — மேல் நம்பிக்கை எல்லை
Upper class limit — மேல் பிரிவு எல்லை
Upper quartile — மேல் கால்மானம்
Upward trend — ஏறும் போக்கு

V

Value — மதிப்பு
,, Limit — எல்லை மதிப்பு
,, present — இன்றைய மதிப்பு
,, real — உண்மை மதிப்பு
,, maximum — மீப்பெரு மதிப்பு
,, minimum — மீச்சிறு மதிப்பு
Variable — மாறி
Variate bi — இரு மாறி
,, multi — பல் மாறி
,, continuous — தொடர் மாறி
,, discrete — தனித்த மாறி
Verification — சரிபார்த்தல்

W

Weighted average — நிறையிட்ட சராசரி
,, index number — நிறையிட்ட குறியீட்டெண்
Weighted measurement — எடையளவு
Wholesale price — மொத்த விலை
,, number — முழு எண்
Wholesale index number — முழு விலைக் குறியீட்டெண்
With of a class interval — பிரிவின் இடைவெளி

Z

Zero — பூச்சியம்
Zone — மண்டலம், வலயம்